地球惑星科学基礎 III 演習 (4) 問題略解

1 複素 Fourier 級数に関する問題

i) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み．

ii) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み．

iii) 複素 Fourier 係数は

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{ax}{T} e^{-2in\pi x/T}\,\mathrm{d}x$$

によって計算できる．計算を実行すると $n \neq 0$ について

$$c_n = \frac{ia}{2n\pi},$$

$n = 0$ について

$$c_0 = \frac{1}{2}a$$

である．したがって

$$f(x) = \frac{1}{2}a + {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' \frac{ia}{2n\pi} e^{2in\pi x/T}$$

である．ここで ${\sum_{n=-\infty}^{\infty}}'$ は $n = 0$ を除き，$n = -\infty$ から $n = \infty$ までの総和を計算するという記号である．

なお，Fourier 級数展開の形では，

$$f(x) = \frac{1}{2}a - \frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

である．(注：関数を図示するとわかるが，$f(x) - \frac{1}{2}$ は奇関数であるので，Fourier 級数展開は $a_0/2$ の項を除くと sin の項のみが現れる．)

iv) 複素 Fourier 係数は

$$c_n = \int_0^1 A\sin(\pi t)\, e^{-2in\pi t}\,\mathrm{d}t$$

から計算できる．計算を実行すると，$n \neq 0$ に対して

$$c_n = \frac{2A}{\pi\,(1-4n^2)},$$

$n = 0$ に対して

$$c_0 = \frac{2A}{\pi} \tag{1}$$

である．したがって，

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty} \left(\frac{1}{1-4n^2} \right) e^{2in\pi t} \right\}$$

である．

v) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み．

vi) 複素 Fourier 係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iax} e^{-inx}\, \mathrm{d}x$$

から計算する．計算を実行すると

$$c_n = \frac{1}{\pi(a-n)} \sin\{(a-n)\,\pi\}$$

となる．

Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty} |c_n|^2$$

となる．左辺を計算すると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iax} e^{-iax}\, \mathrm{d}x = 1,$$

右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty} |c_n|^2 &= \sum_{n=-\infty} \frac{1}{\pi^2(a-n)^2} \sin^2\{(a-n)\pi\} \\ &= \sum_{n=-\infty} \frac{1}{\pi^2(a-n)^2} \sin^2(a\pi). \end{aligned}$$

したがって，上式を整理して，

$$\sum_{n=-\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

が証明された．