

地球惑星科学基礎III 演習(4)

2003年10月31日課題(レポート提出期限11月7日)

1 複素 Fourier 級数に関する問題

i) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (1)$$

と表現できる。このとき、複素 Fourier 係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (2)$$

で与えられることを証明しなさい。

ii) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x) = e^{kx}$ は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (3)$$

となることを証明しなさい。

iii) $0 \leq x < T$ において $f(x) = \frac{ax}{T}$ で与えられるのこぎり波の複素 Fourier 級数を求めなさい。ただし、 a は正の実数とする。

iv) $0 < t < 1$ において $f(t) = A \sin \pi t$, $f(t+T) = f(t)$, ($T=1$) で定義される関数の複素 Fourier 級数を求めなさい。ここで A はある定数とする。

v) 複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4)$$

を次の2通りの方法で証明しなさい。

a) 方程式(1), (2) を使って証明する。

b) (複素でない) Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明する。

vi) a を整数でない実数とする。関数 $f(x) = e^{iax}$, ($-\pi < x < \pi$) を複素 Fourier 級数に展開せよ。さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい。