地球惑星科学基礎III 演習(3)　問題略解

1　Fourier 級数の問題 (2)

省略．すでに授業中に解答例を紹介済み．

2　Parseval の恒等式の問題

i) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み．

ii) a) 関数 $f(x)$ は偶関数なので，Fourier 係数 b_n はゼロである．Fourier 係数 a_n は

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

より計算できる．計算を実行すると $n \neq 0$ のとき

$$a_n = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \{\cos(n\pi) - 1\},$$

$n = 0$ のとき

$$a_0 = 2$$

となる．したがって，$f(x)$ の Fourier 級数展開は

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \{\cos(n\pi) - 1\}\cos\frac{n\pi x}{2}, \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \dots\right). \end{aligned}$$

である．

b)

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$$

なので，Parseval の恒等式は

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right).$$

c)

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}.$$

iii)

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x-\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right\}$$

が正となることを証明すればよい．$f(x)$ が Foureir 級数展開できるので，Parseval の恒等式より，

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right) &= \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right)\\ &= \sum_{n=M+1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\geq 0.\end{aligned}$$

したがって，件の式が証明できた．