地球惑星科学基礎III 演習(11,12)解答例

平成16年1月19日

1 Gamma関数の問題

講義中に模範解答を紹介

2 Laplace変換の問題

i) 講義中に模範解答を紹介

ii) 講義中に模範解答を紹介

iii) 講義中に模範解答を紹介

iv) 定義より

$$
\begin{aligned}
L\{H(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} H(t)\,dt = \int_0^\infty dt \int_0^t du\, e^{-st} F(u) G(t-u). \\
&= \int_0^\infty dt \int_0^t du \left(e^{-su} F(u) \right) \left(e^{-s(t-u)} G(t-u) \right).
\end{aligned}
$$

上式において積分の順番に注意．uで積分した後，t で積分している．ここで $v = t - u$ と独立変数 t から v へ変換する．さらに，積分の順序を交換すると

$$
g(s) = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \left(e^{-su} F(u) \right) \left(e^{-sv} G(v) \right) \tag{1}
$$

となる（図 1 参照）．上式の被積分関数は，u のみの関数と v のみの関数としてかけるので，したがって，

$$
\begin{aligned}
g(s) &= \int_0^\infty du\, e^{-su} F(u) \int_0^\infty dv\, e^{-sv} G(v), \\
&= \mathcal{L}\{F(t)\}\, \mathcal{L}\{G(t)\} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

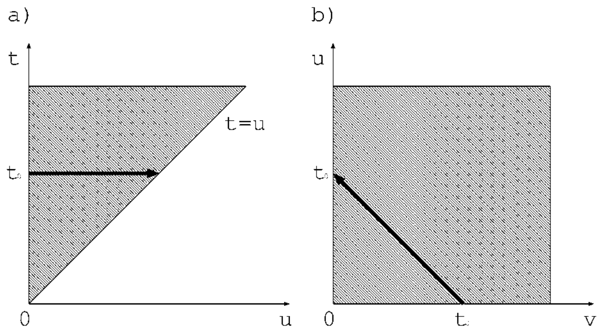

図 1: 積分領域．a) の積分領域は，第 1 象限の上三角領域である．b) の積分領域は第 1 象限全体である．a) における矢印の積分経路は，b) の矢印に対応する．

v) 以下の関数の Laplace 変換を求めなさい.

a) 講義中に模範解答を紹介

b) 講義中に模範解答を紹介

c) 定義より

$$
f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\sin t}{t}\, dt. \qquad (3)
$$

ここで上式を s で微分すると，

$$
\frac{df(s)}{ds} = -\int_0^\infty e^{-st} \sin t\, dt = -\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{-1}{s^2+1}.
$$

したがって

$$
f(s) = -\tan^{-1} s + c, \qquad (4)
$$

ここで，c は任意定数である．(3) において $s \to \infty$ のとき，$f(s) \to 0$ が得られる．$\lim_{s\to\infty} \tan^{-1} s = \frac{\pi}{2}$．したがって，(4) における定数 c は $c = \frac{\pi}{2}$ である．