地球惑星科学基礎III 演習 (1)

2003年10月3日課題（レポート提出期限10月10日）

1 Eulerの関係式

i) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい.

ii) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい.

iii) $\sqrt{i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ を証明しなさい.

iv) 双曲線関数

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \tag{1}$$

は $\sinh x=-i\sin(ix)$ であることを確かめなさい．同様に双曲線関数

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \tag{2}$$

は $\cosh x=\cos(ix)$ であることを確かめなさい.

v) $\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい．同様に $\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい.

vi) 以下の式を証明しなさい.

a) $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$
b) $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$
c) $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$
d) $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

補足：これらの式は，有限な Fourier 級数の例である.

2　振動の微分方程式について

i) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

が

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい．ここで, A, B は任意定数である．またこの解が以下の形にかけることを示しなさい：

$$\begin{aligned} x &= C\cos(\omega t + \alpha), \\ &= D\sin(\omega t + \beta), \\ &= C\ \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t+\alpha)}\right], \\ &= D\ \mathrm{Im}\left[e^{i(\omega t+\beta)}\right]. \end{aligned}$$

さらに, $C,\ D,\ \alpha,\ \beta$ を $A,\ B$ で表現しなさい.

補足： C, D は**振幅**, α, β は**位相**と呼ばれる.