第6章　スペクトル解析

Fourier 変換の応用例として 4 章では拡散方程式を Fourier 変換を用いて解いてみた．一般に時間・空間の偏微分を含む偏微分方程式は, Fourier 変換（もしくは境界条件により Fourier 級数展開, さらに言えば直交関数展開）を用いれば空間の偏微分は波数に置き換わり, 時間微分のみを含んだ常微分方程式系に置き換わる．そこで後は常微分方程式が解ければ偏微分方程式は解ける．(得られた解を逆 Foureir 変換する必要があるが...) このように, Fourier 級数・Fourier 変換は偏微分方程式を解くために大変有用な方法である．しかしながら, 偏微分方程式を解く以外にも大変有用な Fourier 変換の応用例がある．それがこの章で解説するスペクトル解析である．

スペクトル解析は, 時系列データやある場の量の空間変動の周期性や類似性を定量的に調べるときに最も多用される解析方法である．まず周期性を定量的に解析する手法であるパワースペクトル密度について解説する．次にデータの類似性を定量的に解析する自己相関関数について述べ, パワースペクトル密度と自己相関関数の関係について解説する．

6.1　パワースペクトル密度

ここでは 1 次元の時系列 $f(t)$ を念頭において解説する.[1] $f(t)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(\omega)$ とする．即ち,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega, \tag{6.1}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

注意： ここではあえて Fourier 変換と逆変換を非対称な形に定義しておく．

[1] ある瞬間における, 物理量の 1 次元的空間分布を考察する場合には, 以下の説明で周波数は波数に置き換えればよい．さらに 2 次元以上の物理量の空間分布も以下で説明する方法を拡張することによって取り扱える．

準備 1： $f(t)$ が**実数**の場合を考察することにする．このとき，

$$f(t) = f(t)^* \tag{6.3}$$

の関係が満たされていなければならない．ここで，$*$ は複素共役を表す．この条件を，$f(t)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(\omega)$ で表現すると，

$$\begin{aligned} f(t) - f(t)^* &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{f}(\omega)e^{i\omega t} - \hat{f}^*(\omega)e^{-i\omega t}\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{f}(\omega) - \hat{f}^*(-\omega)\right\}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = 0. \end{aligned}$$

第 1 式から第 2 式への変形は，右辺被積分関数の第 2 項の積分変数において $\omega \to -\omega$ の変数変換を行っている．したがって，

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}^*(-\omega) \tag{6.4}$$

となる．

準備 2： 時系列 $f(t)$ は $-\infty < t < \infty$ の範囲で定義されるが，ここでは以下のようにある制限された区間内を定義域とする時系列を導入する：

$$f(t;T) = \begin{cases} f(t) & (|t| \le T), \\ 0 & (|t| > T). \end{cases} \tag{6.5}$$

即ち，$f(t) = \lim_{T\to\infty} f(t;T)$ である．$f(t;T)$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(\omega;T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t;T)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t, \tag{6.6}$$

$$= \int_{-T}^{T} f(t;T)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.7}$$

で与えられる．

定義： 以上の条件のもと，

$$P(\omega) = \lim_{T\to\infty} P(\omega;T), \tag{6.8}$$

$$P(\omega;T) = \frac{|\hat{f}(\omega;T)|^2}{2T} \tag{6.9}$$

で定義される $P(\omega)$ はパワースペクトル密度 [power spectral density] と呼ばれる．$P(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ は $\omega \sim \omega + \mathrm{d}\omega$ に含まれる時系列 $f(t)$ の成分の強度（エネル

ギーに比例[2]）を表す．$P(\omega)$ を調べることにより, 時系列に含まれている周期成分およびその強度を定量的に調べることができる.

補足 1： 時系列 $f(t;T)$ と $P(\omega;T)$ との間には，次のような簡単な関係式が成り立つ．今 $f(t;T)$ の $-T<t<T$ にわたる自乗平均値を求めてみると，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t;T)^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t;T)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega;T)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega;T)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(t;T)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\hat{f}(\omega;T)\right|^2}{2T}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega;T)\,\mathrm{d}\omega \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

を得る．したがって

$$
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t;T)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\,\mathrm{d}\omega. \qquad (6.11)
$$

補足 2： 上記では真の時系列 $f(t)$ でなく, 有限区間内でのみ定義された $f(t;T)$ を用いてスペクトル密度を定義した. 現実に取り扱うデータは必ず有限の長さしかないので，このような制限は決して特異なものではない．また，$f(t)$ もしくは $f(t;T)$ を実数に制限することも, 実際のデータ解析を念頭におけば, 理にかなった制約である.

6.2 相関関数（自己相関関数）

時系列データの波形 $f(t)$ が, τ だけずらしたそれ自身 $f(t+\tau)$ と統計的にどの程度似ているか? （相関があるか?）を定量的に量る物理量が以下で定義される自己相関関数 [auto correlation function] $C'(\tau)$ である.

準備 1： **統計平均**, もしくは**アンサンブル平均**を導入する. 時系列 $f(t)$ の揺らぎの確率分布が, $\rho[f]$ で与えられるとする. 即ち, 時系列 $f(t)$ が $f' \sim f' + \mathrm{d}f'$

[2] (??), (??) から $f(t)^2$ の次元は $P(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ と同じであることがわかる．そこで例えば, $f(t)$ が風速であると，$P(\omega)\mathrm{d}\omega$ はこの場合には（単位質量当たりの）運動エネルギーの次元を持つことになる.

の値をとる確率が $\rho[f']\mathrm{d}f'$ で与えられるとする．確率の規格化条件により，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho[f]\mathrm{d}f = 1 \tag{6.12}$$

である．

このとき，$f(t)$ の統計平均は

$$\overline{f(t)} \equiv \int_f f(t)\rho[f]\mathrm{d}f \tag{6.13}$$

で定義される．

準備 2： $f(t)$ の統計平均 (6.13) が t に依存しないとき，時系列は**統計的に定常である**と呼ばれる．また，$\overline{f(t)f(t')}$ が 2 時刻の差 $\tau \equiv |t-t'|$ のみにしか依存しないとき，時系列は**統計的に一様である**と呼ばれる．

定義： 統計的に一様，かつ 定常な時系列に対して，以下で定義される関数は相関関数と呼ばれる:

$$C'(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} \tag{6.14}$$

注意： 統計的定常性によって

$$\begin{aligned}\overline{f(t)} &= \overline{f(t+\tau)} = \overline{f} \\ \overline{f(t)\overline{f}} &= \overline{f(t+\tau)\,\overline{f}} = \overline{f}^2\end{aligned}$$

である．

補足 1： $f(t)$ から平均値を引き去って

$$C'(\tau) = \overline{\left\{f(t)-\overline{f(t)}\right\}\left\{f(t+\tau)-\overline{f(t+\tau)}\right\}} \tag{6.15}$$

で定義する場合もある．

補足 2： 実際には，統計平均 (6.13) を時間平均と等価であると仮定して，統計平均を時間平均で置き換えて計算する場合が多い．即ち，

$$\overline{f(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.16}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t;T)\,\mathrm{d}t. \tag{6.17}$$

このような仮定 (仮説) をエルゴード仮説という. エルゴード性が成り立つ場合には, 自己相関関数は

$$C'(\tau) = \; = \lim_{T\to\infty} C'(\tau;T) \tag{6.18}$$

$$C'(\tau;T) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t;T)f(t+\tau;T)\,\mathrm{d}t \tag{6.19}$$

で与えられる.

6.2.1 自己相関関数の性質

1. **自己相関関数** $C'(\tau)$ **は**, $\tau = 0$ **が最大値である**.　従って, 改めて

$$C(\tau) = C'(\tau)/C'(0) \tag{6.20}$$

を自己相関関数と定義する場合が多い.[3] このとき,

$$C(\tau) \le 1 \tag{6.21}$$

である.

[**証明**]:

$$\overline{\{f(t) - f(t+\tau)\}^2} = \overline{f(t)^2} + \overline{f(t+\tau)^2} - 2\overline{\{f(t)f(t+\tau)\}} \ge 0,$$
$$\overline{f(t)^2} \ge \overline{\{f(t)f(t+\tau)\}}. \tag{6.22}$$

したがって

$$C'(0) \ge C'(\tau). \tag{6.23}$$

2. **相関がない場合には**, $C(\tau) = 0$ **である**.

3. **逆相関の場合には**, $C(\tau) = -1$ **である**.

$$|C(\tau)| \le 1 \tag{6.24}$$

である.

[3] $C^{0}(\tau)$ と区別して, 自己相関係数と呼ぶ場合もある.

4. **自己相関関数は偶関数である**.

[証明]:　統計的定常性によって

$$C'(-\tau) = \overline{\{f(t)f(t-\tau)\}^2} \tag{6.25}$$

の右辺は $|t-(t-\tau)| = |\tau|$ のみの関数である．したがって,

$$C'(\tau) = C'(-\tau). \tag{6.26}$$

6.2.2　自己相関関数とパワースペクトル密度の関係：Wiener-Khintchine の定理

(6.9) の右辺に (6.6) を代入する：

$$P(\omega;T) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t''f(t';T)f(t'';T)e^{i\omega(t''-t')}. \tag{6.27}$$

$\tau \equiv t''-t'$ を導入して, 積分変数を t', t'' から t', τ に変換する．このとき, エルゴード性を仮定すると,

$$\begin{aligned} P(\omega;T) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau e^{i\omega\tau}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t' f(t';T)f(t'+\tau;T), && (6.28)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}C'(\tau;T)\,\mathrm{d}\tau. && (6.29)\end{aligned}$$

もしくは，(6.29) において, $T\to\infty$ の極限を取ると

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C'(\tau)e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.30}$$

ここで, 変数変換 $\tau \to -\tau$ を行うと,

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} C'(-\tau)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C'(\tau)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau && (6.31)\end{aligned}$$

となる．最後の式変形は, (6.26) を用いた．

即ち, パワースペクトル密度と相関関数は互いに Fourier 変換の関係で結ばれている．このような関係はウィーナー・ヒンチン (Wiener-Khintchine) の定理と呼ばれる.[4]

---

[4]Fourier 変換を (6.1), (6.2) のように非対称な形ではなく，正変換・逆変換にそれぞれ係数 $\frac{1}{2\pi}$ が現れるような対照的な形にしておくと，Wiener-Khintchine の定理 (??) の右辺には $\frac{1}{2\pi}$ の係数が現れる．

6.2.3　白色雑音

可視光線は様々な波長（もしくは振動数）をもった波を適当な大きさで重ね合わすことによって，様々な色を出すことが出来ることはよく知られている．太陽光（白色光）は全ての波長（周波数）の成分の光をほぼ同じ強さで重ねあわすことにより得られる．このように全ての振動数，もしくは波長を同じ強さで重ね合わせた不規則な信号（データ）は**白色雑音**と呼ばれる．

白色雑音 $f(t)$ のパワースペクトル密度 $P(\omega)$ は，全ての振動数成分が同じ割合で含まれていることから，ω には依存せず定数になる．すなわち，

$$P(\omega) = \mathrm{const} = c. \tag{6.32}$$

また，このような時系列の自己相関関数 $C'(\tau)$ は Wiener-Khintchine の定理より

$$\begin{aligned} C'(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} P(\omega)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \\ &= c\,\delta(\tau) \end{aligned} \tag{6.33}$$

となる．すなわち，このようなデータの自己相関関数は δ 関数で与えられ，現在の時系列の値は，未来もしくは過去のいずれの時刻の時系列の値とは無相関となる.（このことが白色’雑音’と呼ばれる所以である.）

6.3　フィルター

6.3.1　システム関数とフィルターの関係

時系列データを $f(t)$ とし，それにある演算処理を施した結果生じた時系列を $g(t)$ とする．$f(t)$ と $g(t)$ との間に，

$$g(t) = S \cdot f(t) \tag{6.34}$$

の関係式が成り立つとき (S は時刻 t に無関係)，S をシステム関数という．また，$f(t)$ と $g(t)$ のパワースペクトルをそれぞれ $P_f(\omega)$，$P_g(\omega)$，とすると，

$$P_g(\omega) = R \cdot P_f(\omega) \tag{6.35}$$

の関係が成り立つとき，R をある演算処理のフィルターと呼ぶ.

システム関数 S とフィルター R の関係を求める．いま，(6.34) 式を Fourier 変換する．このとき，S が時刻 t に無関係であることを考慮すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t = S\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t, \tag{6.36}$$

と書ける．$f(t)$ と $g(t)$ の Fourier 変換をそれぞれ $\hat{f}(\omega)$, $\hat{g}(\omega)$ とすると，(6.36) 式は

$$\hat{g}(\omega) = S \cdot \hat{f}(\omega), \tag{6.37}$$

と書ける．従って，$f(t)$ と $g(t)$ のそれぞれのパワースペクトル密度 $P_f(\omega)$ と $P_g(\omega)$ との間の関係は，(6.37) 式を用いて，

$$P_g(\omega) = |\hat{g}(\omega)|^2 = |SF(\omega)|^2 = |S|^2 P_f(\omega), \tag{6.38}$$

即ち，システム関数とフィルターの間の関係は,

$$R = |S|^2 \tag{6.39}$$

で与えられる．

6.3.2　フィルターの例：移動平均のフィルター

前節の計算を参考にして, 移動平均という演算がどのようなフィルターに相当するか計算してみる．演算を施す前の時系列データを $f(t)$ とし，$2L$ の長さの移動平均操作によって作られる時系列を $\overline{f_{2L}}(t)$ とする．(添え字 $2L$ は移動平均をとる長さに依存して，得られた時系列の性質が変わることを明記するためにつけた)．即ち,

$$\overline{f_{2L}}(t) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t+t')\,\mathrm{d}t'. \tag{6.40}$$

$f(t)$ はその Fourier 変換 $\hat{f}(\omega)$ を用いると

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{6.41}$$

と表現される．(6.41) を (6.40) に代入する：

$$\overline{f_{2L}}(t) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega(t+t')}\mathrm{d}\omega\}\,\mathrm{d}t'. \tag{6.42}$$

t' と ω の積分の順序を入れ換えて積分を実行すると,

$$\begin{aligned}\overline{f_{2L}}(t) &= \frac{1}{2L}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\{\int_{-L}^{L} e^{-i\omega(t+t')}\,\mathrm{d}t'\}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega L}{\omega L}\hat{f}(\omega)e^{-i\omega(t)}\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned} \tag{6.43}$$

を得る．一方 $\bar{f}_{2L}(t)$ はその Fourier 変換 $\bar{F}_{2L}(\omega)$ を用いて表現すると，

$$\bar{f}_{2L}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_{2L}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega, \tag{6.44}$$

であるから，従って，(6.43) と (6.44) より長さ $2L$ の移動平均のシステム関数 S_{2L} は

$$S_{2L} = \frac{\sin\omega L}{\omega L},$$

で与えられる．システム関数とフィルタとの間の関係式 (6.39) を用いると長さ $2L$ の移動平均のフィルタは

$$R_{2L} = \frac{\sin^2\omega L}{(\omega L)^2} \tag{6.45}$$

となる．つまり，長さ $2L$ の移動平均を施すことは，パワースペクトルに (6.45) の形の関数を掛けること（信号を濾過すること）と同等である．(6.45) の関数形を以下に示す．

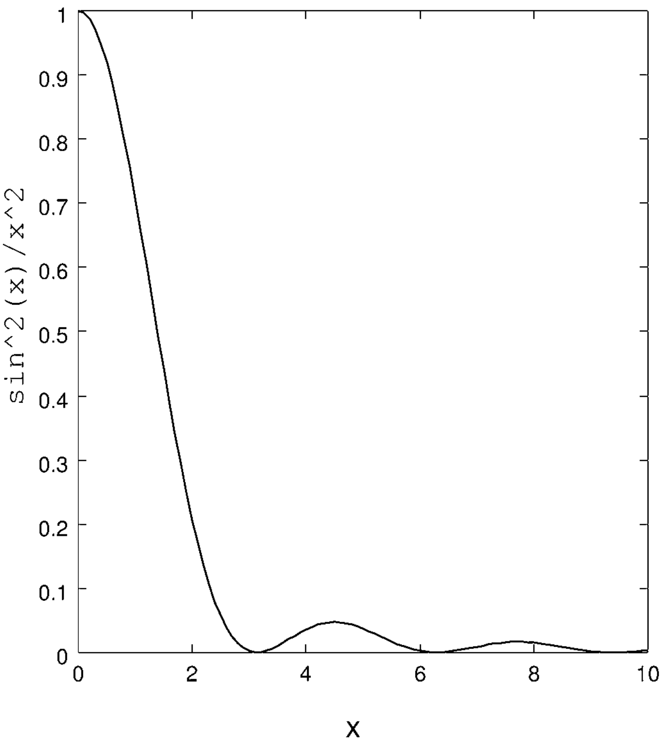

図 6.1: 移動平均のフィルタ