

2次元乱流の基礎理論

岩山隆寛 (神戸大学 大学院理学研究科) ^{*1}

2013 年 9 月 24-26 日

^{*1} iwayama@kobe-u.ac.jp

目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	本講義の目的	1
1.2	参考文献	3
第 2 章	支配方程式と基本的性質	5
2.1	流れの領域と境界条件	5
2.2	支配方程式	5
2.3	地球流体力学的 2 次元系	8
2.4	保存則	10
2.5	波数空間内の支配方程式	11
2.6	詳細保存則	13
第 3 章	Green 関数	19
3.1	はじめに	19
3.2	定式化	20
3.3	Green 関数の具体例	22
3.4	点渦を中心とした周方向の速度	27
3.5	議論	27
第 4 章	2 次元乱流の現象論	31
4.1	K41 理論	31
4.2	2 次元乱流の慣性領域	34
4.3	非局所相互作用	38
4.4	エントロフィー慣性領域の再考察	39
4.5	数値実験による検証	41
4.6	注意	42

第 5 章	二重カスケード過程	45
5.1	三波相互作用に基づく議論	46
5.2	強制散逸乱流の場合	51
5.3	減衰性乱流の場合	53
第 6 章	完結理論	61
6.1	完結問題	61
6.2	準正規近似理論	62
6.3	準正規 Markov 化近似理論	76
6.4	渦減衰準正規 Markov 化近似理論	77
6.5	その他の完結理論	78
第 7 章	波数空間内のダイナミクス	81
7.1	フラックスの分解	81
7.2	自己相似スペクトル領域におけるフラックス	85
7.3	慣性領域におけるフラックス	88
7.4	赤外領域のスペクトル	92
付録 A	Green 関数の導出に必要な計算に関するノート	107
A.1	Gamma 関数, Beta 関数に関する公式とその証明	107
A.2	Fourier 変換の公式	113
A.3	積分 $I(m) = \int_0^1 \frac{x^{2m-2} \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ について	119
付録 B	Helmholtz の基本定理	123
付録 C	キュムラントについてのノート	127
参考文献		129

第 1 章

はじめに

1.1 本講義の目的

地球の大気や海洋の大規模な運動は、地球の自転と大気や海洋の密度成層の影響を強く受ける。系の回転は、回転軸に沿って流れを一様化する効果を及ぼし、密度成層は鉛直運動を抑制する効果がある。さらに、地球の大気や海洋の大規模な運動では、水平方向の現象の拡がりや鉛直方向のそれよりも大きく、幾何学的にも 2 次元である。地球大気の運動で 2 次元乱流的な性質が現れている例として有名なものは、大気のエネルギースペクトルである (図 1.1)。波長 $100 \sim 1000 \text{ km}$ に波数の -3 に比例するスペクトル領域が存在する。一方、強制散逸 2 次元 Navier-Stokes 乱流のエネルギースペクトルの概念図を図 1.2 に示す。波数の k^{-3} に比例するスペクトルは 2 次元乱流に特有のモノであり、このことから地球大気の大規模運動が 2 次元乱流的性質を持っていることがうかがえる。2 次元流体は 3 次元流体に比べて自由度が一つ低いことから、より高解像度の数値実験をすることが可能である。このような、地球流体力学的な応用を期待され、また 3 次元乱流の代替え物として、2 次元乱流の研究は 1960 年代から精力的に行われてきた。

本講義では、2 次元乱流の基礎理論を紹介する。特に、Navier-Stokes 方程式系や地球流体力学で知られたいくつかの 2 次元流体系を統一的に記述する一般された 2 次元流体系 (α 乱流系) (Pierrehumbert, *et al.*, 1994[34]) に関して、議論を行うことにする。この講義の目的は、大気のエネルギースペクトルの形成や維持のメカニズムを 2 次元乱流の立場から説明することではなく、図 1.2 に示されている 2 次元乱流のエネルギースペクトル (もしくは別の物理量のスペクトル) を説明する理論を紹介することである。スペクトルの性質を説明することから、議論は波数空間の中で展開される。物理空間における 2 次元乱流の性質としては、秩序渦 (coherent vortex) の存在が重要である (McWilliams, 1984[26])。秩序渦の存在がスペクトルの性質に大きな影響を及ぼすことが知られているが、ここではそれに触れることができなかった。 α 乱流系の物理空間のダイナミクスはまだ研究が行わ

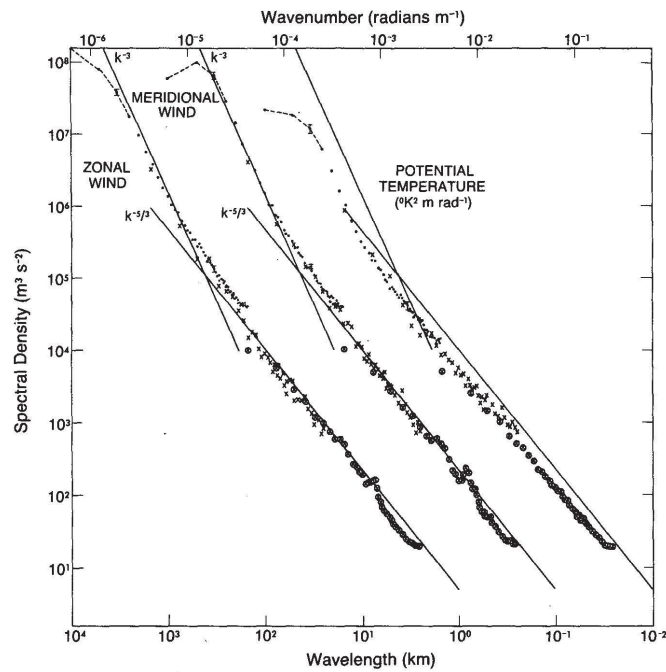


図 1.1 航空機観測により得られた対流圏界面付近の東西風速, 南北風速, 温位のエネルギースペクトル (Nastom & Gage, 1985[28]). 南北風速と温位のスペクトルはそれぞれ 1 桁, 2 桁右にずらして表示されている. 波数を k として k^{-3} と $k^{-5/3}$ の参照線が書き入れられている.

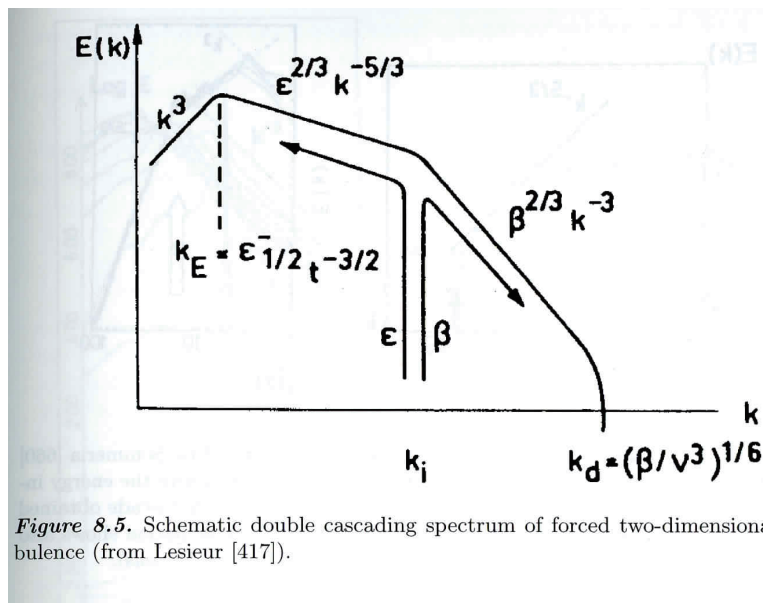


Figure 8.5. Schematic double cascading spectrum of forced two-dimensional turbulence (from Lesieur [417]).

図 1.2 強制散逸 2 次元 Navier-Stokes 乱流のエネルギースペクトルの概念図 (Lesieur, 2008)[24]

れていない. Navier–Stokes 乱流の物理空間のダイナミクスに関する研究については, 例えば, Iwayama *et al.* (2002)[13] の §1 を参照してほしい.

1.2 参考文献

本稿を作成するにあたり参照した日本語の文献は, 以下のとおりである. 巻末にまとめた参考文献リストに日本語表記のモノが入れられなかったので, ここでリストアップしておく.

- 木田重雄, 柳瀬眞一郎: 乱流力学 (朝倉書店, 1999 年), ISBN4-254-20095-1.
- 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻 編: 地球環境を学ぶための流体力学 (成山堂書店, 2001 年) ISBN4-425-71301-X. (伊賀啓太: 第 5 章 乱流)
- 後藤俊幸: 乱流理論の基礎 (朝倉書店, 1998 年) ISBN4-254-13074-0.

第 2 章

支配方程式と基本的性質

2.1 流れの領域と境界条件

2次元平面内の非圧縮性流体の運動を考察する. 流体の存在する領域 Ω と境界条件は, 数学的な解析の容易さのため, 単連結領域で, 以下のいずれかであるとする.

- 矩形領域 ($-L \leq x, y \leq L$): この場合の境界条件は二重周期境界条件とする.
- 無限の平面 ($-\infty < x, y < \infty$): この場合の境界条件は $\boldsymbol{x} \rightarrow \infty$ で物理量に適切な減衰条件が課されていると仮定する.

2.2 支配方程式

非圧縮性流れにより移流されるスカラー場 $q(\boldsymbol{x}, t)$ の発展方程式として,

$$\begin{aligned} \frac{Dq}{Dt} &= \frac{\partial q}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla q \\ &= \mathcal{D} + \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

を考える. ここで $\mathcal{D}, \mathcal{F}$ はそれぞれ散逸項と強制項を表す. とりあえず, ここではこれらの形は特に指定しない. 非圧縮条件,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad (2.2)$$

から流れ関数 ψ を導入して, (2.1) を流れ関数を用いて表現すると,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \mathcal{D} + \mathcal{F}, \quad (2.3)$$

となる. ここで J は Jacobian,

$$J(a, b) \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (2.4)$$

速度場 $\mathbf{v}$ と流れ関数 ψ は次のような関係で結ばれている:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{e}_z \times \nabla\psi \\ &= -\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{2.5}$$

ここで $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである. Jacobian は以下の性質を持つことを注意しておく.

● 性質 1 (反対称性):

$$J(a, b) = -J(b, a).\tag{2.6}$$

● 性質 2:

$$aJ(a, b) = J\left(\frac{1}{2}a^2, b\right).\tag{2.7}$$

● 性質 3:

$$\begin{aligned}J(a, b) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial b}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial b}{\partial x}\right) \\ &= \{\nabla \times (a\nabla b)\} \cdot \mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{2.8}$$

q と ψ の間に何の関係もなく独立である場合には, q は受動的 (passive) に移流される. このような q をパッシブスカラーと呼ばれる. ここでは, q はパッシブではなく次のような運動学的関係式が存在する場合を考察する:

$$q(\mathbf{x}) = -(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(\mathbf{x}).\tag{2.9}$$

Δ は Laplace 演算子 (Laplacian) で, α は実数である. $(-\Delta)^{\alpha/2}$ は分数冪 Laplacian (fractional Laplacian) と呼ばれ, 流れの領域が無限平面もしくは二重周期境界条件のときには Fourier 変換や Fourier 級数を通じて定義される演算子である.

流れの領域 Ω が 矩形領域の場合, q や流れ関数 ψ は Fourier 級数を用いて

$$q(\mathbf{x}) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \hat{q}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \hat{q}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x},\tag{2.10}$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \hat{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x},\tag{2.11}$$

$$\mathbf{k} \equiv \frac{\pi}{L}(n_x\mathbf{e}_x + n_y\mathbf{e}_y), \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}\tag{2.12}$$

$$\int_{\Omega} d\mathbf{x} \equiv \int_{-L}^L \int_{-L}^L dx dy,\tag{2.13}$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \equiv \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty}\tag{2.14}$$

と表現できる.*¹ 流れの領域が無限平面である場合には、場は Fourier 変換で表現できる.
ここでは (2.10)–(2.12) において $L \rightarrow \infty$ を取った形式として、Fourier 変換を以下のよ
うに定義する:

$$q(\mathbf{x}) = \int \hat{q}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad \hat{q}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \hat{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad \hat{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

$$\int_{\Omega} d\mathbf{x} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy, \quad (2.19)$$

$$\int d\mathbf{k} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y. \quad (2.20)$$

流れの領域が矩形領域、無限平面のどちらの場合でも (2.9) は

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^{\alpha} \hat{\psi}(\mathbf{k}) = -k^{\alpha} \hat{\psi}(\mathbf{k}) \quad (2.21)$$

と書ける.*² なお、 ψ や q は実数なので、

$$\hat{\psi}^*(\mathbf{k}) = \hat{\psi}(-\mathbf{k}), \quad \hat{q}^*(\mathbf{k}) = \hat{q}(-\mathbf{k}), \quad (2.22)$$

が成り立つことを注意しておく。 $\alpha = 2$ のときの (2.9) は (速度場に回転演算子を作用させた意味での) 渦度と流れ関数の関係式になる。 L, T をそれぞれ長さと時間の次元とすると,*³ ψ, q の次元は、 $[\psi] = L^2/T$, $[q] = L^{2-\alpha}/T$ である。 α の値に依存して q の意味は異なり、 q は一般化渦度と呼ばれる。以下では特に断りのない限り、一般化渦度を単に渦度と呼ぶことにする。

*¹ ここでは、 $L \rightarrow \infty$ において自然に Fourier 変換に移行できるような Fourier 級数の表式を用いている。 $L \rightarrow \infty$ では明らかに

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d\mathbf{k} \quad (2.15)$$

である。なお、Kronecker の delta と Dirac の delta 関数の間の関係式は

$$\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.16)$$

である。また Parseval の恒等式は、

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} |A(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} |\hat{A}(\mathbf{k})|^2, & (\text{矩形領域の場合}) \\ \int |\hat{A}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}, & (\text{無限平面の場合}) \end{cases}$$

となる。

*² 特に断りがなければ、Fourier 係数や場の時間 t の依存性は省略して書くことにしておく。また、 $|\mathbf{k}| = k$ という表記を用いることにする。

*³ 矩形領域の長さ L と同じ記号を用いているが、混同しないように注意。

支配方程式 (2.3), (2.9) で与えられる系は, 一般化された 2 次元流体系と呼ばれる. この系は, 2 次元 Navier–Stokes 方程式系における強制散逸乱流のエンストロフィー慣性領域の研究のために, Pierrehumbert, *et al.* (1994) によって導入された系で (2.9) にパラメーター α を含むことから α 乱流系とも呼ばれてきた. しかしながら, この系は Navier–Stokes 方程式系を数学的に一般化したモデル方程式系という意味だけでなく, 地球流体力学において知られている幾つかの 2 次元流体系を統一的に表現することができる. そこで一般化された 2 次元流体系とも呼ばれている. ^{*4}

2.3 地球流体力学的 2 次元系

2.3.1 Charney–Hasegawa–Mima 方程式

f 平面上の浅水方程式系から導かれる (保存系の) 準地衡流渦位方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi) + J(\phi, \nabla^2 \phi) = 0 \quad (2.23)$$

と書ける. ここで, ϕ は地衡流流れ関数, λ は変形半径の逆数である. $\lambda \rightarrow \infty$ の極限では渦位は $\nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi \rightarrow -\lambda^2 \phi$ である. そこで, $\tau = t/\lambda^2$ という新しい時間を導入すると, この極限のもとで (2.23) は,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + J(\nabla^2 \phi, \phi) = 0, \quad (2.24)$$

となる. (2.3) と (2.24) を見比べると

$$q \Leftrightarrow \phi \quad \psi \Leftrightarrow \nabla^2 \phi \quad (2.25)$$

の関係がある. また, (2.9) の関係式は,

$$q = \nabla^{-2} \psi \quad (2.26)$$

となる. そこで, (2.23) の $\lambda \rightarrow \infty$ は $\alpha = -2$ の一般化された 2 次元流体系である. プラズマ物理学では, (2.23) は Hasegawa–Mima 方程式, もしくは Charney–Hasegawa–Mima (CHM) 方程式と呼ばれ, また $\lambda \rightarrow \infty$ のときの CHM 方程式 (2.24) は, Charney–Hasegawa–Mima 方程式の漸近モデル (asymptotic model: CHM-AM) 方程式と呼ばれる (Larichev & McWilliams, 1991[22]).

^{*4} Ohkitani(2012)[31] では一般化された準地衡流方程式系と呼んでいる.

2.3.2 表面地衡流系

f 平面上で安定な連続成層した流体に対する準地衡流渦位と平坦な下端境界上の熱力学方程式はそれぞれ,

$$q_G = \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + J \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0, \quad (z = 0) \quad (2.28)$$

である. ここで鉛直方向の座標 z は方程式の係数が 1 になるように適当にスケールされているとする. 流体は水平方向には周期境界条件を満たす. さらに流体は $z = 0$ の平坦な境界上に存在し, $z \rightarrow \infty$ で適当な減衰条件が課されているとする. いま, 内部領域で渦位がゼロの状況を考える. このとき,

$$\phi(\mathbf{x}, z) = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \hat{\phi}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.29)$$

と展開し, (2.27) から,

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, z) = \hat{\phi}(\mathbf{k}, 0) e^{-kz} \quad (2.30)$$

が得られる. そこで,

$$\phi(\mathbf{x}, z) = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \hat{\phi}(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - kz}, \quad (2.31)$$

である. (2.3) と (2.28) を見比べると,

$$q \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \psi \Leftrightarrow \phi, \quad (2.32)$$

の関係がある. (2.9) (もしくは (2.21)) に対応するものは,

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = -k \hat{\psi}(\mathbf{k}) \quad (2.33)$$

である. 即ち, この系は $\alpha = 1$ の一般化された 2 次元流体系である. なお, この系は 表面準地衡流 (surface quasi-geostrophic: SQG) 系と呼ばれている (Held, *et al*, 1995[12]).

2.4 保存則

一般化された2次元流体系は、非散逸、非強制の場合に

$$\mathcal{M} = \bar{q}, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\overline{\psi q}, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\overline{q^2}, \quad (2.36)$$

という保存量を持つ。ここで、overline は

$$\bar{\bullet} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \bullet \, d\mathbf{x} \quad (2.37)$$

を表す。^{*5} $\alpha = 2$ のとき、 $\mathcal{M}$ は循環 (circulation)、 $\mathcal{E}$ は運動エネルギーで $\mathcal{Q}$ はエンストロフィーである。以下の章でみるように $\mathcal{E}$ 、 $\mathcal{Q}$ は特に重要な物理量である。 $\alpha \neq 2$ のときに $\mathcal{E}$ を一般化エネルギー、 $\mathcal{Q}$ を一般化エンストロフィーもしくは、それぞれ単にエネルギー、エンストロフィーと呼ぶことにする。

3つの量の保存は、(2.3)の移流項自身や、移流項と q の積、移流項と ψ との積の全空間に渡る積分がゼロになること示すことで証明できる。

$\mathcal{M}$ の保存は、 $\mathcal{D} = \mathcal{F} = 0$ となる (2.3) を直接積分して得られる。移流項の全空間 Ω に渡る面積積分は (2.8) と Stokes の定理を利用して、領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ に沿っての線積分、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J(\psi, q) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \{\nabla \times (\psi \nabla q)\} \cdot \mathbf{e}_z \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} (\psi \nabla q) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (2.38)$$

として書ける。周期境界条件や無限平面のとき上記の積分はゼロになる。

エンストロフィーの保存則は (2.3) に q を乗じて全空間 Ω で積分することにより得られる。実際、 $\mathcal{D}$ 、 $\mathcal{F}$ をゼロとした (2.3) に q を掛ける。(2.6)～(2.8) も利用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) &= -q J(\psi, q) = -J \left(\psi, \frac{1}{2} q^2 \right) \\ &= - \left\{ \nabla \times \left(\psi \nabla \frac{1}{2} q^2 \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.39)$$

(2.39) を全空間で積分すると、(2.38) と同様に周期境界条件や無限平面のとき上記の右辺の積分はゼロになる。したがって、エンストロフィーは非粘性保存量である。

^{*5} 本来なら領域平均に書き表したいのだが、係数をきれいな形で残しておくためにはこのような定義がよい。

エネルギーの保存則は, $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ をゼロとした (2.3) に $-\psi$ を掛けて全空間で積分する:

$$-\int_{\Omega} \psi \frac{\partial q}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \psi J(\psi, q) d\mathbf{x}. \quad (2.40)$$

例えば, 領域が矩形領域のときには上式左辺は, Fourier 級数展開と (2.21) を利用して,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\psi \frac{\partial q}{\partial t} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \psi \left\{ (-\Delta)^{\alpha/2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} d\mathbf{x} \\ &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \int_{\Omega} \left(\sum_{\mathbf{m}} \hat{\psi}(\mathbf{m}) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} \right) \left(\sum_{\mathbf{k}} k^{\alpha} \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k})}{\partial t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) d\mathbf{x} \\ &= (2L)^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} k^{\alpha} \hat{\psi}(\mathbf{m}) \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k})}{\partial t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{m}} = (2L)^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{\mathbf{k}} k^{\alpha} \hat{\psi}(-\mathbf{k}) \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k})}{\partial t} \\ &= (2L)^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{\mathbf{k}} k^{\alpha} \hat{\psi}^*(\mathbf{k}) \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k})}{\partial t} = (2L)^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(k^{\alpha} |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \right). \end{aligned}$$

一方, $-\int_{\Omega} \psi q d\mathbf{x}$ も同様に計算すると,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \psi q d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \psi \left\{ (-\Delta)^{\alpha/2} \psi \right\} d\mathbf{x} \\ &= (2L)^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{\mathbf{k}} k^{\alpha} |\psi(\mathbf{k})|^2, \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$-\int_{\Omega} \psi \frac{\partial q}{\partial t} d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} -\frac{1}{2} \psi q d\mathbf{x}$$

である. 領域が無限平面の場合にも同様の関係式が成り立つ. 一方, (2.40) の右辺の被積分関数は $\mathcal{M}$, $\mathcal{Q}$ の保存則の証明のときと同様に, (2.6)~(2.8) を利用すると

$$\psi J(\psi, q) = \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{2} \psi^2 \nabla q \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z \quad (2.41)$$

となる. したがって (2.40) の右辺は, 周期境界条件, 無限平面のときにゼロになる. 以上からエネルギー $\mathcal{E}$ が非粘性保存量であることがわかる.

2.5 波数空間内の支配方程式

矩形領域の場合を仮定し, 場を (2.10), (2.11) のように Fourier 級数で表現したときの支配方程式 (スペクトル形式の支配方程式) を書き下しておく.

(2.10), (2.11) を (2.3) に代入する. (2.3) の時間微分項と移流項はそれぞれ,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial \hat{q}(\mathbf{k})}{\partial t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

188

$$\begin{aligned}
189 \quad J(\psi, q) &= -\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} (l_x m_y - l_y m_x) \hat{\psi}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) e^{i(\mathbf{l}+\mathbf{m}) \cdot \mathbf{x}} \\
190 \quad &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} \frac{(l_x m_y - l_y m_x)}{l^\alpha} \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) e^{i(\mathbf{l}+\mathbf{m}) \cdot \mathbf{x}},
\end{aligned}$$

191 となる．移流は $\mathbf{l}$ と $\mathbf{m}$ を入れ替えて，

$$192 \quad J(\psi, q) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} \frac{(m_x l_y - m_y l_x)}{m^\alpha} \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) e^{i(\mathbf{l}+\mathbf{m}) \cdot \mathbf{x}},$$

193 とも表現できる．二通りの表現を足して2で割ることにより，移流項を $\mathbf{l}$ と $\mathbf{m}$ に関して
 194 対称的な表現に書き下すことができる：

$$\begin{aligned}
195 \quad J(\psi, q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} \left(\frac{1}{l^\alpha} - \frac{1}{m^\alpha}\right) (l_x m_y - l_y m_x) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) e^{i(\mathbf{l}+\mathbf{m}) \cdot \mathbf{x}} \\
196 \quad &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} \frac{(m^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{2l^\alpha m^\alpha} \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) e^{i(\mathbf{l}+\mathbf{m}) \cdot \mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

197 結果の式の両辺に $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ を掛けて全空間で積分することにより，波数空間の支配方程式，

$$198 \quad \frac{\partial \hat{q}(\mathbf{k})}{\partial t} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{2l^\alpha m^\alpha} \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) \delta_{\mathbf{l}+\mathbf{m}, \mathbf{k}} + \hat{\mathcal{D}}(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}),$$

199 (2.42)

200 を得る．ここで， $\hat{\mathcal{D}}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k})$ はそれぞれ散逸項，強制項の Fourier 係数である．

201 のちの便宜のため，(2.42) を流れ関数の Fourier 係数の発展方程式に書き下しておく．
 202 (2.21) を用いれば，それは

$$203 \quad \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k})}{\partial t} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{2k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) \delta_{\mathbf{l}+\mathbf{m}, \mathbf{k}} - \frac{1}{k^\alpha} \left(\hat{\mathcal{D}}(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k})\right),$$

204 (2.43)

205 である．

206 Fourier 成分で書かれた支配方程式の特徴は，移流項は波数が三角形を形成する ($\mathbf{k} =$
 207 $\mathbf{l} + \mathbf{m}$) モードの相互作用になっていることである．このような相互作用は三波相互作用
 208 (triad interaction)*6 と呼ばれる．

*6 ある性質を満たす三つの要素を triad と呼ぶ．ここでは，三角形を形成する三つの波数ベクトルを三波 (triad) と呼ぶ．

領域が無限平面の場合には, (2.42) において, (2.15), (2.16) を用いれば,

$$\frac{\partial \hat{q}(\mathbf{k})}{\partial t} = \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{2l^\alpha m^\alpha} \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) + \hat{D}(\mathbf{k}) + \hat{F}(\mathbf{k}), \quad (2.44)$$

を得る.

2.6 詳細保存則

エネルギースペクトル $E(k)$ とエントロフィースペクトル $Q(k)$ を次のように定義する:

- 矩形領域の場合:

$$\mathcal{E} \equiv \left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_k \left\{ \left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} \frac{1}{2} k'^\alpha |\hat{\psi}(\mathbf{k}')|^2 \right\} = \left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_k E(k), \quad (2.45)$$

$$\mathcal{Q} \equiv \left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_k \left\{ \left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} \frac{1}{2} |\hat{q}(\mathbf{k}')|^2 \right\} = \left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_k Q(k). \quad (2.46)$$

$$\sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} \equiv \sum_{k - \frac{\Delta k}{2} \leq |\mathbf{k}'| < k + \frac{\Delta k}{2}}, \quad \Delta k = \frac{\pi}{L}. \quad (2.47)$$

$$\sum_k = \sum_{[k/\Delta k]=1}^{\infty} \quad (2.48)$$

(2.47) は波数空間において半径が, $k - \Delta k/2$ から $k + \Delta k/2$ の大きさを持った shell についての和をとることを意味する.

- 無限平面の場合:

$$\mathcal{E} \equiv \int_0^\infty \left\{ - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} k^\alpha |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 k d\theta \right\} dk = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{Q} \equiv \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\hat{q}(\mathbf{k})|^2 k d\theta \right\} dk = \int_0^\infty Q(k) dk. \quad (2.50)$$

ここで, θ は波数空間内での角度で, $\tan \theta \equiv k_y/k_x$ で定義される.

各 Fourier モードのエネルギーとエントロフィーの発展方程式を導く. 先ず, エネルギーの発展方程式は, (2.43) に $\hat{q}^*(\mathbf{k}) (= -k^\alpha \hat{\psi}^*(k))$ を掛けたものと, 結果の式の複素共

229 役を足すことにより,

$$\begin{aligned}
 230 \quad \frac{\partial}{\partial t} |k^{\alpha/2} \hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \{ \hat{q}^*(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) + \hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}^*(\mathbf{l}) \hat{q}^*(\mathbf{m}) \} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l} + \mathbf{m}} \\
 231 \quad &\quad - \hat{\psi}^*(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) \right) - \hat{\psi}(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}) \right) \\
 232 \quad &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \{ \hat{q}^*(\mathbf{k}) \hat{q}^*(\mathbf{l}) \hat{q}^*(\mathbf{m}) + \hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) \} \delta_{\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m}, 0} \\
 233 \quad &\quad - \Re \left[2 \hat{\psi}(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}) \right) \right] \\
 234 \quad &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) - \Re \left[2 \hat{\psi}(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}) \right) \right], \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

$$235 \quad T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \equiv \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \Re [\hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m})] \delta_{\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m}, 0}, \tag{2.52}$$

236 を得る. 1 行目から 2 行目の変形には, $\mathbf{l} \rightarrow -\mathbf{l}$, $\mathbf{m} \rightarrow -\mathbf{m}$ を行った. $\Re[\bullet]$ は $\bullet$ の実部
 237 を表す. 一方, エンストロフィースペクトルの発展方程式は, (2.42) に $\hat{q}^*(\mathbf{k})$ を掛けたも
 238 のと, 結果の式の複素共役を足すことにより,

$$\begin{aligned}
 239 \quad \frac{\partial}{\partial t} |\hat{q}(\mathbf{k})|^2 &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \{ \hat{q}^*(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) + \hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}^*(\mathbf{l}) \hat{q}^*(\mathbf{m}) \} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l} + \mathbf{m}} \\
 240 \quad &\quad + \hat{q}^*(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) \right) + \hat{q}(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}) \right) \\
 241 \quad &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \{ \hat{q}^*(\mathbf{k}) \hat{q}^*(\mathbf{l}) \hat{q}^*(\mathbf{m}) + \hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) \} \delta_{\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m}, 0} \\
 242 \quad &\quad + \Re \left[2 \hat{q}(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}) \right) \right] \\
 243 \quad &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + \Re \left[2 \hat{q}(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}) \right) \right], \tag{2.53}
 \end{aligned}$$

$$244 \quad T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \equiv \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \Re [\hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m})] \delta_{\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m}, 0}, \tag{2.54}$$

245 を得る. $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$, $T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ はそれぞれ三波エネルギー伝達関数 (triad energy
 246 transfer function), 三波エンストロフィー伝達関数 (triad enstrophy transfer function)
 247 と呼ばれるもので, $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ のモードを通じての $\mathbf{k}$ のモードへ (もしくはこのモードから)
 248 のエネルギーとエンストロフィーの輸送を表す量である. 両者の間には

$$249 \quad T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = k^\alpha T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \tag{2.55}$$

250 の関係がある. また, 対称性,

$$251 \quad T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{l}), \tag{2.56}$$

$$252 \quad T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{l}), \tag{2.57}$$

を満たす.

非粘性, 非強制のもとでエネルギーとエンストロフィーは $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$ を満たす 3 つの Fourier モード $\hat{q}(\mathbf{k}), \hat{q}(\mathbf{l}), \hat{q}(\mathbf{m})$ 間において個別に保存するという性質がある. これは詳細保存 (detailed conservation) と呼ばれる. 以下ではこれを証明する. 支配方程式 (2.42) において $\{\hat{q}(\pm\mathbf{k}), \hat{q}(\pm\mathbf{l}), \hat{q}(\pm\mathbf{m}) | \mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0\}$ 以外の Fourier モードは全てゼロで, $\hat{D}(\mathbf{k}) = \hat{F}(\mathbf{k}) = 0$ とする. モード $\mathbf{k}$ の三波エネルギー伝達関数は, $((L/\pi)^2$ の factor を除くと)

$$T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \Re [\hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m})]$$

である. 同様に, モード $\mathbf{l}$ の三波エネルギー伝達関数について $\mathbf{k} = -\mathbf{l} - \mathbf{m}$ を用いると

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) &= \frac{(m^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \Re [\hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m})] \\ &= \frac{(m^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \Re [\hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m})], \end{aligned}$$

を得る. モード $\mathbf{m}$ についても同様に,

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) &= \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \Re [\hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m})] \\ &= \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha l^\alpha m^\alpha} \Re [\hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m})] \end{aligned} \quad (2.58)$$

となる. したがって,

$$T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0 \quad (2.59)$$

が成り立つ. 同様に, 上で示した三波エネルギー伝達関数の形から, 三波エンストロフィー伝達関数に関して,

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \\ = k^\alpha T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + l^\alpha T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + m^\alpha T_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

が成り立つことがわかる.

最後にエネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの発展方程式を導く．これらは (2.51), (2.53) の shell による和を取ることにより,

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T_{\mathcal{E}}(k) - D_{\mathcal{E}}(k) + F_{\mathcal{E}}(k), \quad (2.61a)$$

$$T_{\mathcal{E}}(k) = \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}', \mathbf{l}, \mathbf{m}), \quad (2.61b)$$

$$D_{\mathcal{E}}(k) = \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} 2\Re \left[\psi(\mathbf{k}') \hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}') \right], \quad (2.61c)$$

$$F_{\mathcal{E}}(k) = - \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} 2\Re \left[\psi(\mathbf{k}') \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}') \right], \quad (2.61d)$$

$$\frac{\partial Q(k)}{\partial t} = T_{\mathcal{Q}}(k) - D_{\mathcal{Q}}(k) + F_{\mathcal{Q}}(k), \quad (2.62a)$$

$$T_{\mathcal{Q}}(k) = \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}', \mathbf{l}, \mathbf{m}), \quad (2.62b)$$

$$D_{\mathcal{Q}}(k) = - \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} 2\Re \left[q(\mathbf{k}') \hat{\mathcal{D}}^*(\mathbf{k}') \right], \quad (2.62c)$$

$$F_{\mathcal{Q}}(k) = \sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} 2\Re \left[q(\mathbf{k}') \hat{\mathcal{F}}^*(\mathbf{k}') \right], \quad (2.62d)$$

と書ける．ここで, $T_{\mathcal{E}}(k)$, $T_{\mathcal{Q}}(k)$ はそれぞれエネルギー伝達関数, エンストロフィー伝達関数と呼ばれる．

領域が無限平面の場合には, (2.51), (2.53), (2.61), (2.62) において, $\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \rightarrow \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m}$, $\sum_{\mathbf{k}'}^{\text{shell}} \rightarrow \int k d\theta$, $\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ と置き換えればよい．また波数 k を通って低波数側から高波数側に流れるエネルギーとエンストロフィーを表すエネルギー流束 $\Pi_{\mathcal{E}}(k)$ とエンストロフィー流束 $\Pi_{\mathcal{Q}}(k)$,

$$\Pi_{\mathcal{E}}(k) = \int_k^{\infty} T_{\mathcal{E}}(k') dk', \quad (2.63)$$

$$\Pi_{\mathcal{Q}}(k) = \int_k^{\infty} T_{\mathcal{Q}}(k') dk', \quad (2.64)$$

を用いて $E(k)$, $Q(k)$ の発展方程式は

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{\mathcal{E}}(k)}{\partial k} - D_{\mathcal{E}}(k) + F_{\mathcal{E}}(k), \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial Q(k)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{\mathcal{Q}}(k)}{\partial k} - D_{\mathcal{Q}}(k) + F_{\mathcal{Q}}(k), \quad (2.66)$$

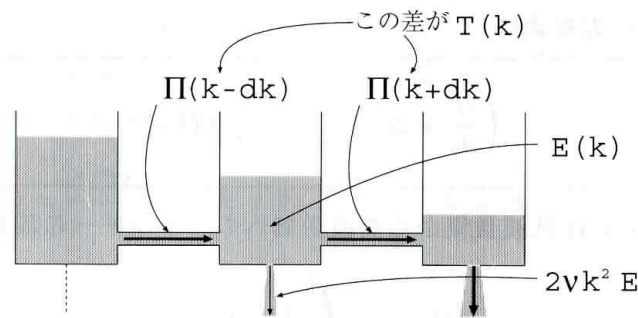


図 2.1 エネルギースペクトルの発展方程式の概念図 (伊賀, 2001)

と書くこともできる. 図 2.1 にエネルギースペクトルの発展方程式の概念図を示す.

エネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの発展方程式を波数空間で積分したものは, それぞれエネルギーとエンストロフィーの発展方程式となる. 前に述べたとおり, エネルギーとエンストロフィーは非粘性, 非強制の場合の保存量であり, また, 伝達関数や流束の勾配は支配方程式の非線型項に起因するものなので, (2.41) の全空間積分と, (2.39) の左辺の全空間積分は, それぞれ

$$\int_0^\infty T_E(k) dk = 0, \quad (2.67)$$

$$\int_0^\infty T_Q(k) dk = 0, \quad (2.68)$$

に対応し, この 2 式と流束の定義 (2.63), (2.64) から

$$\Pi_E(0) = \Pi_E(\infty) = 0, \quad (2.69)$$

$$\Pi_Q(0) = \Pi_Q(\infty) = 0, \quad (2.70)$$

が導かれる. (2.67), (2.68) の性質から, 流束は

$$\Pi_E(k) = - \int_0^k T_E(k') dk', \quad (2.71)$$

$$\Pi_Q(k) = - \int_0^k T_Q(k') dk', \quad (2.72)$$

と表現することもできる.

第 3 章

Green 関数

3.1 はじめに

一般化された 2 次元流体系を特徴づけるのは、渦度と流れ関数の間の運動学的関係式、

$$(-\Delta)^{\alpha/2} \psi = -q, \quad (3.1a)$$

もしくは、Fourier 変換された形で、

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^\alpha \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad (3.1b)$$

である。 $\alpha = 2$ の場合には、(3.1a) は Poisson 方程式であり、渦度が与えられた時、それによって作られる流れ関数の形はよく知られているが、一般の α の場合には、渦度がどのような流れ関数を生成するか、ということに興味をわく。このような問題に対しては、(3.1a) の Green 関数を調べるのが有用であろう。ここで、局在した単位の強さの渦度によって生成される流れ関数を一般化された 2 次元流体系の Green 関数と呼ぶことにする。一般化された 2 次元流体系の Green 関数は Iwayama & Watanabe (2010)[14] で初めて議論された。ここでは Iwayama & Watanabe(2010) に従って一般化された 2 次元流体系の Green 関数とそれから導かれるこの系の性質について紹介する。

本章の目的は 2 つある。一つは、一般化された 2 次元流体系の Green 関数を導出することである。(3.1a) に現れている分数冪 Laplacian の Green 関数は、2 次元のみならず n 次元の場合について Riesz ポテンシャルとして数学的には既に知られている (Riesz, 1949[36])。しかしながら、 n 次元の分数冪 Laplacian の Green 関数の導出は非常に数学的で、関数解析と超関数の知識を必要とする。そこで、ここでは 2 次元の分数冪 Laplacian の Green 関数について、数学的には厳密ではないかもしれないが Fourier 変換を使った導出を紹介する。^{*1}

^{*1} 計算に必要な公式やその導出は付録 A を参照。

もう一つの本章の目的は、全ての α の場合について、物理的に理にかなった一般化された 2 次元流体が存在するかどうか、について議論することである。一般化された 2 次元は、NS 方程式系や SQG 方程式系、CHM-AM 方程式系を含むように数学的に導入されたものである。それ以外の 2 次元流体系でも、一般化された 2 次元流体系の形式に書けるものが存在するかどうか、という疑問は自然に生ずる。このような問題は、今まで議論されてこなかった。そこで、Green 関数を使ってこの問題に対する解答を与えよう、というのが第 2 の目的である。

3.2 定式化

本章では、無限に広い 2 次元平面内の流体運動を考察することにする。Green 関数は単位の強さの点渦によって作られる流れ関数で、一般性を失うことなく、点渦を座標系の原点に置くことにする：

$$q(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y). \quad (3.2)$$

それゆえ、標準的な表記法でここで求める Green 関数は $G^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{0})$ であり、これを単に $G^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ と書く。したがって、今解くべき方程式は、

$$(-\Delta)^{\alpha/2} G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}),$$

もしくは、形式的に、

$$G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -(-\Delta)^{-\alpha/2} \delta(\mathbf{r}),$$

である。位置 $\mathbf{r}_0$ に点渦が存在する場合の Green 関数 $G^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ は、 $G^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ で $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ に置き換えればよい。(3.2) の Fourier 変換^{*2}は $\hat{q}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}$ なので、Green 関数の Fourier 変換を $\hat{G}^{(\alpha)}(\mathbf{k})$ として

$$\hat{G}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{k}|^\alpha}. \quad (3.3)$$

これを逆 Fourier 変換して

$$\begin{aligned} G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \hat{G}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{k}|^\alpha}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

^{*2} 本章の Fourier 変換は、正変換と逆変換が対称的な A.2.1 節の定義を使用する。

を得る. $\hat{G}^{(\alpha)}(\mathbf{k})$ は, $\hat{G}^{(\alpha)}(\mathbf{k})^* = \hat{G}^{(\alpha)}(-\mathbf{k})$ を満足するので, $G^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ は実である. 実空間と波数空間内で極座標を導入し, $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$, $(k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ と変数変換する. このとき, (3.4) は

$$G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr \cos(\theta-\phi)}}{|k|^{\alpha-1}} \quad (3.5)$$

となる. ここで, 現在の問題設定のように点渦の位置を原点にとると Green 関数は等方的なので, 一般性を失うことなく, $\phi = 0$ とおける. $z = \cos \theta$ の変数変換を行う. $dz = -\sin \theta d\theta$ であり, $\theta : 0 \rightarrow \pi$ では $z : 1 \rightarrow -1$, $\sin \theta > 0$ である. 一方, $\theta : \pi \rightarrow 2\pi$ では $z : -1 \rightarrow 1$, $\sin \theta < 0$ であることに注意すると, (3.5) は

$$G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 dz \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikrz}}{|k|^{\alpha-1}} \right\}. \quad (3.6)$$

ここで, $\frac{\cos(krz)}{\sqrt{1-z^2}}$ は z に関して偶関数なので,

$$G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikrz}}{|k|^{\alpha-1}} \right\} \quad (3.7)$$

と書ける.*3

Green 関数が与えられたら, 流れ関数と速度場は,

$$\psi(\mathbf{r}) = \int G^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) q(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{e}_z \times \nabla G^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) q(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad (3.11)$$

$$= - \int \mathbf{e}_z \times \left\{ \nabla_0 G^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right\} q(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad (3.12)$$

から計算される. ここで ∇_0 は変数 $\mathbf{r}_0$ に関する勾配演算子である. 点渦を中心とする周方向の流速 $v_\phi^{(\alpha)}$ は,

$$v_\phi^{(\alpha)} = \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial r}, \quad (3.13)$$

で与えられる.

次節では Green 関数を具体的に計算する. 以下では, n は正の整数, m を自然数とする.

*3 (3.7) において, k と z に関する積分の順序を入れ替えて

$$\begin{aligned} G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^{1-\alpha} \left\{ \int_0^1 \frac{\cos(krz)}{\sqrt{1-z^2}} dz \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k^{1-\alpha} J_0(kr) dk \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} r^{\alpha-2} \int_0^{\infty} \xi^{1-\alpha} J_0(\xi) d\xi \quad (3.9)$$

と 0 次の Bessel 関数 J_0 を用いて表現することも出来る.

3.3 Green 関数の具体例

(3.7) の k による積分には, Fourier 変換の知識を利用する. 代数関数の Fourier 逆変換は, 代数関数の冪の値に依存して 3 つの場合に分類される.

3.3.1 $\alpha \in \mathbb{R}$, ただし $\alpha \neq -2n + 1$, $\alpha \neq 2m$ のとき

$|k|^{-p}$ の逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}\{|k|^{-p}\}$ は $p \in \mathbb{R}$, ただし, $p \neq -2n$, $p \neq 2m - 1$ のときには,

$$\mathcal{F}^{-1}\{|k|^{-p}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \Gamma(1-p) |x|^{p-1}$$

となる (表 A.1 参照). なお, Gamma 関数の公式 ((A.16)=(A.18)) を利用すると

$$\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \Gamma(1-p) = \frac{\Gamma(\frac{1+p}{2})\Gamma(\frac{1-p}{2})}{2\Gamma(p)} \quad (3.14)$$

と表現できる. そこで,

$$\mathcal{F}^{-1}\{|k|^{-p}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-p} e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1+p}{2})\Gamma(\frac{1-p}{2})}{2\Gamma(p)} |x|^{p-1} \quad (3.15)$$

したがって, $p = \alpha - 1$ とした (3.15) を使って, (3.7) は $\alpha \in \mathbb{R}$, ただし, $\alpha \neq -2n + 1$, $\alpha \neq 2m$ のとき,

$$\begin{aligned} G^{(\alpha)}(r) &= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\alpha-1)} \left\{ \int_0^1 dz \frac{z^{\alpha-2}}{\sqrt{1-z^2}} \right\} r^{\alpha-2} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\alpha-1)} \right\} \times \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \right\} r^{\alpha-2} \\ &= -\frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\alpha-1)} r^{\alpha-2} \\ &= -\frac{1}{2^\alpha \pi} \frac{\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} r^{\alpha-2} \\ &\equiv \Psi(\alpha) r^{\alpha-2}, \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\Psi(\alpha) \equiv -\frac{1}{2^\alpha \pi} \frac{\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}, \quad (3.16b)$$

となる. (3.16a) の第 1 式の z に関する積分には $p = \alpha - 1$, $q = 2$ とした (A.12) を用い, 第 3 式から第 4 式の変形には $p = (\alpha - 1)/2$ とした Gamma 関数の倍数公式 (A.10) を利用した.

具体的な α の値が与えられた時, $\Psi(\alpha)$ を計算するには, (3.16b) は Gamma 関数の関係式を使って別の表現に書き換えておくと便利である. Gamma 関数は解析接続によって負の独立変数を持つ場合に拡張することが出来るが, Gamma 関数の独立変数が正となる場合の表現を使うと, 具体的な $\Psi(\alpha)$ の計算に便利である. (3.16b) の Gamma 関数の独立変数が負になるのは $\alpha < 0$ もしくは $\alpha > 2$ の場合である. これらの場合には, $p = \alpha/2$ となる Gamma 関数の公式 (A.15) を用いて, Gamma 関数が正の変数を持つように書き直しておく:

$$\Psi(\alpha) = -\frac{1}{2^\alpha \pi^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) \right\}^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (\alpha < 0), \quad (3.17)$$

$$\Psi(\alpha) = -\frac{1}{2^\alpha \left\{ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}}, \quad (\alpha > 2). \quad (3.18)$$

(3.16b) は $0 < \alpha < 2$ の場合, (3.17) は $\alpha < 0$ の場合, (3.18) は $\alpha > 2$ の場合に便利な表現である.

3.3.2 $\alpha = -2n + 1$ のとき

$|k|^p$ の逆 Fourier 変換は $p = 2n$ の時には表 A.1 より

$$\mathcal{F}^{-1} \{ |k|^{2n} \} = (-1)^n \sqrt{2\pi} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \delta(x)$$

である. したがって, (3.7) は $\alpha = -2n + 1$ のとき

$$\begin{aligned} G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{d^{2n}}{d(rz)^{2n}} \delta(rz) dz, \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right) \delta(rz) dz \right\} r^{-2n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi} \left[\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right]_{z=0} r^{-2n-1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{\pi^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \right\}^2 r^{-2n-1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで, 2 番目の式変形では部分積分を行い, 最後の式変形には (A.47) を利用した. なお, 係数 $\Psi(\alpha)$ に (3.17) を用いた (3.16a) は $\alpha = -2n + 1$ の時に (3.19) と等しいことがわかる. そこで, 前小節の結果は $\alpha \in \mathbb{R}$, (ただし, $\alpha \neq 2m$) に対して成り立つ表式であることがわかる.

表面準地衡流系は $\alpha = 1$ の一般化された 2 次元乱流系である. (3.16a), (3.16b) において $\alpha = 1$ を代入すると

$$G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi r} \quad (3.20)$$

426 となる. この結果は, Held *et al.*(1995)[12] で述べられている結果と一致している.

427 3.3.3 $\alpha = 2m$ の場合

428 $|k|^p$ の逆 Fourier 変換は $p = -2m + 1$ の時には表 A.1 より

$$429 \quad \mathcal{F} \{ |k|^{-2m+1} \} = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|x|^{2m-2}}{\Gamma(2m-1)} (\ln |x| + C)$$

430 である. ここで, C は任意定数である. したがって, (3.7) は $\alpha = 2m$ のとき

$$431 \quad G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 \Gamma(2m-1)} \int_0^1 \frac{|rz|^{2m-2}}{\sqrt{1-z^2}} (\ln |rz| + C) dz$$

$$432 \quad = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 \Gamma(2m-1)} \left\{ \left(\int_0^1 \frac{z^{2m-2}}{\sqrt{1-z^2}} dz \right) (\ln r + C) + \int_0^1 \frac{z^{2m-2} \ln z}{\sqrt{1-z^2}} dz \right\} r^{2m-2}.$$

433 最後の表式の 1 番目の積分は, 3.3.1 節と同様に $p = 2m - 1$, $q = 2$ となる (A.12) を用い
434 て Gamma 関数で表現できる:

$$435 \quad \int_0^1 \frac{z^{2m-2}}{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{2m-1}{2})}{2\Gamma(m)}.$$

436 一方, 2 番目の積分は負の値を持つ. なぜならば, 積分区間で被積分関数が負値であるからである. しかし, その具体的な値ここでは必要ない.*4 なぜならば, この積分の値は
437 任意定数 C に吸収することが出来るからである. したがって, $p = (2m - 1)/2$ となる
438 Gamma 関数の倍数公式 (A.10) を用いて,
439

$$440 \quad G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^{m+1} r^{2m-2}}{\pi^2 \Gamma(2m-1)} \times \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{2m-1}{2})}{2\Gamma(m)} (\ln r + C)$$

$$441 \quad = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m-1} \pi \{\Gamma(m)\}^2} r^{2m-2} (\ln r + C). \quad (3.21)$$

442 もしくは, α を使って表現すると,

$$443 \quad G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \Psi_L(\alpha) r^{\alpha-2} (\ln r + C), \quad (3.22a)$$

$$444 \quad \Psi_L(\alpha) = \frac{(-1)^{(\alpha+2)/2}}{2^{\alpha-1} \pi \{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\}^2}, \quad (3.22b)$$

445 となる.

*4 この積分は, $m = 1, 2$ の時には解析解が知られている. m が大きくなるにつれ, この積分の値は大きくなりゼロに近づいていく. 詳しくは A.3 節を参照.

Euler 方程式から導かれる渦度方程式は $\alpha = 2$ に対応する. (3.22) において $\alpha = 2$ を代入すると,

$$G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln r + C, \quad (3.23)$$

となり, よく知られた結果に帰着される.

3.3.4 $\alpha = 0$ の系

この系では, (3.1b) によると, $\hat{q}(\mathbf{k}) = -\hat{\psi}(\mathbf{k})$, 即ち, $q(\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$ となる. つまり Green 関数は, 2 次元のデルタ関数 $G^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -\delta(x)\delta(y)$ になる. なお, $q = -\psi$ のとき $J(\psi, q) = 0$ なので, この系は非粘性の場合には $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ となり, q は時間発展しない.

3.3.5 係数 $\Psi(\alpha)$, $\Psi_L(\alpha)$ の具体的な値

$-3 \leq \alpha \leq 7$ の範囲内で, Green 関数が r の冪乗則を持つ場合の係数 $\Psi(\alpha)$ を図 3.1 に示す. $\Psi(1) = -\frac{1}{2\pi}$, $\Psi(-1) = \Psi(3) = \frac{1}{2\pi}$ である. また, $\Psi(\alpha)$ は $\alpha \rightarrow 2m$ において発散する. $4 \lesssim \alpha$ では $\alpha = 2n + 2$ を除いて, $\Psi(\alpha)$ はほぼゼロである. (例えば, $\Psi(5) = \frac{1}{18\pi}$, $\Psi(7) = \frac{1}{450\pi}$.) 一方, $\alpha < 0$ に対しては, $\alpha = -2n$ において $\Psi(\alpha)$ はゼロとなる. $\Psi(\alpha)$ が発散する α の値では, Green 関数は (3.16a) のように r の冪乗のみでなく, 対数による補正が現れる.

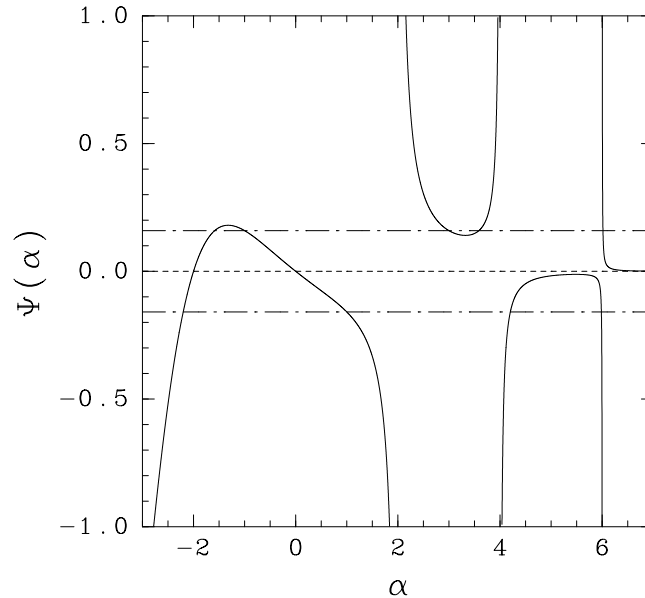


図 3.1 係数 $\Psi(\alpha)$ の α 依存性. 破線は 0, 一点鎖線は, $\pm \frac{1}{2\pi}$ を表す. $\alpha = 2, 4, 6$ において $\Psi(\alpha)$ は発散する. $\alpha = -1, 1, 3$ で $|\Psi(\alpha)| = \frac{1}{2\pi}$ の値を持つ.

460

461 一方, (3.22b) で与えられる $\Psi_L(\alpha)$ の値を, 図 3.2 に示す. $\Psi_L(\alpha)$ の値は $\alpha = 2$ で最大
 値 $\frac{1}{2\pi}$ をとり, α の増大とともに正負に振動しながら 0 に漸近していく.

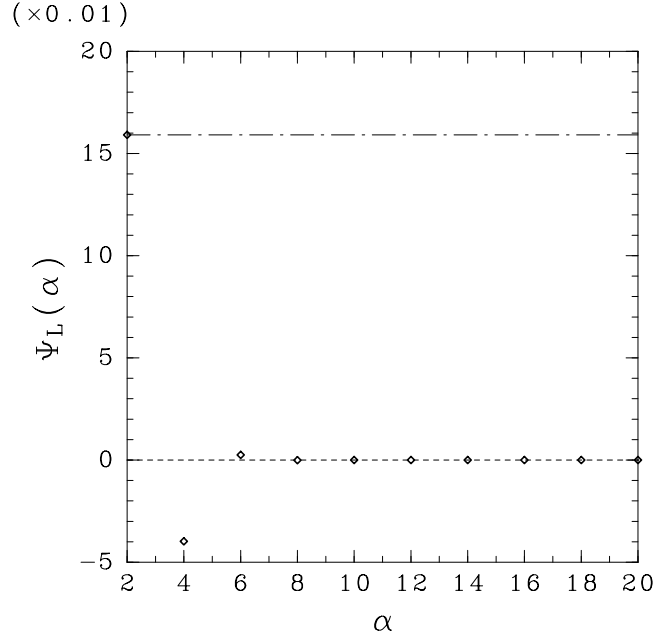


図 3.2 係数 $\Psi_L(\alpha)$ の α 依存性. 破線は 0, 一点鎖線は $\frac{1}{2\pi}$ を表す.

462

463 3.3.6 まとめ

464 点渦が $\mathbf{r}_0$ にあるとき, 一般化された 2 次元流体系の Green 関数は,

$$465 \quad G^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \Psi(\alpha) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{\alpha-2}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \text{ただし}, \alpha \neq 0, 2m) \quad (3.24a)$$

$$466 \quad \Psi(\alpha) = \begin{cases} -\frac{1}{2^\alpha \pi^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) \right\}^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}, & (\alpha < 0) \\ -\frac{1}{2^\alpha \pi} \frac{\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}, & (0 < \alpha < 2) \\ -\frac{1}{2^\alpha \left\{ \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \right\}^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}}, & (2 < \alpha) \end{cases} \quad (3.24b)$$

467 で与えられる. (3.24) で与えられる関数は Riesz ポテンシャルと呼ばれる. 一方, $\alpha = 2m$
 468 では対数の補正項が現れる:

$$469 \quad G^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \Psi_L(\alpha) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{\alpha-2} (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + C), \quad (3.25a)$$

$$470 \quad \Psi_L(\alpha) = \frac{(-1)^{(\alpha+2)/2}}{2^{\alpha-1} \pi \left\{ \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \right\}^2}. \quad (3.25b)$$

471 ここで, C は任意定数である.

3.4 点渦を中心とした周方向の速度

点源を中心とする周方向の速度場 $v_\phi^{(\alpha)}$ を求める. 先ず, $\alpha \neq 2m$ のとき, (3.13), (3.16a) より

$$v_\phi^{(\alpha)} = (\alpha - 2)\Psi(\alpha)r^{\alpha-3} \quad (3.26)$$

で表される. 特に $0 < \alpha < 2$ のときには (3.26) の係数は

$$\begin{aligned} (\alpha - 2)\Psi(\alpha) &= \frac{1}{2^{\alpha-1}\pi} \frac{\frac{2-\alpha}{2}\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{1}{2^{\alpha-1}\pi} \frac{\Gamma(\frac{2-\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \end{aligned} \quad (3.27)$$

と表現できる. $\alpha = 1, 3$ の時には, (3.26) は $\frac{1}{2\pi}$ の値を持つことがわかる.

一方, $\alpha = 2m$ のとき, (3.13), (3.22) より

$$v_\phi^{(\alpha)} = \Psi_L(\alpha)r^{\alpha-3} + (\alpha - 2)\Psi_L(\alpha)r^{\alpha-3} \{\ln r + C\} \quad (3.28)$$

となる. ここで, C は再び任意定数である. $\alpha = 2$ のとき, $v_\phi^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi r}$ であるが, 一方, (3.26), (3.27) で与えられる速度もこれと一致する. つまり, (3.26), (3.27) で与えられる速度は, $\alpha \in \mathbb{R}, (\alpha \neq 2m + 2)$ に対して成立する.

$-3 \leq \alpha \leq 7$ の範囲内で, $(\alpha - 2)\Psi(\alpha)$ を図 3.3 に示す. 先に述べたように, $\alpha = 1, 2, 3$ のときには $(\alpha - 2)\Psi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$ となり, $1 \lesssim \alpha \lesssim 3$ の範囲においてはこの係数はほぼ $\frac{1}{2\pi}$ の値を持っている.

3.5 議論

3.5.1 α に対する制約

前節までに求めた一般化された 2 次元流体系の Green 関数や, それから計算された点渦の周りの流速を用いてこの系の存在について議論する. 3.1 節で述べたように, 現在までに知られている α 乱流系は $\alpha = -2, 1, 2$ である. 自然界において他の α の値を持った方程式 (2.1), (2.9) で支配される現象が存在するかどうか興味深い. (3.26) によると, $\alpha > 3$ の時には渦の周りの周方向の速度は渦からの距離が大きくなるにつれて, 大きくなることを示している. これは物理的には奇妙である. なぜならば, 流れ場の源である点渦からの距離が遠くなるに従い, その影響は減少するか (悪くても一定に保たれる) はずである. それゆえ, 物理的に理にかなった一般化された 2 次元流体は, $\alpha \leq 3$ のときにのみ存在することが結論される.

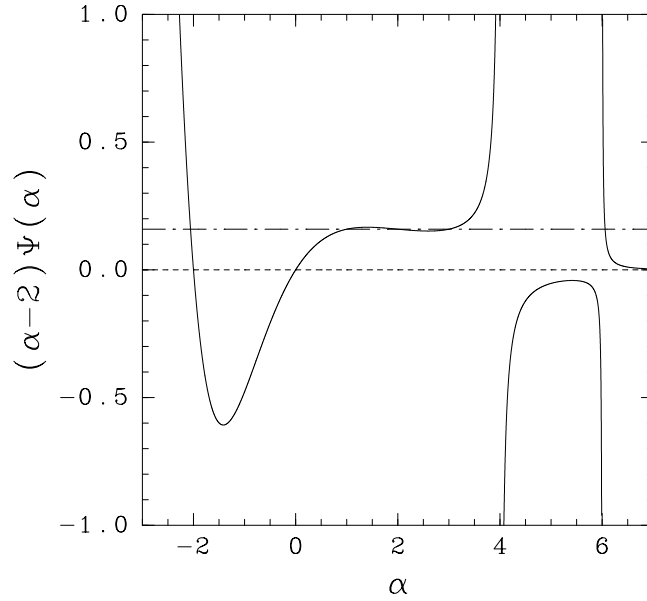


図 3.3 係数 $(\alpha - 2)\Psi(\alpha)$ の α 依存性. 一点鎖線は $\frac{1}{2\pi}$ の線. $\alpha = 4, 6$ において 係数は発散する.

さらに, $\alpha = 2m + 2$ のとき^{*5}には, (3.28) によると, 速度場には任意定数 C が含まれることになる. 任意定数 C はこの問題の中では決定できない. よく行われる $r \rightarrow 0$ という境界条件を要請しても C は決定できない. この点でも $\alpha > 3$ の系が奇妙で, 非物理的であることがわかる.

3.5.2 非等方な一般化された 2 次元流体系について

最後に, 上で展開した議論の一つの応用として次の系における Green 関数と系の物理的実在性について議論する:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, q \right) = \mathcal{D} + \mathcal{F}, \quad (3.29a)$$

$$\hat{q}(\mathbf{k}, t) = -|\mathbf{k}|^\alpha \hat{\varphi}(\mathbf{k}, t), \quad (3.29b)$$

上の系は, (2.1), (2.9) の非等方拡張版とみなすことができる. この方程式系は Plandtle 数が非常に大きい場合の 2 次元 Boussinesq 流体の熱対流に関する支配方程式, もしくは地球の電離層の E 層, F 層の 2 次元低周波数プラズマの力学を記述する方程式として知られている. 例えば, Gruzinov *et al.*(1996) [11] や Weinstein *et al.*(1989) [44] は, それぞれ $\alpha = 2, 4$ となる (3.29) を研究している. ここで以下の点に注意しておく. Weinstein *et al.*(1989) によって研究された系は, しばしば $\alpha = 3$ となる (2.1) と (2.9) であると誤

*5 この値は $\alpha \geq 4$

解されている (Schorghofer, 2000[37]; Tran, 2004[41]) . Weinstein *et al.*(1989) によって研究された系は, 非等方性が重要であるので, 等方的な (2.1) の特別な場合と考えることができない. (3.29) における y 方向は, 基本状態の温度の勾配の方向もしくは基本状態の電子密度の勾配の方向である. (3.29) にとって y 方向に領域の境界が必要であるが, 我々ここでは無限の平面内における (3.29) を考えることにする. 前節までに展開された議論を用いると (3.29) に関する Green 関数を計算することができる. q のデルタ関数的な分布に対応する物理量 φ は 3.3 節で導いた Green 関数である. それゆえ, (3.29) の Green 関数 $G_{\text{AI}}^{(\alpha)}$ は, (3.1a) の Green 関数の x に関する偏微分で与えられる. 即ち $G_{\text{AI}}^{(\alpha)} = \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial x}$. このとき $\alpha = \pm 2n$ を除いて, (3.29) の Green 関数は (点渦が原点に存在しているとしたとき)

$$G_{\text{AI}}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = (\alpha - 2)\Psi(\alpha)xr^{\alpha-4} \quad (3.30)$$

によって与えられる. さらに, (3.30) に伴う速度の x, y 成分はそれぞれ

$$u = -\frac{\partial G_{\text{AI}}^{(\alpha)}}{\partial y} = -(\alpha - 2)(\alpha - 4)\Psi(\alpha)xyr^{\alpha-6}, \quad (3.31a)$$

$$v = \frac{\partial G_{\text{AI}}^{(\alpha)}}{\partial x} = (\alpha - 2)\Psi(\alpha)r^{\alpha-4} \left\{ 1 + (\alpha - 4)\frac{x^2}{r^2} \right\}, \quad (3.31b)$$

である. 方程式 (3.31b) は y 方向の速度 v は $\alpha > 4$ のときに, r の増加関数になっていることを示している. それゆえ, 我々は (3.29) の物理的に理にかなった系は $\alpha \leq 4$ であるべきであると結論する. なぜならば v は速度場の源からの単調増加関数になるべきではないからである.

上で述べた結論を熱力学方程式 (この方程式は, q を温度と解釈したときの (2.1) と同じ形を持つ) と (通常の意味での) 渦度方程式,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + J(\psi, \Delta\psi) = -\tilde{\alpha}g\frac{\partial q}{\partial x} - \nu_p(-\Delta)^p(\Delta\psi), \quad (3.32)$$

で構成される Boussinesq 流体の 2 次元熱対流に関する支配方程式を用いて解釈してみる. ここで, $\Delta\psi$ は (速度の回転という意味の) 渦度で, $\tilde{\alpha}$ は熱膨張率, g は重力加速度, p は超粘性の次数, ν_p は p 次の超粘性係数である. (3.32) の慣性項が無視されるとき, 即ち, Reynolds 数が低いとき, もし $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \psi$ で定義される関数 φ を導入するならば, 適当な無次元化とともに, (2.1) と (3.32) は $\alpha = 2(p+1)$ となる (3.29) に書き下すことができる. それゆえ (3.29) を低 Reynolds 数における 2 次元熱対流の支配方程式と解釈することができる. 上で述べたように超粘性の次数 p はパラメータ α に関係する; 通常の拡散型の粘性 ($p = 1$) は $\alpha = 4$ に対応し, $p > 1$ の超粘性では $\alpha > 4$ に対応する. 超粘性はしばしば数値シミュレーションにおいて低い解像度で高い Reynolds 数を実現させるときにしば

544 しば利用される．さらに超粘性は高 Reynolds 数の粘性を物理的にモデリングするときに
545 適当な手法であろう．それゆえ $\alpha > 4$ となる (3.29a) は, 低 Reynolds 数における 2 次元
546 熱対流の力学を超粘性を用いて記述するものであるので物理的に不適切である．

第 4 章

2 次元乱流の現象論

乱流の統計的性質は、境界条件や乱流の駆動方法によって強く影響を受けるであろう。そこで境界条件や乱流の駆動方法に依存しない普遍的な乱流の統計法則が存在するかどうか定かではない。しかしながら Kolmogorov(1941)[16], (以降 K41 と略記する) は、境界から十分離れていてしかも乱流の小さいスケールに注目するならば、普遍的な乱流の統計法則が存在することを主張した。ここでは、はじめに 2 次元乱流から一度離れて、3 次元乱流の K41 理論を紹介する。次にその考えを 2 次元乱流に適用した Kraichnan (1967)[21] の理論、及びその修正について紹介する。

4.1 K41 理論

これは一様等方性乱流の理論の中でもっとも有名なものである。K41 理論と呼ばれているものは、実際は速度の 2 次の構造関数を次元解析的に予測するものと (Kolmogorov, 1941)*¹と運動エネルギースペクトルを次元解析的に予測するもの (Obukhov, 1941[29]) を指している。しばしば Kolmogorov-Obukhov 理論と呼ばれる。ここでは Fourier 空間内の K41 理論を紹介する。

流体を波数 k_i の近傍の狭い帯域にエネルギーを一定の割合 ϵ_i で注入することにより駆動し、統計的に定常な乱流状態を実現しているものとする。 k_i 近傍で注入されたエネルギーは小さい渦に分割されていき、最後に粘性によって ϵ_d の割合で熱に変換される。このようなプロセスを小さいスケールへのエネルギーカスケードと呼ぶ。エネルギーが注入

*¹ ある点 $\mathbf{x}$ における速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ とそこから $\mathbf{r}$ だけ離れた点での速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)$ との差 $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ の 2 次のモーメント

$$D(r) = \langle |\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \quad (4.1)$$

に対して、 $D(r) \sim \epsilon r^{2/3}$ を導いたのが Kolmogorov (1941) である。速度差相関関数とエネルギースペクトルの関係を考慮すると $E(k) \sim k^{-5/3}$ が導かれる。

566 されるスケールから、エネルギーが散逸されるスケールまで、流体要素はいくつもの変形
 567 の過程を経ることにより、初期に持っていた位置や形、運動量などの様々な記憶を失い、そ
 568 の結果乱流の巨視的なスケールによらない統計的に一様で等方的な普遍的平衡状態が実現
 569 されると期待される (図 4.1, 4.2 参照).^{*2} そこで Kolmogorov(1941) は 2 つの仮説を立
 570 てた.

571 **Kolmogorov の第 1 仮説** : 十分高い Reynolds 数において、局所的に一様かつ等方性が
 572 成り立つような十分小さなスケールでは、乱流の統計量はエネルギー散逸率 ϵ^{*3} と
 573 粘性係数 ν によって一意に決定される.

574 第一仮説より、 ϵ (次元は $[\epsilon] = L^2/T^3$) と ν ($[\nu] = L^2/T$) を使って、長さ、速度、時間の
 575 次元をもつ量を次元解析により作ると、

$$576 \quad \mathcal{L} = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad (4.2)$$

$$577 \quad \mathcal{V} = (\epsilon\nu)^{1/4}, \quad (4.3)$$

$$578 \quad \mathcal{T} = (\nu/\epsilon)^{1/2}, \quad (4.4)$$

579 と表され、それぞれ Kolmogorov の長さ、Kolmogorov の速度、Kolmogorov の時間、これ
 580 らを総称して Kolmogorov スケールと呼ばれる. (4.2), (4.3) を使って Reynolds 数を計
 581 算すると

$$582 \quad Re = \frac{\mathcal{V}\mathcal{L}}{\nu} = 1 \quad (4.5)$$

583 となる. Reynolds 数は慣性項と粘性項の比なので、つまり Kolmogorov スケールでは粘
 584 性項と非線型項が丁度釣り合うスケールであることがわかる. このことから、 $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{T}$
 585 は乱流における最も小さいスケールと見なすことができる.

586 乱流を力学系とみなした時に、その自由度は、エネルギー保持領域のスケール (energy
 587 containing scale)^{*4} L と Kolmogorov の長さ $\mathcal{L}$ との比、と見積もられている. この時、

$$588 \quad \frac{L}{\mathcal{L}} = \frac{L\epsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} = \frac{L}{\nu^{3/4}} \left(\frac{u^3}{L} \right)^{1/4} = \left(\frac{uL}{\nu} \right)^{3/4} = Re^{3/4} \quad (4.6)$$

589 となる. つまり、乱流の自由度は空間 1 次元あたりおおよそ Reynolds 数の $3/4$ 乗になる.
 590 一方、エネルギースペクトル $E(k)$ ($[E(k)] = L^3/T^2$) を次元解析によって表現すると、

$$591 \quad E(k) = \epsilon^{1/4} \nu^{5/4} f(k/k_d) \quad (4.7)$$

^{*2} 統計的平衡状態ではエネルギー注入率とエネルギー散逸率は等しくなる. $\epsilon \equiv \epsilon_i = \epsilon_d$ とおく.

^{*3} 統計的定常状態では、 $\epsilon \equiv \epsilon_i = \epsilon_d$ である.

^{*4} エネルギースペクトルがピークをもつ波数の逆数. 図 1.2 における $1/k_E$.

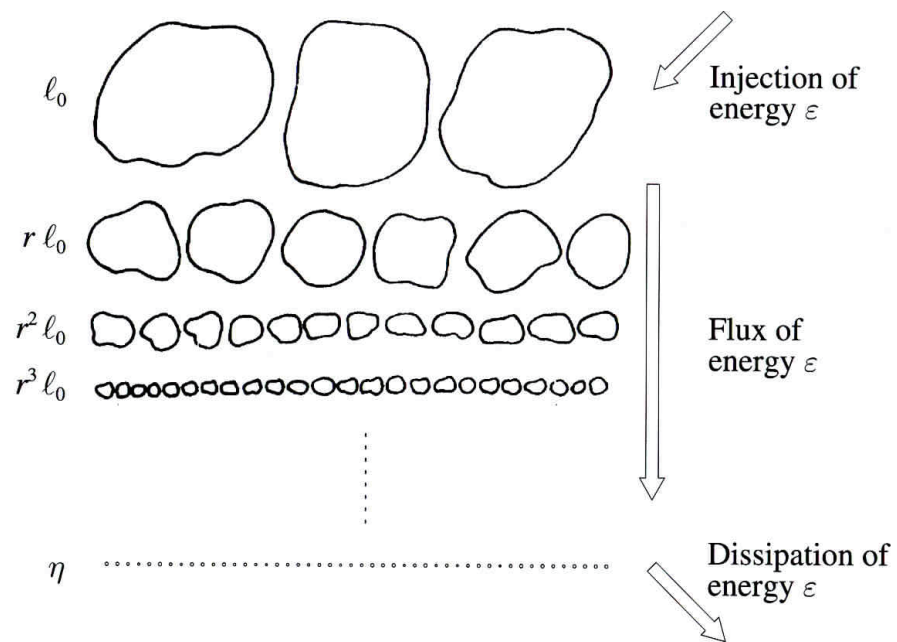


図 4.1 エネルギーカスケードの概念図 (Frisch, 1995)[9]

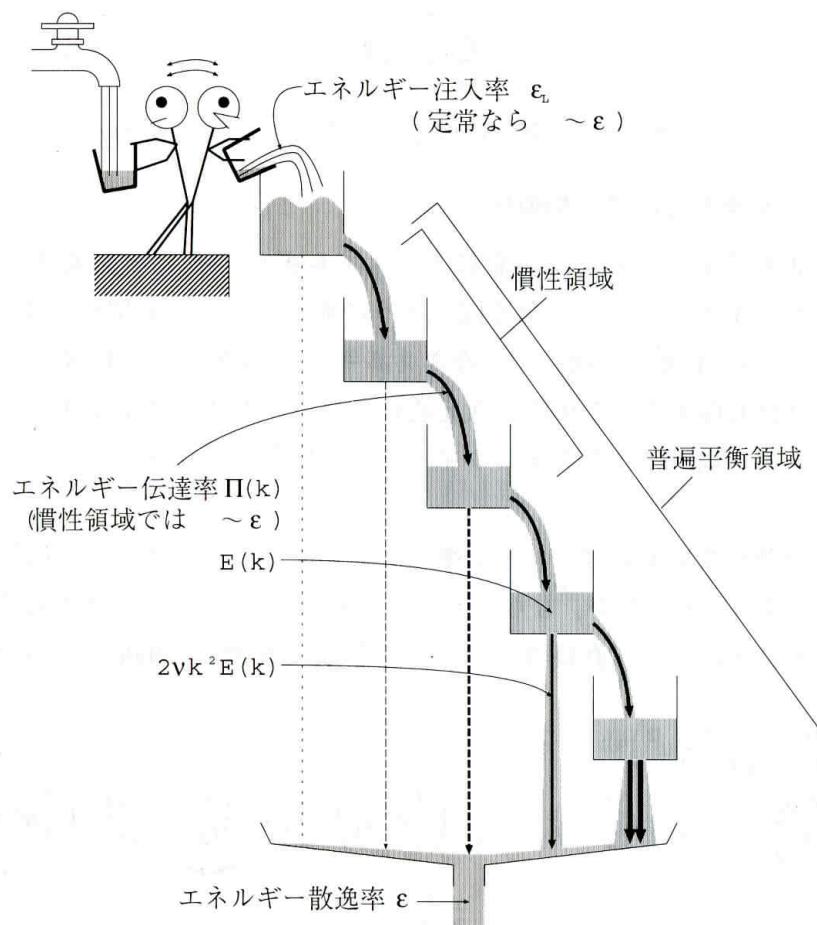


図 4.2 エネルギーカスケードの概念図 (伊賀, 2001)

となる．ここで、 f は無次元のある普遍的な関数で、 $k_d \equiv \mathcal{L}^{-1}$ は Kolmogorov 波数と呼ばれる．(4.7) が成り立つ領域は普遍平衡領域と呼ばれる．

Kolmogorov の第 2 仮説 : $\mathcal{L}$ より十分に大きなスケールでは乱流の統計量は ϵ によって決まり ν に依存しない．

第 2 仮説から (4.7) において $k \ll k_d$ のとき ν に依存しないためには $f(x) \sim x^{-5/3}$ でなければならず、したがって

$$E(k) = K\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (4.8)$$

と表される． K は Kolmogorov 定数と呼ばれ、風洞実験などにより $K = 1.62 \pm 0.17$ と見積もられている (Sreenivasan, 1995[40])．(4.8) が成り立つ領域は慣性領域と呼ばれる．

上の議論と等価であるもう少し直観的な方法が、渦回転時間 (eddy turnover time) τ_k を導入することである．渦回転時間 τ_k とは、空間スケールが $1/k$ で速度 v_k を持った流体粒子が距離 $1/k$ だけ動く時間である．次元解析によると、

$$[v_k] = [\mathcal{E}] \sim \{kE(k)\}^{1/2}$$

と表されるので、

$$\tau_k = \frac{k^{-1}}{v_k} \sim \{k^3 E(k)\}^{-1/2} \quad (4.9)$$

である．Kolmogorov の仮説は、

$$\epsilon \sim \frac{v_k^2}{\tau_k} = \frac{kE(k)}{\tau_k} \quad (4.10)$$

ととることと等価である． ϵ が定数であり、(4.9) を (4.10) に代入すると再び (4.8) を得る．

4.2 2次元乱流の慣性領域

前節で紹介した K41 理論は、非線型相互作用によってエネルギーが波数空間内で保存的に配分されることに基づいているので空間の次元によらない．そこで、前節の議論は 2 次元でも 3 次元でも成り立つ議論である．一方、2 次元 Navier–Stokes 乱流では、エネルギーのほかにエントロフィーも保存量である．そこで、前節の議論でエネルギーをエントロフィーに置き換えた議論もできるはずである．系を駆動する外力や粘性に依存せず、エントロフィー散逸率（エントロフィー輸送率）で特徴づけられる波数領域をエントロフィー慣性領域と呼ぶ．2 次元 NS 乱流においてエネルギーとエントロフィーの 2 つ

の慣性領域, エネルギースペクトルがそれぞれの慣性領域で $k^{-5/3}$ と k^{-3} となる, が存在することを指摘したのが Kraichnan (1967) である. Leith (1968)[23] も 2 つの慣性領域が存在することを示し, また Batchelor (1969)[2] は減衰性 2 次元 NS 乱流におけるエネルギースペクトルの相似則や k^{-3} 則を導出した. これらの 2 次元乱流の古典的理論は KLB 理論と呼ばれる.

一般化された 2 次元された流体でも, (一般化) エネルギーと (一般化) エンストロフィーの 2 つの非粘性保存量が存在するので, 2 つの慣性領域が存在する. この説では一般化された 2 次元流体の乱流状態 (α 乱流) のエネルギーとエンストロフィーの 2 つの慣性領域における波数スペクトルの波数依存性を導く.

4.2.1 エネルギー慣性領域

渦度 q , 流れ関数 ψ の次元は, それぞれ,

$$[q] = L^{2-\alpha}T^{-1}, \quad (4.11)$$

$$[\psi] = L^2T^{-1}, \quad (4.12)$$

である. エネルギーの次元は,

$$[\mathcal{E}] = [\psi q] = L^{4-\alpha}T^{-2}, \quad (4.13)$$

なので, エネルギースペクトル $E(k)$ の次元は,

$$[E(k)] = [L\mathcal{E}] = L^{5-\alpha}T^{-2}, \quad (4.14)$$

である. (4.14) から eddy turnover time をエネルギースペクトルと波数を使って表現すると,

$$\tau_k \sim \{k^{5-\alpha}E(k)\}^{-1/2}, \quad (4.15)$$

である. 以上の準備のもと エネルギー散逸率 ϵ は,

$$\begin{aligned} \epsilon &\sim \frac{kE(k)}{\tau_k} \\ &= C_\alpha \frac{kE(k)}{\{k^{5-\alpha}E(k)\}^{-1/2}} \\ &= C_\alpha k^{(7-\alpha)/2} E(k)^{3/2}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

と表現できる. C_α は無次元の定数である. 慣性領域ではエネルギー散逸率は波数に依存しない定数なので, (4.16) を $E(k)$ について解いて,

$$E(k) = K_\alpha \epsilon^{2/3} k^{-(7-\alpha)/3}, \quad (4.17)$$

646 を得る.*5

647 幾つかの代表的な α の値におけるエネルギースペクトルの形を調べておく.

648 • $\alpha = 2$ のとき: (4.17) は

$$649 \quad E(k) = K_2 \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (4.18)$$

650 となり, (4.8) のエネルギースペクトルの波数依存性を再び得る.

651 • $\alpha = 1$ のとき: (4.17) は

$$652 \quad E(k) = K_1 \epsilon^{2/3} k^{-2}. \quad (4.19)$$

653 • $\alpha = -2$ のとき: (4.17) は

$$654 \quad E(k) = K_{-2} \epsilon^{2/3} k^{-3}. \quad (4.20)$$

655 4.2.2 エンストロフィー慣性領域

656 エンストロフィーも非粘性保存量であるので, エネルギーをエンストロフィーに置き換
657 えて前小節と同じ議論を行ってみる.

658 エンストロフィーの次元は

$$659 \quad [\mathcal{Q}] = [q^2] = L^{4-2\alpha} T^{-2} \quad (4.21)$$

660 なので, エンストロフィースペクトル $Q(k)$ の次元は

$$661 \quad [Q(k)] = [L\mathcal{Q}] = L^{5-2\alpha} T^{-2} \quad (4.22)$$

662 である. (4.22) から eddy turnover time をエンストロフィースペクトルと波数を使って
663 表現すると,

$$664 \quad \tau_k \sim \{k^{5-2\alpha} Q(k)\}^{-1/2} \quad (4.23)$$

665 である. 以上の準備のもと エンストロフィー散逸率 η は,

$$\begin{aligned} 666 \quad \eta &\sim \frac{kQ(k)}{\tau_k} \\ 667 \quad &= C'_\alpha \frac{kQ(k)}{\{k^{5-2\alpha} Q(k)\}^{-1/2}} \\ 668 \quad &= C'_\alpha k^{(7-2\alpha)/2} Q(k)^{3/2}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

*5 $K_\alpha = C_\alpha^{-2/3}$ とおいた.

と表現できる. C'_α は無次元の定数である. 慣性領域ではエンストロフィー散逸率は波数に依存しない定数なので, (4.24) を $Q(k)$ について解いて,

$$Q(k) = K'_\alpha \eta^{2/3} k^{-(7-2\alpha)/3}, \quad (4.25)$$

を得る.*6

幾つかの代表的な α の値におけるエンストロフィースペクトルの形を調べておく. エネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの関係式

$$E(k) = k^{-\alpha} Q(k)$$

を用いて, エネルギースペクトルの形も併記しておく.*7

● $\alpha = 2$ のとき: (4.25) は

$$Q(k) = K'_2 \eta^{2/3} k^{-1}, \quad (4.27)$$

$$E(k) = K'_2 \eta^{2/3} k^{-3}, \quad (4.28)$$

となる. (4.28) が Kraichnan (1967), Leith(1968) によって導かれた NS 乱流のエンストロフィー慣性領域のエネルギースペクトルとして有名な k^{-3} のスケールリング則である.

● $\alpha = 1$ のとき: (4.25) は

$$Q(k) = K'_1 \eta^{2/3} k^{-5/3}. \quad (4.29)$$

$$E(k) = K'_1 \eta^{2/3} k^{-8/3}. \quad (4.30)$$

$\alpha = 1$ のときにはエンストロフィーが速度の 2 乗の次元を持つのでエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルが K41 のスペクトルと同じ指数をもつ.

● $\alpha = -2$ のとき: (4.25) は

$$Q(k) = K'_{-2} \eta^{2/3} k^{-11/3}. \quad (4.31)$$

$$E(k) = K'_{-2} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (4.32)$$

*6 $K'_\alpha = C'^{-2/3}_\alpha$ とおいた.

*7 (4.25) から

$$E(k) = K'_\alpha \eta^{2/3} k^{-(7+\alpha)/3} \quad (4.26)$$

となる.

4.3 非局所相互作用

流体力学の基礎方程式の非線型相互作用は、波数ベクトルが三角形を形成するような3つのモード間の相互作用になっていることを2.5節で述べた。三角形を形成する3つの波数ベクトル $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$, ($\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$) は、2つのカテゴリーに分解することができる。一つは、3つの波数ベクトルの大きさ k, l, m がほぼ同じ程度の場合、 $k \simeq l \simeq m$, である。これを局所相互作用と呼ぶ。もう一つのカテゴリーは k, l, m のうち、一つの波数ベクトルの大きさがそれ以外の2つの波数ベクトルの大きさよりも非常に小さい場合である (例えば, $k \ll l \simeq m$)。この場合を非局所相互作用と呼ぶ。^{*8}

エネルギーやエントロフィーのカスケードが、上で述べたどの様な相互作用によって生じているのか、に興味をわく。K41理論はエネルギーカスケードが局所相互作用によって起こっていることを示唆している。それは注目する波数 k における物理量のみで記述されているからである。

K41の議論は局所相互作用の考え方と物理的に無矛盾であることが以下に示すようにわかる。渦回転時間 (4.15) に (4.17) を代入すると、

$$\begin{aligned}\tau_k &\sim \{k^{5-\alpha} E(k)\}^{-1/2} \\ &\sim \left\{k^{5-\alpha} \epsilon^{2/3} k^{-(7-\alpha)/3}\right\}^{-1/2} \\ &\sim \epsilon^{-1/3} k^{-(4-\alpha)/3}\end{aligned}\tag{4.33}$$

を得る。 $\alpha < 4$ のときには渦回転時間、もしくは渦の特徴的な時間スケールが波数の負冪になっているので、空間スケールが長い (波数が小さい) と時間スケールも長いことになり、物理的に辻つまが合っている。つまり、 $\alpha = 2$ のNS系で展開されたKolmogorovの理論は局所相互作用の仮定と矛盾しない。また3章で示したように、物理的に理にかなった2次元流体系は $\alpha \leq 3$ なので、一般化された2次元流体でもエネルギー慣性領域は局所相互作用の考えと矛盾しないことになる。

一方、2次元NS乱流のエントロフィー慣性領域では波数空間の局所性が保障されないことがわかる。上と同様に渦回転時間の表現 (4.23) に (4.25) の結果を代入してみる:

$$\begin{aligned}\tau_k &\sim \{k^{5-2\alpha} Q(k)\}^{-1/2} \\ &\sim \left\{k^{5-2\alpha} \eta^{2/3} k^{-(7-2\alpha)/3}\right\}^{-1/2} \\ &\sim \eta^{-1/3} k^{-2(2-\alpha)/3}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

^{*8} 2つの波数ベクトルの大きさが同じ程度で、もう1つの波数ベクトルの大きさよりも極めて小さい場合 $k \simeq l \ll m$ は存在できないことに注意。

(4.34) は $\alpha < 2$ であれば 渦回転時間は波数の負冪になり、空間スケールが短くなるにつれて時間スケールも短くなるが、 $\alpha > 2$ のときには τ_k は空間スケールが短ければ時間スケールが長くなることを意味し、物理的に不合理である。 $\alpha = 2$ の NS 系はちょうどその臨界点 (渦回転時間に波数依存性、空間依存性がない) にあたることになる。もし $\tau(k)$ が k ではなく別の空間スケール (もしくは波数) に依存するならば、

$$\eta \sim \frac{kQ(k)}{\tau_k} \implies Q(k) \sim \eta \tau_k k^{-1} \quad (4.35)$$

となって、エンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルは k^{-1} に飽和するはずである。実際に Pierrehumbert *et al.* (1994) によって行われた数値実験によると $\alpha < 2$ では、エンストロフィースペクトルは (4.25) で与えられるが、 $\alpha > 2$ では k^{-1} になっていることを示している。このことは、K41 理論をそのまま適用したエンストロフィー慣性領域の議論を再度考え直す必要があることを示している。

4.4 エンストロフィー慣性領域の再考察

波数空間の非局所相互作用により NS 乱流のエンストロフィー慣性領域のスペクトルが修正を受けることを指摘したのが Kraichnan (1971)[20] である。Kraichnan (1971) の議論を整理した Bowman (1996)[3] の方法を使って $\alpha = 2$ で転移する一般化された 2 次元流体におけるエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルの一般形を導いたのが Watanabe & Iwayama (2004)[42] である。ここでは Watanabe & Iwayama (2004) の議論を紹介する。

非局所相互作用を取り込めるように渦回転時間を積分によって

$$\tau_k = \left\{ \int_{k_1}^k k'^{4-2\alpha} Q(k') dk' \right\}^{-1/2} \quad (4.36)$$

と表す。^{*9} ここで、 k_1 はエンストロフィー慣性領域の最低波数である。このとき、(4.24) は

$$\eta = C'_\alpha k Q(k) \left\{ \int_{k_1}^k k'^{4-2\alpha} Q(k') dk' \right\}^{1/2} \quad (4.37)$$

^{*9} カスケードは流れによって流体粒子が変形され、その大きさを変えることにより起こる。流れ場は、並進、収束・発散、回転、ずれの 4 つの運動に分解できることが知られている (Helmholtz の基本定理と呼ばれる。付録 B 節参照)。このうち、並進や回転は流体の変形を伴わない。また収束・発散は、非圧縮性流体ではゼロである。変形を特徴付ける物理量は 歪速度 (rate of strain) である。歪速度は、(速度に回転演算子を作用させた) 渦度と同じ次元を持ち、歪速度の大きさの 2 乗のスペクトルは、($\alpha = 2$ の) エンストロフィースペクトルと等しい。そこで、渦回転時間 (4.36) は波数 k に働く歪速度の大きさと解釈することもできる。

742 となる. ここで C'_α は定数である. エンストロフィー慣性領域では η が定数であること,
743 また

$$744 \quad f(k) = kQ(k) \quad (4.38)$$

745 とおくと, (4.37) は f に関する微分方程式

$$746 \quad \frac{d}{dk} f^{-3} = \frac{3C'^2_\alpha}{2\eta^2} k^{3-2\alpha} \quad (4.39)$$

747 に書き直せる.*¹⁰ (4.39) を k に関して k_1 から k まで積分すると,

$$748 \quad Q(k) = K'_\alpha \eta^{2/3} k^{-(7-2\alpha)/3} [\chi_\alpha(k)]^{-1/3}, \quad (4.42a)$$

$$749 \quad \chi_\alpha(k) = \frac{1}{4-2\alpha} \left\{ 1 - \delta_\alpha \left(\frac{k_1}{k} \right)^{4-2\alpha} \right\}, \quad (4.42b)$$

$$750 \quad \delta_\alpha \equiv 1 - (4-2\alpha)\chi_+, \quad (4.42c)$$

$$751 \quad \chi_+ \equiv \frac{2\eta^2}{3C'^2_\alpha} \{k_1^{2\alpha-7} Q(k_1)^{-3}\}, \quad (4.42d)$$

752 を得る.*¹¹ (4.25) と (4.42a) を見比べると, (4.25) に $\{\chi_\alpha(k)\}^{-1/3}$ の補正が加わったこ
753 とがわかる.

754 慣性領域の深い波数帯域 $k_1 \ll k$ で (4.42b) がどのような波数依存性を持つか調べてみる.

755 • $\alpha < 2$ のとき :

756 $k_1 \ll k$ では $(k_1/k)^{4-2\alpha} \rightarrow 0$ となるので,

$$757 \quad \chi_\alpha(k) = \frac{1}{4-2\alpha} \quad (4.43)$$

758 となって補正項は波数依存性を持たず,

$$759 \quad Q(k) = K''_\alpha \eta^{2/3} k^{-(7-2\alpha)/3}, \quad (4.44)$$

760 を再び得る.*¹²

*¹⁰ (4.38) の表現を用い, (4.37) の両辺を 2 乗してから k で微分すると,

$$\frac{1}{f^2} \frac{d}{dk} f = -\frac{1}{2} \left\{ \int_{k_1}^k k'^{3-2\alpha} f(k') dk' \right\}^{-1} k^{3-2\alpha} \quad (4.40)$$

を得る. $\{\bullet\}$ の部分は, (4.37) を再び用いて

$$\left\{ \int_{k_1}^k k'^{3-2\alpha} f(k') dk' \right\} = \frac{\eta^2}{C'^2_\alpha f^2} \quad (4.41)$$

と書ける. (4.41) を (4.40) に代入して整理すると, (4.39) を得る.

*¹¹ $K'_\alpha \equiv \left(\frac{2}{3C'^2_\alpha} \right)^{1/3}$ とおいた.

*¹² $K''_\alpha \equiv (4-2\alpha)^{1/3} K'_\alpha$.

• $\alpha > 2$ のとき :

$k_1 \ll k$ では $(k_1/k)^{4-2\alpha} \gg 1$ となるので, (4.42b) の右辺括弧内の第 2 項が卓越する. このとき補正項は

$$\chi_\alpha(k) = \frac{1}{2\alpha - 4} \delta_\alpha \left(\frac{k_1}{k} \right)^{4-2\alpha} \quad (4.45)$$

となり,

$$\begin{aligned} Q(k) &= K'_\alpha \eta^{2/3} k^{-(7-2\alpha)/3} \times \left\{ \frac{1}{2\alpha - 4} \delta_\alpha \left(\frac{k_1}{k} \right)^{4-2\alpha} \right\}^{-1/3} \\ &= K'''_\alpha \eta^{2/3} k^{-1} \end{aligned} \quad (4.46)$$

を得る. *13 つまり, (4.35) で導いたスペクトルが得られる.

• $\alpha = 2$ のとき :

$4 - 2\alpha = 0$ となるので, (4.42b) は分母分子がゼロになるので, L'Hospital の定理により分母分子を α でそれぞれ微分し, $\alpha = 2$ ととる. この操作により

$$\chi_2(k) = \ln \left(\frac{k}{k_1} \right) + \chi_+ \quad (4.47)$$

となり,

$$Q(k) = K'_2 \eta^{2/3} k^{-1} \left[\ln \left(\frac{k}{k_1} \right) + \chi_+ \right]^{-1/3} \quad (4.48)$$

を得る. つまり (4.27) に対数補正が現れる. NS ($\alpha = 2$) におけるエンストロフィー慣性領域のスペクトルに対数補正が現れることは, Kraichnan (1971) によって導かれたが, そのスペクトルは (4.48) における χ_+ の項が含まれていなかったの
で, $k = k_1$ でスペクトルが発散する形式になっていた. Bowman (1996) が上記の方法で $k = k_1$ でも発散しない形式のスペクトルを導出した.

4.5 数値実験による検証

前節までに得られた強制散逸 α 乱流のスペクトルの数値実験による検証を示す. 図 4.3 と図 4.4 は, エンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトル, エネルギー慣性領域におけるエネルギー Spektrum である.

*13 $K'''_\alpha \equiv K'_\alpha \left(\frac{2\alpha-4}{\delta_\alpha k_1^{4-2\alpha}} \right)^{1/3}$ とおいた.

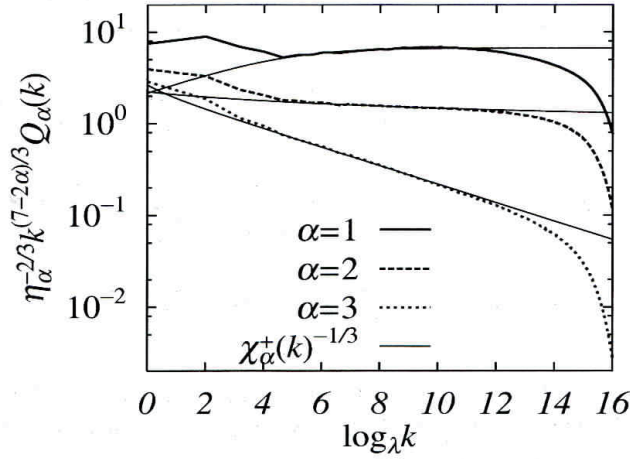


図 4.3 数値実験によって得られたエントロフィー慣性領域のエントロフィースペクトル (Watanabe & Iwayama, 2007[43])

図 4.3 に示されている通りエントロフィー慣性領域では、非局所相互作用を取り入れたスペクトルの一般的な形、(4.42) が成り立っていることがわかる。一方、エネルギー慣性領域に関しては $\alpha < 5/2$ に対しては (4.17) が成り立っているが、 $\alpha \geq 5/2$ では (4.17) による予想からずれている。この点については 7.3.1 節で議論することにする。

4.6 注意

2次元乱流では2つの慣性領域が存在することを見てきた。しかしながら、これらの慣性領域が同時に存在するのか、それとも片方だけ存在するのかは説明できていない。Kraichnan (1967) の論文では、エネルギーフラックスやエントロフィーフラックスの方向を議論して、2つの慣性領域が同時に存在できることを示している。そのような議論は、7章で行う。次の章では、エネルギーやエントロフィーの波数空間内での輸送方向を簡単な議論から見積もる Fjørtoft の定理とそれに関連する話題を紹介する。

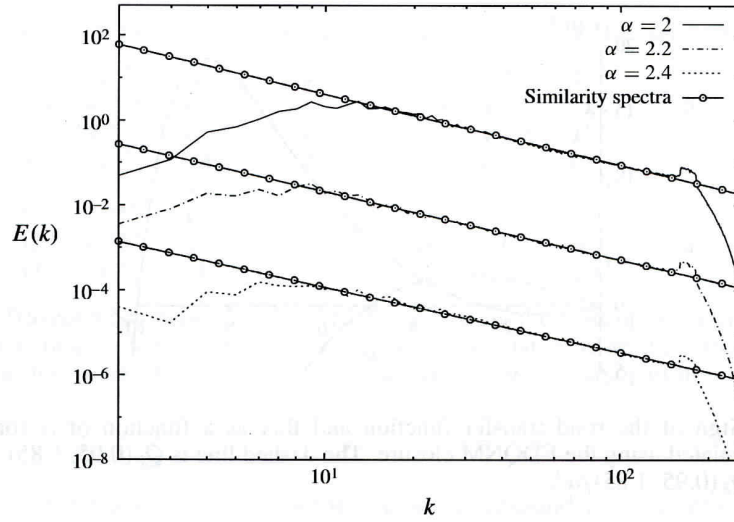


FIGURE 9. Energy spectra averaged over 10 consecutive time steps in the inverse cascade for $\alpha = 2$ (solid), $\alpha = 2.2$ (dash-dot) and $\alpha = 2.4$ (dotted) with KLB spectra fits.

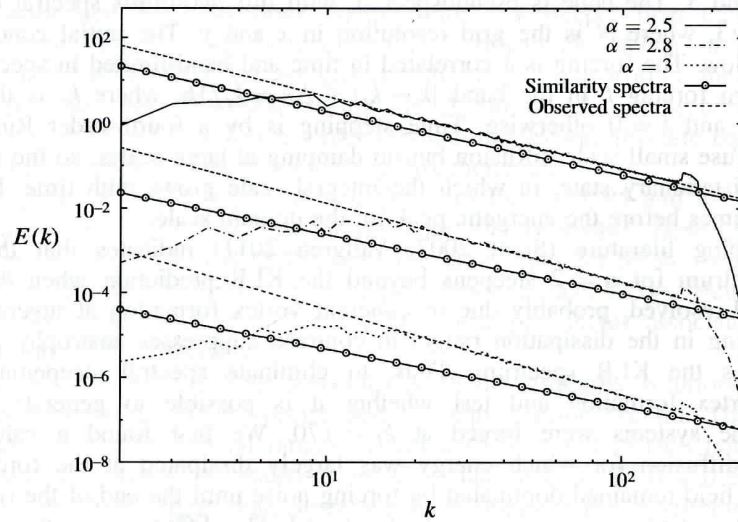


FIGURE 10. Energy spectra averaged over 10 consecutive time steps in the inverse cascade for $\alpha = 2.5$ (solid), $\alpha = 2.8$ (dash-dot) and $\alpha = 3$ (dotted) with linear fits and KLB spectra for contrast. The slopes of the linear fits are -1.7 ($\alpha = 2.5$), -1.86 ($\alpha = 2.8$) and -2.0 ($\alpha = 3$).

図 4.4 数値実験によって得られたエネルギー慣性領域のエネルギースペクトル (Burgess & Shepherd, 2013[4])

第 5 章

二重カスケード過程

2次元乱流における二重カスケード過程 (エネルギーは低波数側へ, エンストロフィーは高波数側へと同時にカスケードする) に関する理論的研究について紹介する. 二重カスケード過程の証明として, エネルギーとエンストロフィーの両方を保存する三波相互作用を考察した Fjørtoft(1953)[7] が有名で, しばしば Fjørtoft の定理として参照される. しかしながら, 彼の仕事には誤りがあることが指摘されている. Fjørtoft (1953) の誤りを修正し, それを精密化したのは Merilees & Warn (1975)[27] である. さらにこれを α 乱流系に拡張したのは 藤崎 (2003)*¹ と Burgess & Shepherd (2013) である. しかしながら, 三波相互作用に基づく議論は二重カスケード過程の証明として充分ではない. 強制散逸乱流における二重カスケード過程の満足のいく証明は, 最近 Gkioulekas & Tung (2007)[10] によって与えられた. これは Euler 系のみならず, α 乱流系にも適用できるものである. 一方, 減衰性乱流の場合には, エネルギーの低波数側へのカスケード (エネルギーアップワードカスケード) については, Euler 系での Rhines (1979)[35] の証明を, Scott (2001)[38], Gkioulekas & Tung (2007) が粘性を含む場合に拡張した. しかしながら, エンストロフィーの高波数側へのカスケード (エンストロフィーダウンワードカスケード) の証明はまだ成功していない. 本章では, 三波相互作用に基づく議論として Burgess & Shepherd(2013) の研究を, 強制乱流の場合における Gkioulekas & Tung (2007) の研究, 減衰性乱流における Scott (2001), Gkioulekas & Tung (2007) を α 乱流に拡張した議論を紹介する.

*¹ 藤崎真弓: 「一般化された 2 次元乱流のスペクトル特性に関する研究」, 神戸大学 大学院自然科学研究科, 修士論文, pp.60.

5.1 三波相互作用に基づく議論

2.6 節と同様に, $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$ となるモードを考える. 一般性を失うことなく,

$$k \leq l \leq m \quad (5.1)$$

とする. 中間スケールのモードと大きいスケールのモードとのエネルギー交換率,

$$X_{\mathcal{E}} \equiv -\frac{T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})}{T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k})} \quad (5.2)$$

を定義する. 同様に, 中間スケールのモードと小さいスケールのモードとのエネルギー交換率,

$$Y_{\mathcal{E}} \equiv -\frac{T_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l})}{T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k})} \quad (5.3)$$

を定義する. エンストロフィーの交換率に対しても同様の量が定義できる:

$$X_{\mathcal{Q}} \equiv -\frac{T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})}{T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k})} = \frac{k^{\alpha}}{l^{\alpha}} X_{\mathcal{E}} \quad (5.4)$$

$$Y_{\mathcal{Q}} \equiv -\frac{T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l})}{T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k})} = \frac{m^{\alpha}}{l^{\alpha}} Y_{\mathcal{E}} \quad (5.5)$$

エネルギーの詳細保存 (2.59) を $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$ で割ることにより,

$$Y_{\mathcal{E}} = 1 - X_{\mathcal{E}} \quad (5.6)$$

を得る. 同様にエンストロフィー詳細保存 (2.60) の 2 番目の表式を $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$ で割ることにより,

$$k^{\alpha} X_{\mathcal{E}} - l^{\alpha} + m^{\alpha} Y_{\mathcal{E}} = 0 \quad (5.7)$$

を得る. (5.7) に (5.6) を代入して

$$X_{\mathcal{E}} = \frac{m^{\alpha} - l^{\alpha}}{m^{\alpha} - k^{\alpha}} \quad (5.8)$$

を得る. また,

$$Y_{\mathcal{E}} = 1 - X_{\mathcal{E}} = \frac{l^{\alpha} - k^{\alpha}}{m^{\alpha} - k^{\alpha}} \quad (5.9)$$

となる. (5.8), (5.9) の分母は, $m^{\alpha} - k^{\alpha} > 0$ であり, 分子は $m^{\alpha} - l^{\alpha} > 0$, $l^{\alpha} - k^{\alpha} > 0$ なので, $X_{\mathcal{E}} > 0$, $Y_{\mathcal{E}} > 0$ が導かれる. 即ち, $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ と $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ は同符号で, 一方, これらは $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$ とは異符号である. 即ち,

- エネルギーは大きい波数, 小さい波数から中間の波数に向けて輸送される (図 5.1 左図参照).

もしくは,

- エネルギーは中間の波数から大きい波数, 小さい波数へに向けて輸送される (図 5.1 右図参照).

のいずれかである. 同様のことがエンストロフィーの輸送に対しても成り立つ.

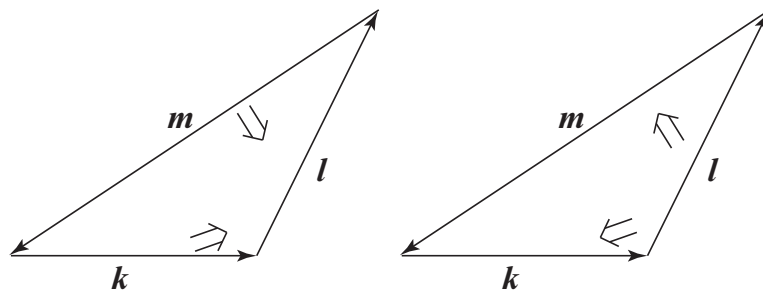


図 5.1 $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$, $k < l < m$ を満たすモード間でのエネルギーやエンストロフィーの輸送. $\Leftarrow$ がエネルギーやエンストロフィーの輸送される方向を表す.

$\alpha = 2$ の Euler 系に関してはこのことは, Fjørtoft (1953) によって初めて導かれた. Fjørtoft (1953) の議論をもう少し紹介する. 以下 $\alpha = 2$ とする. Fjørtoft(1953) はさらに,

$$\frac{l}{k} = 2, \frac{m}{l} = 2 \quad (5.10)$$

と波数の相対的な大きさを指定して, エネルギーやエンストロフィーの交換率を議論している. (5.10) を (5.8) と (5.4) に代入すると, $X_E = 4/5$ と $X_Q = 1/5$ が得られる. つまり, エネルギーに関しては大きなスケールとの交換率が, 小さなスケールとの交換率よりも大きく, 一方でエンストロフィーに関しては, 小さなスケールとの交換が大きなスケールとの交換よりも大きいことになる. このことはエネルギーは大きなスケールへ, エンストロフィーは小さなスケールへ輸送されることを意味し, しばしば二重カスケード過程の証明として引き合いに出される. しかしながら, (5.10) で大きさが指定される 3 つの波数ベクトルは, $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$ となる三角形を形成できない. エネルギーやエンストロフィーの交換率を具体的に調べるには, 三波の絶対的な大きさではなく, その形にも注目する必要がある.

再び, 一般の α に戻って三波の絶対的な大きさではなく, その形に注目する. 以下では三波の形に対するエネルギー, エンストロフィー輸送の依存性を調べることにする. 中間

860 のスケールの波数で三波の波数を規格化する:

$$861 \quad v \equiv \frac{k}{l}, \quad w \equiv \frac{m}{l}. \quad (5.11)$$

862 (5.1) より, $0 < v < 1, 1 < w < 1 + v$ である. $v \ll 1$ を非局所三波 (nonlocal triad) と
863 呼ぶことにする. $X_{\mathcal{E}}$ と $Y_{\mathcal{E}}$ の比, $X_{\mathcal{Q}}$ と $Y_{\mathcal{Q}}$ の比 をそれぞれ $S_{\mathcal{E}}, S_{\mathcal{Q}}$ と定義する:

$$864 \quad S_{\mathcal{E}} \equiv \frac{X_{\mathcal{E}}}{Y_{\mathcal{E}}}, \quad S_{\mathcal{Q}} \equiv \frac{X_{\mathcal{Q}}}{Y_{\mathcal{Q}}}. \quad (5.12)$$

865 $S_{\mathcal{E}} > 1, S_{\mathcal{Q}} > 1$ はそれぞれより大きなエネルギー, エンストロフィーを低波数モードと
866 交換することを意味し, $S_{\mathcal{E}} < 1, S_{\mathcal{Q}} < 1$ はそれぞれより大きなエネルギー, エンストロ
867 フィーを高波数モードと交換することを意味する. (5.8), (5.9) より,

$$\begin{aligned} 868 \quad S_{\mathcal{E}} &= \frac{m^{\alpha} - l^{\alpha}}{l^{\alpha} - k^{\alpha}} \\ 869 \quad &= \frac{|\mathbf{l} + \mathbf{k}|^{\alpha} - l^{\alpha}}{l^{\alpha} - k^{\alpha}} \\ 870 \quad &= \frac{(l^2 + k^2 + 2kl \cos \phi)^{\alpha/2} - l^{\alpha}}{l^{\alpha} - k^{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

871 を得る. ここで ϕ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ との成す角である. (5.1) から, $S_{\mathcal{E}} > 0$ である. l^{α} で分母, 分
872 子を割ることにより

$$873 \quad S_{\mathcal{E}} = \frac{(v^2 + 2v \cos \phi + 1)^{\alpha/2} - 1}{1 - v^{\alpha}} \quad (5.14)$$

874 を得る. $S_{\mathcal{E}} > 0$ の条件から

$$875 \quad \cos \phi > -\frac{v}{2} \quad (5.15)$$

876 となる. これは 三波 の性質によって決まるので α の値に依存しないことを注意しておく.

877 $\mathbf{l}$ を x 軸の方向に一致させて, $\mathbf{k}$ がとりうる範囲を図示する (図 5.2). 波数空間を
878 $(k_x/l, k_y/l)$ とする. $0 \leq v \leq 1$ なので, $\mathbf{k}/l$ は波数空間で原点を中心とする半径 1 の
879 円内,

$$880 \quad (k_x/l)^2 + (k_y/l)^2 \leq 1, \quad (5.16)$$

881 に存在しなければならない. また, 波数空間の座標 $(k_x/l, k_y/l)$ で (5.15) を書き換えると,

$$\begin{aligned} 882 \quad & \frac{k_x/l}{\sqrt{(k_x/l)^2 + (k_y/l)^2}} > -\frac{\sqrt{(k_x/l)^2 + (k_y/l)^2}}{2} \\ 883 \quad \Rightarrow & \{(k_x/l)^2 + 1\}^2 + (k_y/l)^2 > 1, \end{aligned} \quad (5.17)$$

を得る. (5.17) は $(-1, 0)$ を中心とする半径 1 の円の外側の領域である. つまり, 波数ベクトル $\mathbf{k}$ は三波の性質から (5.16), (5.17) を同時に満たす波数空間内の領域に存在しなければならない. (図 5.2 の太線で囲われた三日月形の領域.)

次に, $S_{\mathcal{E}} \geq 1$ を分離する臨界曲線を求める. $S_{\mathcal{E}} = 1$ として

$$(v_c^2 + 2v_c \cos \phi + 1)^{\alpha/2} = 2 - v_c^{\alpha} \quad (5.18)$$

が得られる. (5.18) の根 v_c が $S_{\mathcal{E}} \geq 1$ を分ける臨界曲線である. 具体的な α の値における v_c は, $\alpha = 1, 2$ のときに書き下すことができる: $\alpha = 1$ のとき,

$$v_c = \frac{3}{2 \cos \phi + 4}, \quad (5.19)$$

$\alpha = 2$ のとき,

$$v_c = \frac{-\cos \phi + \sqrt{\cos^2 \phi + 2}}{2} \quad (5.20)$$

となる. 一般の α では Newton 法によって (5.18) を解く. $\alpha = 1, 2, 3$ のときの臨界曲線を図 5.2 の左に示す. $S_{\mathcal{E}} < 1$ となる領域は, 臨界曲線の左側である. α の増大とともに, $S_{\mathcal{E}} > 1$ の領域が広がっていくことがわかる. 即ち, 中間の波数から高波数, 低波数へエネルギーが輸送されると仮定すると, α が大きくなるにつれて低波数へより大きなエネルギーを輸送する traid が相対的に増えていくことを意味する.

同様にして, エンストロフィーに関して

$$\begin{aligned} S_Q &= \frac{k^{\alpha} X_{\mathcal{E}}}{m^{\alpha} Y_{\mathcal{E}}} = \frac{k^{\alpha}}{m^{\alpha}} S_{\mathcal{E}} \\ &= \frac{k^{\alpha}}{(k^2 + l^2 + 2kl \cos \phi)^{\alpha/2}} \frac{(v^2 + 2v \cos \phi + 1)^{\alpha/2} - 1}{1 - v^{\alpha}} \\ &= \left(\frac{v^2}{v^2 + 2v \cos \phi + 1} \right)^{\alpha/2} \frac{(v^2 + 2v \cos \phi + 1)^{\alpha/2} - 1}{1 - v^{\alpha}}. \end{aligned}$$

したがって, $S_Q = 1$ の臨界曲線は

$$1 = \left(\frac{v_c^2}{v_c^2 + 2v_c \cos \phi + 1} \right)^{\alpha/2} \frac{(v_c^2 + 2v_c \cos \phi + 1)^{\alpha/2} - 1}{1 - v_c^{\alpha}}. \quad (5.21)$$

の根として決まる. 臨界曲線を図 5.2 の右に示す. 中間の波数から高波数, 低波数へエンストロフィーが輸送されると仮定すると, α が大きくなるにつれて低波数へより大きなエンストロフィーを輸送する traid が相対的に減っていくことを示している.

図 5.2 を見ると, 三波は 3 つの種類に分類できることがわかる. $S_{\mathcal{E}}, S_Q$ が共に 1 以上, これらが 1 未満, $S_{\mathcal{E}} > 1, S_Q < 1$ の 3 種類である. これらの三波の割合の α 依存性を示

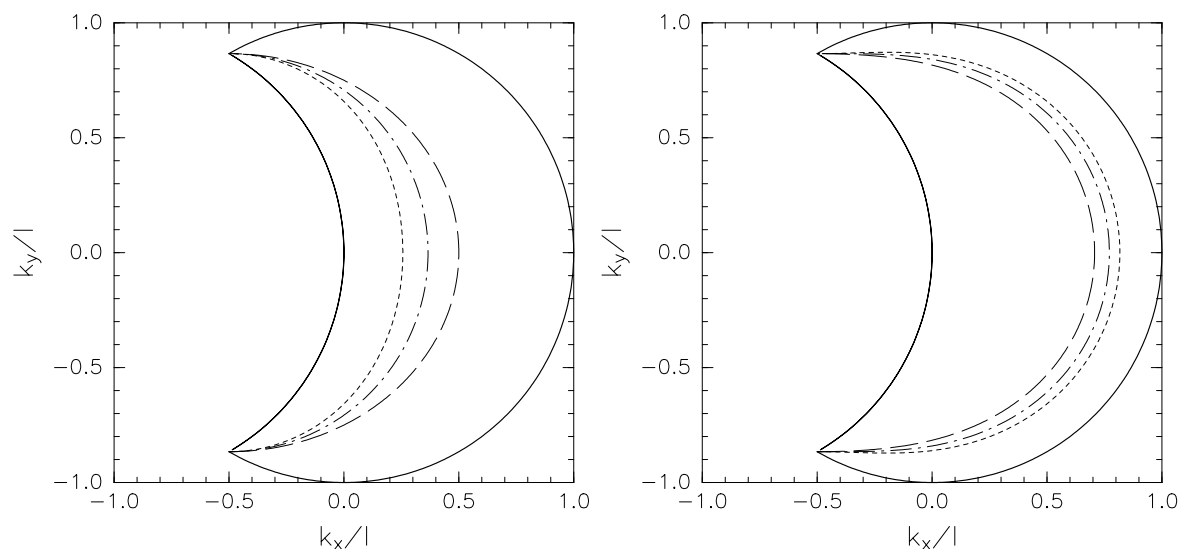


図 5.2 左図：三角形 ($\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$, $k \leq l \leq m$) を形成する波数ベクトル $\mathbf{k}$ の存在する範囲と $S_E = 1$ の曲線. $\mathbf{k}$ は太実線で囲われた領域内に存在する. 破線 $\alpha = 1$, 一点破線 $\alpha = 2$, 点線 $\alpha = 3$ の場合の $S_E = 1$ を表す. これらの線よりも左側の領域は $S_E < 1$, 右側の領域は $S_E > 1$ である. 右図: 左図と同様. ただし, $S_Q = 1$ を表す. Burgess & Shepherd (2013) の Figure 1 を再描画.

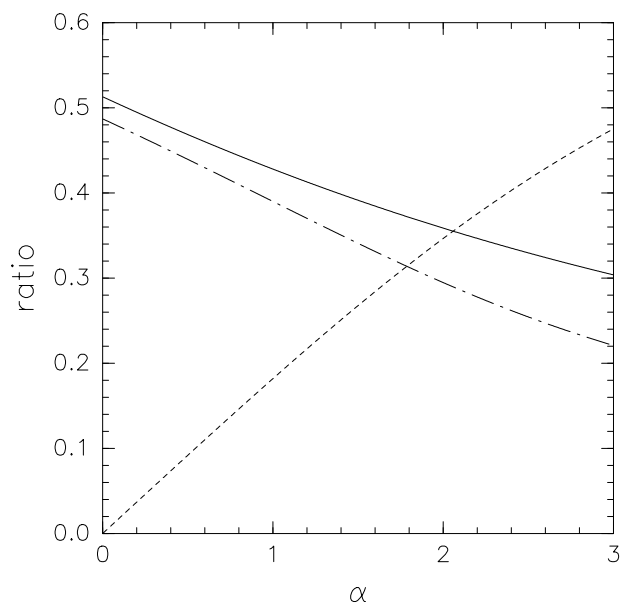


図 5.3 三波の種類相対比の α 依存性. 実線は $S_E > 1$, $S_Q > 1$ の場合, 一点破線は $S_E < 1$, $S_Q < 1$ の場合, 点線は $S_E > 1$, $S_Q < 1$ の場合である. (藤崎 & 岩山, 2002)

したが、図 5.3*²である。3 種類に分類した 三波 のうち、 $\alpha \lesssim 2$ では、 $S_E > 1$, $S_Q > 1$ となる三波 が一番卓越するが、 $\alpha \gtrsim 2$ では $S_E > 1$, $S_Q < 1$ となる 三波 が卓越する。図 5.3 からエネルギーを低波数へ、エンストロフィーを高波数へ輸送する 三波 が常に卓越しているわけではないことがわかる。また、三波を形成しているモードにどのくらいのエネルギーやエンストロフィーが蓄積しているかに依存して、エネルギーやエンストロフィーの輸送量が全体として決まるので、ここで紹介した三波相互作用による議論だけからは二重カスケード過程は証明できない。

5.2 強制散逸乱流の場合

Gkioulekas & Tung (2007) の証明は、強制散逸乱流系で、強制のスケールがある波数帯域に集中しており、2 つの非粘性保存量が存在する場合の一般的な証明である。

2 つの非粘性保存量を $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ とする。これらの量のスペクトル $A(k)$, $B(k)$ は

$$\mathcal{A} \equiv \int_0^\infty A(k) dk, \quad (5.22)$$

$$\mathcal{B} \equiv \int_0^\infty B(k) dk, \quad (5.23)$$

で定義され、 $A(k)$ と $B(k)$ の間には

$$B(k) = \mathcal{L}(k)A(k), \quad \mathcal{L}(k) > 0 \quad (5.24)$$

の関係が存在するとする。一般化された 2 次元流体の場合には $\mathcal{L}(k) = k^\alpha$ であるが、 $\mathcal{L}(k)$ の具体的な形はあとで考慮することにする。 $A(k)$, $B(k)$ の発展方程式は、

$$\frac{\partial A(k)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\mathcal{A}}(k)}{\partial k} = -D_{\mathcal{A}}(k) + F_{\mathcal{A}}(k), \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial B(k)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\mathcal{B}}(k)}{\partial k} = -D_{\mathcal{B}}(k) + F_{\mathcal{B}}(k), \quad (5.26)$$

で与えられるとする。ここで、 $\Pi_{\mathcal{A}}$, $\Pi_{\mathcal{B}}$ はそれぞれ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ のフラックスである。 $D_{\mathcal{A}}$, $D_{\mathcal{B}}$ は散逸項で正值であり、 $F_{\mathcal{A}}$, $F_{\mathcal{B}}$ は強制項である。(5.25) に $\mathcal{L}(k)$ を乗じることにより (5.26) が得られるので、

$$\frac{\partial \Pi_{\mathcal{B}}(k)}{\partial k} = \mathcal{L}(k) \frac{\partial \Pi_{\mathcal{A}}(k)}{\partial k}, \quad (5.27)$$

$$D_{\mathcal{B}}(k) = \mathcal{L}(k)D_{\mathcal{A}}(k), \quad (5.28)$$

$$F_{\mathcal{B}}(k) = \mathcal{L}(k)F_{\mathcal{A}}(k), \quad (5.29)$$

*² 藤崎真弓, 岩山隆寛: 2 次元乱流における二重カスケード過程に関する再考察。第 34 回流体力学講演会, 2002 年 9 月 17 日, 高知大学理学部, 講演集 p.89 - 92.

935 が成り立つ. (5.27) は Leith の束縛と呼ばれている.

936 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は非粘性保存量なので, (5.25), (5.26) の左辺第 2 項は, 波数空間全領域で積分す
937 るとゼロになる.*³ そこで, (5.25) より $\mathcal{A}$ のフラックスは,

$$\begin{aligned} 938 \quad \Pi_{\mathcal{A}}(k) &= \int_k^\infty \left\{ D_{\mathcal{A}}(p) - F_{\mathcal{A}}(p) + \frac{\partial A(p)}{\partial t} \right\} dp \\ 939 \quad &= - \int_0^k \left\{ D_{\mathcal{A}}(p) - F_{\mathcal{A}}(p) + \frac{\partial A(p)}{\partial t} \right\} dp, \end{aligned} \quad (5.30)$$

940 と二通りの表現をすることができる. 一方, $\mathcal{B}$ のフラックスも (5.24), (5.28), (5.29) の関
941 係式を用いて,

$$\begin{aligned} 942 \quad \Pi_{\mathcal{B}}(k) &= \int_k^\infty \mathcal{L}(p) \left\{ D_{\mathcal{A}}(p) - F_{\mathcal{A}}(p) + \frac{\partial A(p)}{\partial t} \right\} dp \\ 943 \quad &= - \int_0^k \mathcal{L}(p) \left\{ D_{\mathcal{A}}(p) - F_{\mathcal{A}}(p) + \frac{\partial A(p)}{\partial t} \right\} dp \end{aligned} \quad (5.31)$$

944 と表現できる. 一方, Leith の束縛を 0 から k まで積分することにより, $\mathcal{B}$ のフラックス,

$$\begin{aligned} 945 \quad \Pi_{\mathcal{B}}(k) &= \int_0^k \mathcal{L}(p) \frac{\partial \Pi_{\mathcal{A}}(p)}{\partial p} dp \\ 946 \quad &= \mathcal{L}(k) \Pi_{\mathcal{A}}(k) - \int_0^k \mathcal{L}'(p) \Pi_{\mathcal{A}}(p) dp, \end{aligned} \quad (5.32)$$

947 を得る. ここで, $\mathcal{L}' = d\mathcal{L}/dp$ である. 一方, Leith の束縛を

$$948 \quad \frac{\partial \Pi_{\mathcal{A}}(k)}{\partial k} = \frac{1}{\mathcal{L}(k)} \frac{\partial \Pi_{\mathcal{B}}(k)}{\partial k}$$

949 と変形し, これを k から ∞ まで積分することにより, $\mathcal{A}$ のフラックスは,

$$\begin{aligned} 950 \quad \Pi_{\mathcal{A}}(k) &= - \int_k^\infty \frac{1}{\mathcal{L}(p)} \frac{\partial \Pi_{\mathcal{B}}(p)}{\partial p} dp \\ 951 \quad &= \frac{1}{\mathcal{L}(k)} \Pi_{\mathcal{B}}(k) - \int_k^\infty \frac{\mathcal{L}'(p)}{\mathcal{L}^2(p)} \Pi_{\mathcal{B}}(p) dp, \end{aligned} \quad (5.33)$$

952 と表現できる.

953 Leith の束縛から得られた関係式 (5.32), (5.33) を移項することにより,

$$954 \quad \int_0^k \mathcal{L}'(p) \Pi_{\mathcal{A}}(p) dp = \mathcal{L}(k) \Pi_{\mathcal{A}}(k) - \Pi_{\mathcal{B}}(k), \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} 955 \quad \int_k^\infty \frac{\mathcal{L}'(p)}{\mathcal{L}^2(p)} \Pi_{\mathcal{B}}(p) dp &= \frac{1}{\mathcal{L}(k)} \Pi_{\mathcal{B}}(k) - \Pi_{\mathcal{A}}(k) \\ 956 \quad &= - \frac{\mathcal{L}(k) \Pi_{\mathcal{A}}(k) - \Pi_{\mathcal{B}}(k)}{\mathcal{L}(k)}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

*³ $\Pi_{\mathcal{A}}(0) = \Pi_{\mathcal{A}}(\infty) = 0$, $\Pi_{\mathcal{B}}(0) = \Pi_{\mathcal{B}}(\infty) = 0$ である.

を得る. (5.34), (5.35) の右辺はともに $\mathcal{L}(k)\Pi_A - \Pi_B(k)$ で表現されていることを注意しておく. $\mathcal{L}(k) > 0$ なので, (5.34) と (5.35) の左辺の積分は逆符号であることがわかる. ここで $A(k)$, $B(k)$ の発展方程式から得られた関係式を考慮する. まず, (5.34) の左辺を (5.30) と (5.31) の 1 番目の表現を用いて書きなおすと,

$$\int_0^k \mathcal{L}'(p)\Pi_A(p) dp = \int_k^\infty \underbrace{\{\mathcal{L}(k) - \mathcal{L}(p)\}}_{\dagger 1} \underbrace{\{D_A(p) - F_A(p)\}}_{\dagger 2} + \underbrace{\frac{\partial A(p)}{\partial t}}_{\dagger 4} dp \quad (5.36)$$

を得る. 一方, (5.35) の左辺を (5.30) と (5.31) の 2 番目の表現を用いて書きなおすと,

$$\int_k^\infty \frac{\mathcal{L}'(p)}{\mathcal{L}^2(p)} \Pi_B(p) dp = \frac{1}{\mathcal{L}(k)} \int_0^k \underbrace{\{\mathcal{L}(k) - \mathcal{L}(p)\}}_{\dagger 5} \underbrace{\{D_A(p) - F_A(p)\}}_{\dagger 6} + \underbrace{\frac{\partial A(p)}{\partial t}}_{\dagger 8} dp \quad (5.37)$$

を得る.

(5.36), (5.37) から, 一般化された 2 次元流体においてエネルギーとエントロフィーの二重カスケード過程が生じることが導かれる. $\alpha > 0$ と仮定する. 一般化された 2 次元流体では, $\mathcal{L}(k) = k^\alpha$ なので, $\dagger 1$ は $k < p < \infty$ の範囲では負である. 一方, $\dagger 5$ は $0 < p < k$ の範囲では正である. 強制散逸乱流の統計的定常状態では, $\dagger 4$, $\dagger 8$ はゼロである. また, $\dagger 2$, $\dagger 6$ は散逸項なので定義より正值である. 強制の波数帯域を $k_1 \leq k \leq k_2$ の狭い範囲とする. このとき, (5.36), (5.37) の積分範囲を強制の波数帯域の外側にとると, $\dagger 3$, $\dagger 7$ はゼロである. 以上より,

$$\int_0^k \mathcal{L}'(p)\Pi_A(p) dp = \alpha \int_0^k p^{\alpha-1} \Pi_A(p) dp < 0, \quad (k_2 < k < \infty) \quad (5.38)$$

$$\int_k^\infty \frac{\mathcal{L}'(p)}{\mathcal{L}^2(p)} \Pi_B(p) dp = \alpha \int_k^\infty p^{-\alpha-1} \Pi_B(p) dp > 0, \quad (0 < k < k_1) \quad (5.39)$$

が導かれる. (5.38) は高波数側が重みづけられた A のフラックスの積分が負であることを示しており, したがって A は正味低波数側に流れることを表している. 同様に, (5.39) は低波数側が重みづけられた B のフラックスの積分が正であることを示しており, したがって B は正味高波数側に流れることを表している. なお, 上記の議論は別の 2 次元流体, 例えば浅水系の準地衡流渦移方程式の場合, にも適用することができる. この場合には, $\mathcal{L}(k) = k^2 + \lambda^2$, ここで λ は外部変形半径の逆数である.

5.3 減衰性乱流の場合

減衰性乱流におけるエネルギーのアップワードカスケード過程の証明は, エネルギースペクトルの重心波数に注目し, それが時間発展に伴って低波数側に移動することを示すこ

とによって行われている。この議論は、Rhines (1979) より初めて議論されたが、粘性の効果が充分には考慮されていなかった。Scott (2001) は Rhines の議論を Ekman 減衰と拡散型の粘性を含んだ $\alpha = 2$ の系に拡張した。さらに Scott(2001) の議論が Gkioulekas & Tung (2007) によって超粘性 (hyperviscosity) と亜粘性 (hypoviscosity)*⁴ を含んだ場合に拡張されている。一方、任意の α に対しては、Smith *et al.*(2002)[39] が非粘性の場合について行っている。ここでは、任意の α について行われた Smith *et al.* (2002) の証明に超粘性と亜粘性を考慮した場合を考察することにする。なお、エンストロフィーのカスケードについては、粘性を考慮した場合の証明は未だ成功していない。

5.3.1 エネルギーアップワードカスケードの証明

超粘性と亜粘性を含んだ場合の一般化された 2 次元流体のエネルギースペクトル方程式は、

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T_{\mathcal{E}}(k) - 2\nu_p k^{2p} E(k) - 2\mu_h k^{-2h} E(k), \quad (5.40)$$

である。 ν_p は $p(>0)$ 次の超粘性係数であり、 μ_h は $h(\geq 0)$ 次の亜粘性係数である。(5.40) の右辺第 2 項と第 3 項はそれぞれ高波数側、低波数側で選択的に働く粘性である。 $h=0$ は Ekman 減衰を表す。

今 Smith *et al.* (2002) によって導入された再スケールされた波数、

$$\tilde{k} \equiv k^{\alpha/2}, \quad (5.41)$$

を導入する。 α はとりあえず、正の実数とする。このとき、エネルギーは

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^\infty E(k) dk = \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty k^{1-\alpha/2} E(k) d\tilde{k} \\ &= \int_0^\infty \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

と再スケールしたエネルギースペクトルの積分で表現できる。同様にエンストロフィーは

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \int_0^\infty k^\alpha E(k) dk = \int_0^\infty \tilde{k}^2 \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k} \\ &= \int_0^\infty \tilde{Q}(\tilde{k}) d\tilde{k}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

*⁴ hyper は「超」、hypo は「未満」の意味でつかわれるようである。「亜」は sub の訳語として使われる。supercritical, subcritical をそれぞれ超臨界、亜臨界と訳すので、「超」に対する対義語としてここでは hypoviscosity を亜粘性と訳すことにする。Oxford Advanced Learner's Dictionary では sub は under, below, 一方 hypo は under, beneath という説明がある。

となり, 再スケールしたエネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの間に,

$$\tilde{Q}(\tilde{k}) = \tilde{k}^2 \tilde{E}(\tilde{k}), \quad (5.44)$$

の関係が成り立つ.

エネルギースペクトルのモーメント,

$$M_a \equiv \int_0^\infty \tilde{k}^a \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}, \quad (5.45)$$

を定義する. さらに, エネルギースペクトルの重心波数,

$$\langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon \equiv \frac{\int_0^\infty \tilde{k} \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}}{\int_0^\infty \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}}, \quad (5.46)$$

を定義すると,

$$\langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon = \frac{M_1}{M_0}, \quad (5.47)$$

である. $\langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon$ が時間発展に際して減少すれば, エネルギーは低波数側へ輸送されることを表す. エネルギースペクトルの幅は, 重心波数とモーメントを使って,

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 &\equiv \frac{\int_0^\infty (\tilde{k} - \langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon)^2 \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}}{\int_0^\infty \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}} \\ &= \frac{\int_0^\infty (\tilde{k}^2 - 2\langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon \tilde{k} + \langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon^2) \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}}{\int_0^\infty \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}} \\ &= \frac{M_2}{M_0} - \langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (5.48)$$

と書ける. (5.48) の両辺を時間微分すると,

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{M_2}{M_0} \right) - \frac{d\sigma_\varepsilon^2}{dt}, \quad (5.49)$$

を得る. (5.49) の右辺第 1 項は次のように変形できる:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M_2}{M_0} \right) = \frac{1}{M_0^2} \left(M_0 \frac{dM_2}{dt} - M_2 \frac{dM_0}{dt} \right). \quad (5.50)$$

ここで支配方程式 (5.40) を考慮する. (5.40) を波数 k について積分すると,

$$\frac{dM_0}{dt} = -2\nu_p M_{4p/\alpha} - 2\mu_h M_{-4h/\alpha}, \quad (5.51)$$

1027 を得る. いっぽう, k^α を掛けて k について積分すると,

$$1028 \quad \frac{dM_2}{dt} = -2\nu_p M_{2+4p/\alpha} - 2\mu_h M_{2-4h/\alpha}, \quad (5.52)$$

1029 を得る. そこで,

$$\begin{aligned} 1030 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{M_2}{M_0} \right) &= \frac{2\nu_p}{M_0^2} (M_2 M_{4p/\alpha} - M_0 M_{2+4p/\alpha}) + \frac{2\mu_h}{M_0^2} (M_2 M_{-4h/\alpha} - M_0 M_{2-4h/\alpha}) \\ 1031 \quad &= \frac{2\nu_p M_{4p/\alpha}}{M_0} \left(\frac{M_2}{M_0} - \frac{M_{2+4p/\alpha}}{M_{4p/\alpha}} \right) + \frac{2\mu_h M_{-4h/\alpha}}{M_0} \left(\frac{M_2}{M_0} - \frac{M_{2-4h/\alpha}}{M_{-4h/\alpha}} \right), \\ 1032 \quad & \quad (5.53) \end{aligned}$$

1033 となる. これを (5.49) に代入して, 重心波数の発展に関する一般的な式を得る:

$$\begin{aligned} 1034 \quad \frac{d}{dt} \langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon^2 &= \frac{2\nu_p M_{4p/\alpha}}{M_0} \left(\frac{M_2}{M_0} - \frac{M_{2+4p/\alpha}}{M_{4p/\alpha}} \right) \\ 1035 \quad &+ \frac{2\mu_h M_{-4h/\alpha}}{M_0} \left(\frac{M_2}{M_0} - \frac{M_{2-4h/\alpha}}{M_{-4h/\alpha}} \right) \\ 1036 \quad &- \frac{d\sigma_\varepsilon^2}{dt}. \quad (5.54) \end{aligned}$$

1037 (5.54) を考察する. 初期時刻において波数空間で非常に狭い幅のエネルギースペクトル
1038 を与えて発展させる場合を考える. これは減衰性乱流における問題のセットアップとして
1039 は標準的なもので, 多くの研究でこのような条件のもと数値シミュレーションが行われて
1040 いる. そして, 狭い幅のエネルギースペクトルは時間とともにその幅が広がっていくこと
1041 が知られている. そこで,

$$1042 \quad \frac{d\sigma_\varepsilon^2}{dt} > 0 \quad (5.55)$$

1043 を仮定する.

1044 **非粘性の場合:** $\nu_p = 0$, $\mu_h = 0$ なので, (5.54) の右辺第 1, 第 2 項は消え, 第 3 項のみと
1045 なる. (5.55) より, $\frac{d}{dt} \langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon^2 < 0$ が導かれる. これは $\alpha = 2$ の場合, Rhines(1979)
1046 によって, 任意の α の場合, Smith *et al.* (2002) によって議論されたケースである.

1047 **Ekman 減衰が働く場合:** $h = 0$ なので, (5.54) の右辺第 2 項はゼロになる. つまり,
1048 Ekman 減衰はエネルギースペクトルの重心波数の発展には直接寄与しない. ($\langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon$
1049 の時間に関する 2 階微分には, μ_0 依存性が現れる. そこで, $\langle \tilde{k} \rangle_\varepsilon$ は μ_0 に独立で
1050 あると考えるのは誤りである. あくまで陽に依存していないだけである.) さらに右
1051 辺第 1 項の括弧内の量,

$$1052 \quad \frac{M_2}{M_0} - \frac{M_{2+4p/\alpha}}{M_{4p/\alpha}}, \quad (5.56)$$

は負値であることが Cauchy–Schwarz の不等式から証明できる。したがって、この場合にも $\frac{d}{dt} \left\langle \tilde{k} \right\rangle_{\varepsilon}^2 < 0$ が導かれる。 $\alpha = 2, p = 1$ の場合は、Scott (2001) において議論されたものである。 (5.56) が負であることの証明のもととなる不等式、

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{M_{\kappa+\xi}}{M_{\kappa}} \right) > 0, \quad (\xi > 0) \quad (5.57)$$

は Gkioulekas & Tung (2007) によって証明されている。

一般の垂粘性の場合: $h > 0$ の垂粘性が働く場合、(5.54) の右辺第 2 項の括弧内は正値である。これは (5.57) から導かれる。そこでこの場合には、 $\frac{d}{dt} \left\langle \tilde{k} \right\rangle_{\varepsilon}^2$ は符号確定ではない。 $\alpha = 2$ におけるこのことは、Gkioulekas & Tung (2007) によって示された。なお、 $h > 0$ の垂粘性は減衰性乱流の数値実験のセットアップとしてはほとんど用いられない状況であることを注意しておく。 $h > 0$ の垂粘性は、強制散逸乱流においてエネルギーが低波数に溜り、エネルギーが時間とともに増大していくことを防いで、系を統計的定常状態に保つために人為的に入れる粘性である。

5.3.2 (5.57) の証明

(5.57) とその元となる Cauchy–Schwarz の不等式の証明を行う。 まず、Cauchy–Schwarz の不等式を証明する。

$a < x < b$ の区間において、 $f(x) > 0, g(x) > 0$ となる実関数と実数 λ に関して、

$$\int_a^b \{f(x) + \lambda g(x)\}^2 dx = \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right) \lambda^2 + 2 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right) \lambda + \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0, \quad (5.58)$$

である。(5.58) を λ の 2 次不等式と見做すと、不等式が成立するためには (5.58) の左辺の判別式が負であることが必要十分である。つまり、

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right) \quad (5.59)$$

が導かれる。(5.59) は Cauchy–Schwarz の不等式と呼ばれる。

いま、 $a = 0, b = \infty, x = \tilde{k}, f(x) = \tilde{k}^c \sqrt{\tilde{E}(\tilde{k})}, g(x) = \tilde{k}^d \sqrt{\tilde{E}(\tilde{k})}$ とおく。このとき、(5.59) は

$$M_{c+d}^2 \leq M_{2c} M_{2d} \quad (5.60)$$

となる。さらに、 $c = \kappa/2, d = \kappa/2 + \xi$ とおくと、(5.60) は

$$M_{\kappa+\xi}^2 \leq M_{\kappa} M_{\kappa+2\xi} \quad (5.61)$$

1080 もしくは,

$$1081 \quad \frac{M_{\kappa+\xi}}{M_{\kappa}} \leq \frac{M_{\kappa+2\xi}}{M_{\kappa+\xi}} \quad (5.62)$$

1082 が成り立つ. さらに,

$$1083 \quad \mathcal{M}(\kappa, \xi) \equiv \frac{M_{\kappa+\xi}}{M_{\kappa}}, \quad (5.63)$$

1084 と定義する. このとき,

$$\begin{aligned} 1085 \quad \mathcal{M}(\kappa + \xi/n, \xi) &= \frac{M_{\kappa+\xi(n+1)/n}}{M_{\kappa+\xi/n}} \\ 1086 &= \frac{M_{\kappa+\xi(n+1)/n}}{M_{\kappa+\xi n/n}} \frac{M_{\kappa+\xi n/n}}{M_{\kappa+\xi(n-1)/n}} \frac{M_{\kappa+\xi(n-1)/n}}{M_{\kappa+\xi(n-2)/n}} \cdots \frac{M_{\kappa+3\xi/n}}{M_{\kappa+2\xi/n}} \frac{M_{\kappa+2\xi/n}}{M_{\kappa+\xi/n}} \\ 1087 &> \frac{M_{\kappa+\xi n/n}}{M_{\kappa+\xi(n-1)/n}} \frac{M_{\kappa+\xi(n-1)/n}}{M_{\kappa+\xi(n-2)/n}} \frac{M_{\kappa+\xi(n-2)/n}}{M_{\kappa+\xi(n-3)/n}} \cdots \frac{M_{\kappa+2\xi/n}}{M_{\kappa+\xi/n}} \frac{M_{\kappa+\xi/n}}{M_{\kappa}} \\ 1088 &= \frac{M_{\kappa+\xi n/n}}{M_{\kappa}} = \mathcal{M}(\kappa, \xi). \end{aligned} \quad (5.64)$$

1089 ここで, 2 行目から 3 行目への変形には, 各因子に (5.62) を用いた. (5.64) は

$$1090 \quad \frac{\partial \mathcal{M}(\kappa, \xi)}{\partial \kappa} > 0, \quad (\xi > 0) \quad (5.65)$$

1091 であることを示している. また,

$$1092 \quad \frac{\partial \mathcal{M}(\kappa, \xi)}{\partial \kappa} < 0, \quad (\xi < 0) \quad (5.66)$$

1093 である.

1094 5.3.3 エンストロフィーダウンワードカスケードの証明

1095 以下で見るように, 減衰性乱流におけるエンストロフィーの高波数側へのカスケードの
1096 証明は完成していない. エネルギーのカスケードと同様にエンストロフィーの高波数への
1097 カスケードに関しては, エンストロフィー平均された波長

$$1098 \quad \langle \tilde{\lambda} \rangle_Q \equiv \frac{\int_0^\infty \tilde{k}^{-1} \tilde{Q}(\tilde{k}) d\tilde{k}}{\int_0^\infty \tilde{Q}(\tilde{k}) d\tilde{k}} \quad (5.67)$$

に注目する.*⁵ エンストロフィースペクトルが時間発展に際して拡がっていく,

$$\frac{d\sigma_Q}{dt} > 0, \quad (5.68)$$

$$\sigma_Q \equiv \frac{\int_0^\infty \left(\tilde{\lambda} - \langle \tilde{\lambda} \rangle_Q \right)^2 \tilde{Q}(\tilde{k}) d\tilde{k}}{\int_0^\infty \tilde{Q}(\tilde{k}) d\tilde{k}}, \quad (5.69)$$

という仮定のもと

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\lambda} \rangle_Q^2 = \frac{d}{dt} \frac{M_0}{M_2} - \frac{d}{dt} \sigma_Q \quad (5.70)$$

が減少していくことを証明したい。しかしながら、エネルギーカスケードのときの議論によると、Ekman 減衰と超粘性という減衰性乱流の標準的な設定では、 $\frac{d}{dt} \frac{M_2}{M_0} < 0$ だったので、(5.70) の右辺第 1 項は正になる。したがって、(5.70) は符号確定ではない。つまり減衰性乱流におけるエンストロフィーの高波数側へのカスケードに関しては未だ証明できていない。(非粘性の場合には、(5.70) の右辺第 1 項はゼロになるので、エンストロフィースペクトルの重心波長は (5.68) の仮定の下で減少する、即ち、エンストロフィーは高波数側へ輸送されることがいえる。)

*⁵ 波数の逆数で波長を定義する: $\tilde{\lambda} \equiv \tilde{k}^{-1}$. 因子 2π は省略する。

第 6 章

完結理論

6.1 完結問題

エネルギースペクトルもしくは、エンストロフィースペクトルの閉じた発展方程式を導出する。ここでは流れの領域は無限領域とする。散逸項 $\mathcal{D}$ は拡散型の粘性

$$\mathcal{D} = \nu \nabla^2 q, \quad \hat{\mathcal{D}}(\mathbf{k}) = -\nu k^2 \hat{q}(\mathbf{k}) \quad (6.1)$$

とし、強制項はとりあえず無視する。したがって、議論の出発点は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \hat{q}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \frac{1}{2} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) \quad (6.2)$$

である。モード $\mathbf{k}$ のエンストロフィーの発展方程式は、(6.2) に $\hat{q}(\mathbf{k})^*$ を掛けて、さらにその結果の式とその複素共役を足し、集団平均を取るにより得られる：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) \langle |\hat{q}(\mathbf{k})|^2 \rangle &= \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \frac{1}{2} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \\ &\quad \times \{ \langle \hat{q}(-\mathbf{k}) \hat{q}(\mathbf{l}) \hat{q}(\mathbf{m}) \rangle + \langle \hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \rangle \}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここで $\langle \bullet \rangle$ は集団平均を表す。(6.3) より渦度の 2 次のモーメントの発展は、渦度の 3 次のモーメントに依存することがわかる。この方程式を閉じさせるには、渦度の 3 次のモーメントの振る舞いを知る必要がある。そこで、渦度の 3 次のモーメントの発展方程式を求めてみる。(6.2) に $\hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m})$ を掛けると、

$$\begin{aligned} \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \frac{\partial \hat{q}(\mathbf{k})}{\partial t} + \nu k^2 \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \hat{q}(\mathbf{k}) \\ = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{s} \frac{1}{2} \frac{(r^\alpha - s^\alpha)(\mathbf{r} \times \mathbf{s})_z}{r^\alpha s^\alpha} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{r} - \mathbf{s}) \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(\mathbf{s}) \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

を得る. (6.4) において, $\mathbf{k}$, $-\mathbf{l}$, $-\mathbf{m}$ をサイクリックに入れ替えた式を全て足し, 集団平均
 を取ることにより,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + l^2 + m^2) \right\} \langle \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \hat{q}(\mathbf{k}) \rangle \\
 &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{s} \frac{1}{2} \frac{(r^\alpha - s^\alpha)(\mathbf{r} \times \mathbf{s})_z}{r^\alpha s^\alpha} \\
 & \quad \times \{ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{r} - \mathbf{s}) \langle \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(\mathbf{s}) \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \rangle \\
 & \quad + \delta(\mathbf{l} + \mathbf{r} + \mathbf{s}) \langle \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(\mathbf{s}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \hat{q}(\mathbf{k}) \rangle \\
 & \quad + \delta(\mathbf{m} + \mathbf{r} + \mathbf{s}) \langle \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(\mathbf{s}) \hat{q}(\mathbf{k}) \hat{q}(-\mathbf{l}) \rangle \} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

を得る. 渦度の3次のモーメントの発展方程式には, (6.5) の右辺にあるように渦度の4次
 のモーメントが現れる. 一般に n 次のモーメントの発展方程式は, $n+1$ 次のモーメント
 に依存する. このように流体力学の方程式には無限に続くモーメントの階級 (hierarchy)
 が存在する. 高次のモーメントの出現は, 流体力学の基礎方程式に存在する非線型項が原
 因である. 乱流の統計理論における問題の一つはこの無限のモーメントの階級をどのよう
 にして閉じるかということであり, これは完結 (closure) 問題と呼ばれている. 完結するた
 めには何らかの仮説もしくは原理を持ち込む必要がある. この仮説や原理は支配方程式か
 ら導かれるかどうかは明らかではない.

6.2 準正規近似理論

6.2.1 準正規仮説

無限のモーメントの階級を閉じる一つの方法は, $\hat{q}(\mathbf{k})$ が平均値ゼロの正規分布に従うと
 仮定して, 4 次のモーメントを2次のモーメントの積で表すことである. これは準正規近
 似 (quasi normal approximation: QNA) と呼ばれているものである. 例えば, (6.5) の右
 辺第1項に現れた4次のモーメントを,

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(\mathbf{s}) \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \rangle &= \langle \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(\mathbf{s}) \rangle \langle \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \rangle \\
 &+ \langle \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(-\mathbf{l}) \rangle \langle \hat{q}(\mathbf{s}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \rangle \\
 &+ \langle \hat{q}(\mathbf{r}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \rangle \langle \hat{q}(\mathbf{s}) \hat{q}(-\mathbf{l}) \rangle, \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

と表す．ここで統計的一様性^{*1}を仮定すると，

$$\begin{aligned}\langle \hat{q}(\mathbf{r})\hat{q}(\mathbf{s})\hat{q}(-\mathbf{l})\hat{q}(-\mathbf{m}) \rangle &= \Theta(\mathbf{r})\Theta(-\mathbf{l})\delta(\mathbf{r}+\mathbf{s})\delta(\mathbf{l}+\mathbf{m}) \\ &\quad + \Theta(\mathbf{r})\Theta(\mathbf{s})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{l})\delta(\mathbf{s}-\mathbf{m}) \\ &\quad + \Theta(\mathbf{r})\Theta(\mathbf{s})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{m})\delta(\mathbf{s}-\mathbf{l}),\end{aligned}\quad (6.8)$$

となる．(6.8)を(6.5)に代入する．まず，(6.8)の第1項の寄与は，

$$\begin{aligned}&\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{s} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{r}-\mathbf{s}) \frac{(r^\alpha-s^\alpha)(\mathbf{r}\times\mathbf{s})_z}{2r^\alpha s^\alpha} \Theta(\mathbf{r})\Theta(-\mathbf{l})\delta(\mathbf{r}+\mathbf{s})\delta(\mathbf{l}+\mathbf{m}) \\ &= \int d\mathbf{r} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{r}-\mathbf{r}) \frac{(r^\alpha-r^\alpha)(\mathbf{r}\times(-\mathbf{r}))_z}{2r^\alpha r^\alpha} \Theta(\mathbf{r})\Theta(-\mathbf{l})\delta(\mathbf{l}+\mathbf{m}) = 0.\end{aligned}$$

即ち，この項の寄与はない．次に(6.8)の第2項の寄与は，

$$\begin{aligned}&\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{s} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{r}-\mathbf{s}) \frac{(r^\alpha-s^\alpha)(\mathbf{r}\times\mathbf{s})_z}{2r^\alpha s^\alpha} \Theta(\mathbf{r})\Theta(\mathbf{s})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{l})\delta(\mathbf{s}-\mathbf{m}) \\ &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{l}-\mathbf{m}) \frac{(l^\alpha-m^\alpha)(\mathbf{l}\times\mathbf{m})_z}{2l^\alpha m^\alpha} \Theta(\mathbf{l})\Theta(\mathbf{m}),\end{aligned}\quad (6.9)$$

である．(6.8)の第3項の寄与は，(6.9)において $\mathbf{l}$ と $\mathbf{m}$ を入れ替えればよい．このとき(6.9)と同じ結果が導かれて(6.8)を代入した結果は，(6.9)の2倍，即ち，

$$\delta(\mathbf{k}-\mathbf{l}-\mathbf{m}) \frac{(l^\alpha-m^\alpha)(\mathbf{l}\times\mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \Theta(\mathbf{l})\Theta(\mathbf{m}),\quad (6.10)$$

となる．同様に(6.5)の右辺第2項，第3項も計算すればいい．(6.10)を利用すると，第2項は(6.10)において， $\mathbf{k}$ と $-\mathbf{l}$ を交換すればよく，

$$\begin{aligned}&-\delta(\mathbf{k}-\mathbf{l}-\mathbf{m}) \frac{(k^\alpha-m^\alpha)(\mathbf{k}\times\mathbf{m})_z}{k^\alpha m^\alpha} \Theta(-\mathbf{k})\Theta(\mathbf{m}) \\ &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{l}-\mathbf{m}) \frac{(m^\alpha-k^\alpha)(\mathbf{l}\times\mathbf{m})_z}{k^\alpha m^\alpha} \Theta(-\mathbf{k})\Theta(\mathbf{m}),\end{aligned}\quad (6.11)$$

^{*1} 渦度の相関関数 $\langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x}+\mathbf{x}') \rangle$ が $\mathbf{x}'$ のみに依存して，相関の原点 $\mathbf{x}$ に依存しないとき，場は統計的に一様であるという．このとき渦度の2次のモーメントは，

$$\begin{aligned}\langle \hat{q}(\mathbf{k})\hat{q}(\mathbf{l}) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\Omega} d\mathbf{y} \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{y}) \rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{l}\cdot\mathbf{y})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d\mathbf{x}' \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x}+\mathbf{x}') \rangle e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}'} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d\mathbf{x}' \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x}+\mathbf{x}') \rangle e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}'} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{l}) \\ &= \Theta(\mathbf{l})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{l}) = \Theta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{l})\end{aligned}\quad (6.7)$$

となる．ここで $\Theta(\mathbf{l})$ は渦度の相関関数 $\langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x}+\mathbf{x}') \rangle$ の Fourier 変換である．

1172 である. ここで $\mathbf{k} = \mathbf{l} + \mathbf{m}$ の関係式を使用した. 第3項は (6.10) において, $\mathbf{k}$ と $-\mathbf{m}$ を
 1173 交換すればよく,

$$\begin{aligned}
 1174 & -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \frac{(l^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{k})_z}{l^\alpha k^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(-\mathbf{k}) \\
 1175 & = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha k^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(-\mathbf{k}). \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

1176 以上より, (6.5) は

$$\begin{aligned}
 1177 & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + l^2 + m^2) \right\} \langle \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \hat{q}(\mathbf{k}) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \\
 1178 & \quad \times \left\{ \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(\mathbf{m}) \right. \\
 1179 & \quad + \frac{(m^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha m^\alpha} \Theta(-\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{m}) \\
 1180 & \quad \left. + \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha k^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(-\mathbf{k}) \right\} \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

1181 となる. 等方性^{*2}を仮定し, さらに, (6.13) は非斉次の微分方程式になっているので形式的
 1182 にその解は

$$\begin{aligned}
 1183 & \langle \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \hat{q}(\mathbf{k}) \rangle = \int_0^t ds e^{-\nu(k^2 + l^2 + m^2)(t-s)} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \\
 1184 & \quad \times \left\{ \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(\mathbf{m}) \right. \\
 1185 & \quad + \frac{(m^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha m^\alpha} \Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{m}) \\
 1186 & \quad \left. + \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha k^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(\mathbf{k}) \right\} \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

^{*2} 統計量が原点からの距離のみに依存し, 方向に依存しないとき, 例えば, $\Theta(\mathbf{k})$ が k のみに依存し, $\mathbf{k}$ の方向に依存しないとき, 統計量は等方的であるという.

と表現できる. $\langle \hat{q}(\mathbf{l})\hat{q}(\mathbf{m})\hat{q}(-\mathbf{k}) \rangle$ は (6.14) の複素共役であるが, 複素共役をとっても (6.14) の右辺の表現は変わらない. そこで, 準正規仮説, 一様等方性のもとで, (6.3) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) \Theta(k) &= \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} \\ &\times \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \\ &\times \left\{ \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \Theta(l)\Theta(m) \right. \\ &+ \frac{(m^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha m^\alpha} \Theta(k)\Theta(m) \\ &\left. + \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha k^\alpha} \Theta(l)\Theta(k) \right\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

となる.

エンストロフィースペクトル $Q(k)$, エネルギースペクトル $E(k)$ と渦度のモーメントとの関係は,

$$Q(k) = \pi k \Theta(k) = k^\alpha E(k), \quad (6.16)$$

なので, エネルギースペクトルの発展方程式は,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E(k) &= \frac{k^{1-\alpha}}{\pi} \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} \\ &\times \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \\ &\times \left\{ \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{klm} kE(l)E(m) \right. \\ &+ \frac{(m^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{klm} lE(k)E(m) \\ &\left. + \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{klm} mE(l)E(k) \right\}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる.

$\hat{q}(\mathbf{k})$ の揺らぎが平均値ゼロの正規分布に従うならば, その 3 次モーメントはゼロとなるが, その場合には (6.3) からわかるように, 波数空間内でのエネルギーやエンストロフィの伝達が行われなくなる. そこで, 3 次のモーメントには何の制限を仮定も設けず, 4 次のモーメントが 2 次のモーメントの積で書けると仮定することが上で紹介した準正規近似の考え方である. ある確率的な揺らぎの物理量の n 次モーメントと, その物理量が正規分布に従うとしたときの n 次モーメントとの差は, n 次のキュムラントと呼ばれる.*³ 上の仮

*³ キュムラントの定義等については, 付録 C 章参照.

1211 定は渦度の4次のキュムラントをゼロとする近似である．そこで，この近似は，0-4次キュ
 1212 ムラント近似 (zero 4th-order cumulant approximation: ZCA) と呼ばれている．

1213 6.2.2 幾何学因子

1214 前小節で得られた (6.17) をもう少し変形することを考える．波数ベクトル $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ で
 1215 構成される三角形 $\mathbf{k} = \mathbf{l} + \mathbf{m}$ において， $\mathbf{k}$ の対面の角度を θ_{lm} ， $\mathbf{l}$ の対面の角度を θ_{mk} ，
 1216 $\mathbf{m}$ の対面の角度を θ_{kl} とおく (図 6.1 参照)．またこれらの角の余弦をそれぞれ x , y , z と
 1217 する．これら， x , y , z を使って，(6.17) の $E(k)E(l)$ などの係数を表現することを考える．
 1218 ここではそのための準備をする．以下で導く幾何学的関係式がすべて，2次元乱流の統計理
 1219 論に必要なわけではないことに注意しておく．しかしながら，とりあえず考えうる一通りの
 関係式を導いておくことにする．

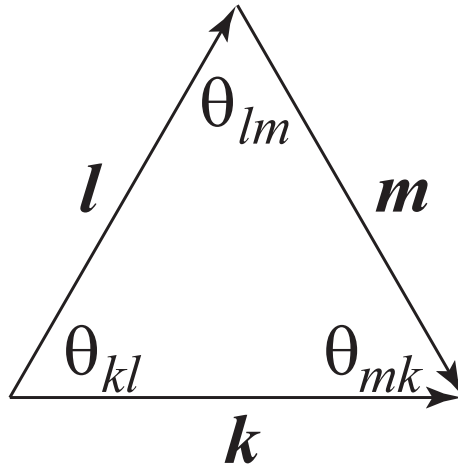


図 6.1 $\mathbf{k} = \mathbf{l} + \mathbf{m}$ を満たす三波

1220
 1221 先ず定義より，

$$1222 \cos \theta_{lm} \equiv x, \quad (6.18)$$

$$1223 \cos \theta_{mk} \equiv y, \quad (6.19)$$

$$1224 \cos \theta_{kl} \equiv z. \quad (6.20)$$

1225 また，内積に関する関係式は

$$1226 \mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = kl \cos \theta_{kl} = klz, \quad (6.21)$$

$$1227 \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = -lm \cos \theta_{lm} = -lmx, \quad (6.22)$$

$$1228 \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = km \cos \theta_{mk} = mky, \quad (6.23)$$

1229 である．ここで，(6.22) は符号に注意する必要がある．

ベクトル積に関する関係式は,

$$(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z = lm \sin \theta_{lm} = lm \sqrt{1 - x^2}, \quad (6.24)$$

$$(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z = mk \sin \theta_{mk} = mk \sqrt{1 - y^2}, \quad (6.25)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z = kl \sin \theta_{kl} = kl \sqrt{1 - z^2}, \quad (6.26)$$

である.

正弦定理

$$\frac{\sin \theta_{lm}}{k} = \frac{\sin \theta_{mk}}{l} = \frac{\sin \theta_{kl}}{m}$$

は,

$$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{k} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{l} = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{m}, \quad (6.27)$$

となる.

余弦定理は,

$$k^2 = l^2 + m^2 - 2lmx, \quad (6.28)$$

$$l^2 = m^2 + k^2 - 2mky, \quad (6.29)$$

$$m^2 = k^2 + l^2 - 2klz, \quad (6.30)$$

と表現される.

また,

$$\theta_{lm} + \theta_{mk} + \theta_{kl} = \pi \quad (6.31)$$

なので,

$$\begin{aligned} \cos \theta_{lm} &= \cos (\pi - (\theta_{mk} + \theta_{kl})) \\ &= -\cos (\theta_{mk} + \theta_{kl}) \\ &= -\cos \theta_{mk} \cos \theta_{kl} + \sin \theta_{mk} \sin \theta_{kl}. \end{aligned}$$

したがって,

$$x = -yz + \sqrt{1 - y^2} \sqrt{1 - z^2}, \quad (6.32)$$

を得る. x, y, z をサイクリックに入れ替えて同様の式,

$$y = -zx + \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - x^2}, \quad (6.33)$$

$$z = -xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}, \quad (6.34)$$

1256 を得る. また, (6.31) より

$$\begin{aligned}
 1257 \quad \sin \theta_{lm} &= \sin(\pi - (\theta_{mk} + \theta_{kl})) \\
 1258 \quad &= \sin(\theta_{mk} + \theta_{kl}) \\
 1259 \quad &= \sin \theta_{mk} \cos \theta_{kl} + \cos \theta_{mk} \sin \theta_{kl},
 \end{aligned}$$

1260 と表現できるので,

$$1261 \quad \sqrt{1-x^2} = z\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2}, \quad (6.35)$$

1262 を得る. 再び, x, y, z をサイクリックに入れ替えて,

$$1263 \quad \sqrt{1-y^2} = x\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2}, \quad (6.36)$$

$$1264 \quad \sqrt{1-z^2} = y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2}, \quad (6.37)$$

1265 を得る. (6.35) に $\sqrt{1-y^2}/(1-x^2)$ を掛けて,

$$\begin{aligned}
 1266 \quad \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{(1-y^2)z + y\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}{1-x^2} \\
 1267 \quad &= \frac{(1-y^2)z + (x+yz)y}{1-x^2} \\
 1268 \quad &= \frac{z+xy}{1-x^2}.
 \end{aligned}$$

1269 ここで, 第1式から第2式への変形には (6.32) を用いた. また左辺は (6.27) より,

$$1270 \quad \frac{l}{k} = \frac{z+xy}{1-x^2}, \quad (6.38)$$

1271 を得る. 今までと同様に k, l, m や x, y, z のサイクリックな入れ替えにより

$$1272 \quad \frac{m}{l} = \frac{x+yz}{1-y^2}, \quad (6.39)$$

$$1273 \quad \frac{k}{m} = \frac{y+zx}{1-z^2}, \quad (6.40)$$

1274 を得る.

1275 (6.35) を二乗することにより

$$1276 \quad 1-x^2 = z^2(1-y^2) + y^2(1-z^2) + 2yz\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}.$$

1277 項を整理して,

$$\begin{aligned}
 1278 \quad x^2 + y^2 + z^2 &= 1 + 2y^2z^2 - 2yz\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2} \\
 1279 \quad &= 1 - 2yz(-yz + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}) \\
 1280 \quad &= 1 - 2xyz,
 \end{aligned} \quad (6.41)$$

1281 を得る. 第2式から第3式へは (6.32) を用いた.

6.2.3 積分領域

次に, (6.17) の計算で, 積分変数の変換を行っておく. (6.17) は

$$\int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \quad (6.42)$$

の形である. ここで, $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ は $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ に依存するある関数である. (6.42) において $\mathbf{m}$ に関する積分を実行する:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \int d\mathbf{l} f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{k} - \mathbf{l}) \\ &= \int_0^\infty dl \int_0^{2\pi} d\theta_{kl} l f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{k} - \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (6.43)$$

ここで, $\mathbf{k}$ を x 軸方向にとると, $\mathbf{l}$ を極座標表示したときの方位角は θ_{kl} になることを用いている. θ_{kl} による積分を m による積分に置き換える. まず, (6.20) より

$$d\theta_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz \quad (6.44)$$

を得る. 次に, (6.30) より

$$dz = -\frac{m}{kl} dm \quad (6.45)$$

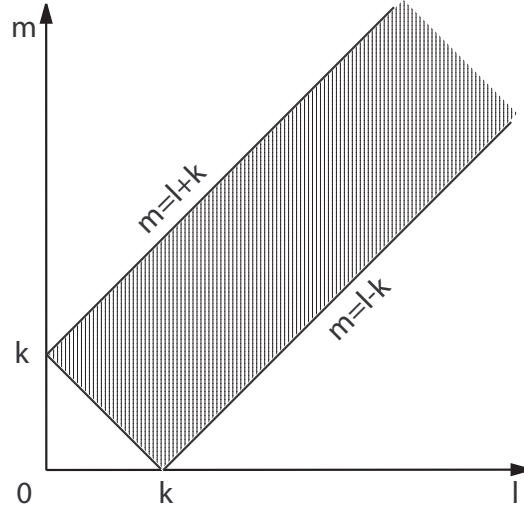
である. (6.44), (6.45) より,

$$\begin{aligned} d\theta_{kl} &= \frac{m}{kl} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dm \\ &= \frac{1}{l\sqrt{1-x^2}} dm, \end{aligned} \quad (6.46)$$

となる. ここで, (6.27) を用いた. なお, 積分範囲は θ_{kl} が 0 から 2π にまで変化する間に, z は $1 \rightarrow -1 \rightarrow 1$ と変化する. また, (6.30) より, $z = -1$ には $m = k + l$ が, $z = 1$ には $m = |k - l|$ が対応することを注意しておく. (l, m) 空間内の積分範囲を図 6.2 に表す. したがって, (6.43) は

$$\int d\mathbf{l} \int d\mathbf{m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = 2 \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{k} - \mathbf{l}) \quad (6.47)$$

と変形される.

図 6.2 (l, m) 空間内の積分範囲

6.2.4 エネルギースペクトルの発展方程式

幾何学因子や波数空間内の積分を経て、準正規近似におけるエネルギースペクトルの発展方程式を求める。(6.17) の $E(l)E(m)$ の係数は、指数関数と δ 関数を除くと、(6.24), (6.47) を用いて、

$$\begin{aligned}
 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)^2 (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z^2}{\pi k^\alpha (lm)^{\alpha+1}} k &= 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)^2 \sqrt{1-x^2}}{\pi k^\alpha (lm)^{\alpha-1}} k \\
 &= 2 \frac{k^2}{\pi l m} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)^2 \sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2} (lm)^{\alpha-2}} k \\
 &= 2 \frac{k^2}{\pi l m} a_{klm} k
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

となる。ここで、(6.24) を用いた。また、

$$a_{klm} \equiv \frac{(l^\alpha - m^\alpha)^2 \sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2} (lm)^{\alpha-2}}, \tag{6.49}$$

とした。同様に、 $E(k)E(m)$ の係数は、指数関数と δ 関数を除くと、

$$\begin{aligned}
 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(m^\alpha - k^\alpha) (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z^2}{\pi k^\alpha (lm)^{\alpha+1}} l &= 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(m^\alpha - k^\alpha) \sqrt{1-x^2}}{\pi k^\alpha (lm)^{\alpha-1}} l \\
 &= 2 \frac{k^2}{\pi l m} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(m^\alpha - k^\alpha) \sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2} (lm)^{\alpha-2}} l \\
 &= - \frac{k^2}{\pi l m} b_{klm} l,
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

となる。ここで,

$$b_{klm} \equiv 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}}, \quad (6.51)$$

とした。 $E(k)E(l)$ の係数は、上の式で l と m を入れ替えたものに等しいので,

$$-\frac{k^2}{\pi lm} b_{kml} m, \quad (6.52)$$

となる。なお、 a_{klm} , b_{klm} , b_{kml} の間には,

$$\begin{aligned} b_{klm} + b_{kml} &= 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}} + 2 \frac{(m^\alpha - l^\alpha)(k^\alpha - l^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}} \\ &= 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)^2 \sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}} \\ &= 2a_{klm} \end{aligned} \quad (6.53)$$

の関係がある。以上より、(6.17) は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu k^2 \right) E(k, t) = T_{\mathcal{E}}(k, t), \quad (6.54a)$$

$$T_{\mathcal{E}}(k, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t), \quad (6.54b)$$

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) &= \frac{2k^2}{\pi lm} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} \\ &\quad \times \{ 2a_{klm} kE(l, s)E(m, s) \\ &\quad - b_{klm} lE(m, s)E(k, s) \\ &\quad - b_{kml} mE(k, s)E(l, s) \}, \end{aligned} \quad (6.54c)$$

となる。ここで、エネルギースペクトルの時間依存性を明確に書いた。

なお、上式の第3項で l と m を交換し、さらに積分の順序を交換しても第3項は変わらないので、(6.54) の $\{\bullet\}$ 内は,

$$\begin{aligned} &2a_{klm} kE(l)E(m) - b_{klm} lE(m)E(k) - b_{kml} mE(k)E(l) \\ &= 2a_{klm} kE(l)E(m) - 2b_{klm} lE(m)E(k) \\ &= (b_{klm} + b_{kml}) kE(l)E(m) - 2b_{klm} lE(m)E(k) \\ &= 2b_{klm} (kE(l) - lE(k))E(m) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、第2式から第3式へは、(6.53) を用い、第3式から最後の表現には、 l

と m の交換を再び用いた。以上を考慮すると、(6.54c) は,

$$T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) = \frac{4k^2}{\pi lm} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} b_{klm} E(m, s) \{ kE(l, s) - lE(k, s) \}, \quad (6.55)$$

とも書けることを注意しておく. (6.54) が準正規近似におけるエネルギースペクトルの時間発展方程式である.

図 6.3 に $\alpha = 2$ の場合の a_{klm} と b_{klm} を示す.

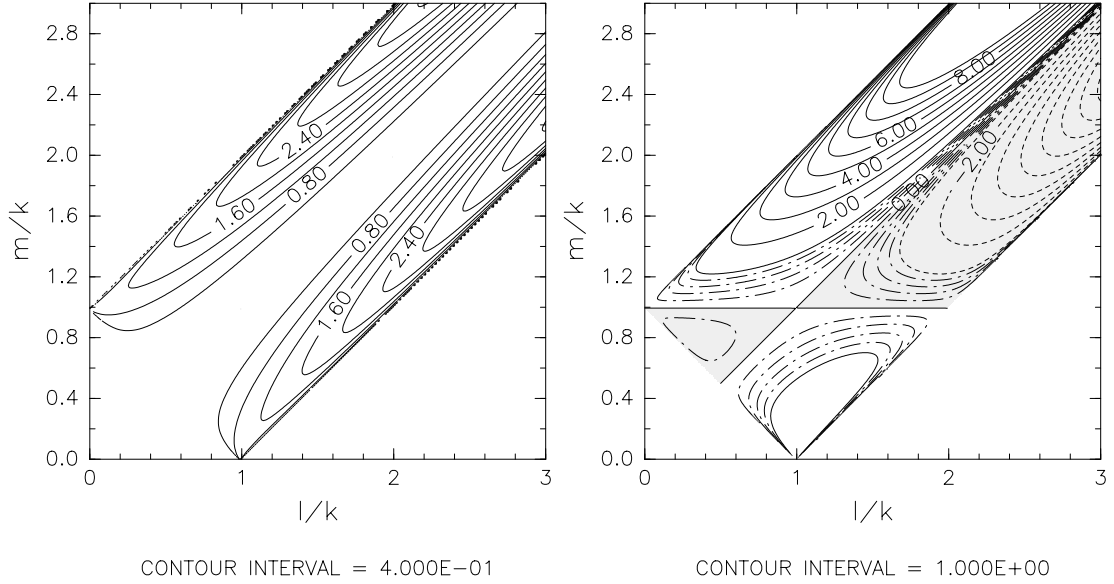


図 6.3 $\alpha = 2$ の場合の a_{klm} (左図) と b_{klm} (右図).

1345

1346 6.2.5 準正規近似理論の特徴

1347 上で導かれた準正規近似のエネルギースペクトル方程式において, もともとの方程式が
1348 持っていたエネルギーやエンストロフィーに関する詳細保存則が成り立っているかどうか
1349 確かめておく.

1350 三波エネルギー伝達関数 (6.54c) は, (6.53) を用いると,

$$\begin{aligned}
 1351 \quad T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) &= \frac{2k^2}{\pi l m} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2 + l^2 + m^2)(t-s)} \\
 1352 &\quad \times [b_{klm} E(m, s) \{kE(l, s) - lE(k, s)\} \\
 1353 &\quad + b_{kml} E(l, s) \{kE(m, s) - mE(k, s)\}], \quad (6.56)
 \end{aligned}$$

と書きなおすことができる. (6.56) を用いてエネルギー詳細保存則を証明する.

$$\begin{aligned}
& T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) + T_{\mathcal{E}}(l, m, k; t) + T_{\mathcal{E}}(m, k, l; t) \\
&= \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} \\
&\quad \times \left[\frac{2k^2}{\pi lm} \{b_{klm} E(m) (kE(l) - lE(k)) + b_{kml} E(l) (kE(m) - mE(k))\} \right. \\
&\quad + \frac{2l^2}{\pi mk} \{b_{lmk} E(k) (lE(m) - mE(l)) + b_{lkm} E(m) (lE(k) - kE(l))\} \\
&\quad \left. + \frac{2m^2}{\pi kl} \{b_{mkl} E(l) (mE(k) - kE(m)) + b_{mlk} E(k) (mE(l) - lE(m))\} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} \\
&\quad \times \left[\left\{ \frac{k^2}{lm} (b_{klm} + b_{kml}) - \frac{l^2}{mk} b_{lkm} - \frac{m^2}{kl} b_{mkl} \right\} kE(l)E(m) \right. \\
&\quad + \left\{ -\frac{k^2}{lm} b_{klm} + \frac{l^2}{mk} (b_{lmk} + b_{lkm}) - \frac{m^2}{kl} b_{mlk} \right\} lE(m)E(k) \\
&\quad \left. + \left\{ -\frac{k^2}{lm} b_{kml} - \frac{l^2}{mk} b_{lmk} + \frac{m^2}{kl} (b_{mkl} + b_{mlk}) \right\} mE(k)E(l) \right]. \quad (6.57)
\end{aligned}$$

ここで, $kE(l)E(m)$ の係数について計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{k^2}{lm} b_{klm} &= \frac{2k^2}{lm} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}} \\
&= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^\alpha(lm)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)}{(klm)^{\alpha-1}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{k}.
\end{aligned}$$

いっぽう,

$$\begin{aligned}
\frac{l^2}{mk} b_{lkm} &= \frac{2l^2}{mk} \frac{(k^\alpha - m^\alpha)(l^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-y^2}}{l^{\alpha+2}(km)^{\alpha-2}} \\
&= \frac{2(k^\alpha - m^\alpha)(l^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-y^2}}{l^\alpha(km)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)}{(klm)^{\alpha-1}} \frac{\sqrt{1-y^2}}{l}.
\end{aligned}$$

正弦定理 (6.27) を用いると,

$$\frac{k^2}{lm} b_{klm} = \frac{l^2}{mk} b_{lkm} \quad (6.58)$$

1374 が示せる. k, l, m のサイクリックな入れ替えに対して, (6.58) と同様の式が成り立つの
 1375 で, (6.57) はゼロとなる. つまり, 準正規近似のエネルギースペクトル方程式でエネルギー
 1376 の詳細保存則が成り立っている.

1377 エネルギースペクトル方程式 (6.54a) に, k^α を乗じるとエンストフィースペクトル方程
 1378 式になるので, エンストロフィーの詳細釣合は,

$$\begin{aligned}
 & k^\alpha T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) + l^\alpha T_{\mathcal{E}}(l, m, k; t) + m^\alpha T_{\mathcal{E}}(m, k, l; t) \\
 &= \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} \\
 &\quad \times \left[\frac{2k^{\alpha+2}}{\pi lm} \{b_{klm} E(m) (kE(l) - lE(k)) + b_{kml} E(l) (kE(m) - mE(k))\} \right. \\
 &\quad + \frac{2l^{\alpha+2}}{\pi mk} \{b_{lmk} E(k) (lE(m) - mE(l)) + b_{lkm} E(m) (lE(k) - kE(l))\} \\
 &\quad \left. + \frac{2m^{\alpha+2}}{\pi kl} \{b_{mkl} E(l) (mE(k) - kE(m)) + b_{mlk} E(k) (mE(l) - lE(m))\} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} \\
 &\quad \times \left[\left\{ \frac{k^{\alpha+2}}{lm} (b_{klm} + b_{kml}) - \frac{l^{\alpha+2}}{mk} b_{lkm} - \frac{m^{\alpha+2}}{kl} b_{mkl} \right\} kE(l)E(m) \right. \\
 &\quad + \left\{ -\frac{k^{\alpha+2}}{lm} b_{klm} + \frac{l^{\alpha+2}}{mk} (b_{lmk} + b_{lkm}) - \frac{m^{\alpha+2}}{kl} b_{mlk} \right\} lE(m)E(k) \\
 &\quad \left. + \left\{ -\frac{k^{\alpha+2}}{lm} b_{kml} - \frac{l^{\alpha+2}}{mk} b_{lmk} + \frac{m^{\alpha+2}}{kl} (b_{mkl} + b_{mlk}) \right\} mE(k)E(l) \right]. \quad (6.59)
 \end{aligned}$$

1388 再び, $kE(l)E(m)$ の係数に注目すると,

$$\begin{aligned}
 & \frac{k^{\alpha+2}}{lm} (b_{klm} + b_{kml}) = \frac{2k^{\alpha+2}}{lm} a_{klm} \\
 &= \frac{2k^{\alpha+2}}{lm} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)^2 \sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2} (lm)^{\alpha-2}} \\
 &= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)^2 \sqrt{1-x^2}}{(lm)^{\alpha-1}}.
 \end{aligned}$$

ここで, (6.53) と (6.49) を用いた. 一方,

$$\begin{aligned}
\frac{l^{\alpha+2}}{mk} b_{lkm} + \frac{m^{\alpha+2}}{kl} b_{mkl} &= \frac{2l^{\alpha+2}}{km} \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-y^2}}{l^{\alpha+2}(km)^{\alpha-2}} \\
&\quad + \frac{2m^{\alpha+2}}{kl} \frac{(m^\alpha - l^\alpha)(k^\alpha - l^\alpha)\sqrt{1-z^2}}{m^{\alpha+2}(kl)^{\alpha-2}} \\
&= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-y^2}}{(km)^{\alpha-1}} \\
&\quad + \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)(l^\alpha - k^\alpha)\sqrt{1-z^2}}{(kl)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k} \left\{ \frac{l(k^\alpha - m^\alpha)}{(km)^{\alpha-1}} + \frac{m(l^\alpha - k^\alpha)}{(kl)^{\alpha-1}} \right\} \\
&= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^\alpha} \left\{ \frac{l^\alpha(k^\alpha - m^\alpha) + m^\alpha(l^\alpha - k^\alpha)}{(lm)^{\alpha-1}} \right\} \\
&= \frac{2(l^\alpha - m^\alpha)^2\sqrt{1-x^2}}{(lm)^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

ここで, 第 2 の表現から第 3 への表現には再び正弦定理 (6.27) を用いた. したがって,

$$\frac{k^{\alpha+2}}{lm} (b_{klm} + b_{kml}) = \frac{l^{\alpha+2}}{mk} b_{lkm} + \frac{m^{\alpha+2}}{kl} b_{mkl} \quad (6.60)$$

が成り立つ. k, l, m をサイクリックに交換した (6.60) も同様に成り立つので, (6.57) はゼロになる. 即ち, エンストロフィー詳細保存則が成り立つ.

エネルギーとエンストロフィーの詳細釣合は, それぞれ

$$\begin{aligned}
&\frac{k^2}{lm} \{ 2a_{klm} k E(l, s) E(m, s) - b_{klm} l E(m, s) E(k, s) - a_{kml} m E(k, s) E(l, s) \}, \\
&\frac{k^{\alpha+2}}{lm} \{ 2a_{klm} k E(l, s) E(m, s) - b_{klm} l E(m, s) E(k, s) - a_{kml} m E(k, s) E(l, s) \},
\end{aligned}$$

の項から計算され, 時間 s に関する積分には依存しないことがわかる. この特徴は, 以下で述べる幾つかの準正規近似の修正版でもエネルギーとエンストロフィーの詳細保存が成り立つことを保証するものである.

エネルギーとエンストロフィーの詳細保存則が成り立つので, 非線型項による波数空間全体でのエネルギー保存とエンストロフィー保存

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dk \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) = 0, \\
&\int_0^\infty dk \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm k^\alpha T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) = 0,
\end{aligned}$$

も成り立つ.

1415 6.2.6 準正規近似理論の欠点

1416 (6.54) は微積分方程式になっているので, その解法には数値計算に頼らざるを得ない. 3
 1417 次元の Navier-Stokes 方程式系の準正規近似のもとでのエネルギースペクトル方程式の
 1418 数値計算は, Ogura (1963)[30] によって行われている. その結果によると, エネルギー
 1419 スペクトルが負になる場合がある. エネルギースペクトルは正值なので, この結果は準正規
 1420 近似が Navier-Stokes 方程式の力学とは矛盾していることを示している. どのような近似
 1421 理論でもそれから得られる結果は, もともとの系において実現可能 (例えば, $E(k) > 0$ な
 1422 ど) な条件を満たさなければいけない. これを realizability と呼ぶ.

1423 ある時刻 t_1 において, $E(k, t_1)$ がゼロになったと仮定する. その時, 次の時刻で $E(k)$
 1424 が負になるか正になるかは, $\left. \frac{\partial E(k)}{\partial t} \right|_{t_1}$ の符号によって決まる. (6.54) の右辺は, $E(k)$ の現
 1425 在だけでなく, 過去の値にも依存するので符号は確定しない.

1426 6.3 準正規 Markov 化近似理論

1427 負のエネルギースペクトルが生じないようにするための一つの方法として, 準正規近似
 1428 を Markov 化する方法がある. このような理論は, 準正規 Markov 化近似 (quasi normal
 1429 Markovian approximation: QNMA) と呼ばれている.*4 ここでは, (6.54) において, エ
 1430 ネルギースペクトル $E(k, s)$ の特性時間が, 粘性による緩和の特性時間に比べて十分長い
 1431 と考え, 三波エネルギー伝達関数 (6.54c), もしくは (6.55) 内のエネルギースペクトルを
 1432 時間 s ではなく, t の関数と見做すことである. このとき, (6.54c) もしくは (6.55) の s
 1433 に関する積分は実行することができ,

$$1434 \quad \theta(k, l, m; t) \equiv \int_0^t e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)(t-s)} ds = \frac{1 - e^{-\nu(k^2+l^2+m^2)t}}{\nu(k^2+l^2+m^2)}, \quad (6.61)$$

1435 となる.*5 そこで, 例えば, 三波エネルギー伝達関数 (6.55) は,

$$1436 \quad T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) = \frac{4k^2}{\pi l m} \theta(k, l, m; t) b_{klm} E(m, t) \{kE(l, t) - lE(k, t)\}, \quad (6.62)$$

1437 に置き換わる.

1438 realizability を見てみる. ある時刻 t_1 で $E(k, t_1) = 0$ になったとする. この時, (6.62)

*4 修正 0-4 次キュムラント近似 (MZCA) とも呼ばれる.

*5 Markov 化近似は $E(k, t)$ の緩和時間が分子粘性による緩和時間と比べて十分に短いとする近似なので, 積分の下限を 0 でなく $-\infty$ とおいて $\theta(k, l, m; t) = \{\nu(k^2 + l^2 + m^2)\}^{-1}$ とする場合がある.

より,

$$T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t_1) = \frac{4k^2}{\pi l m} \theta(k, l, m; t_1) b_{klm} k E(m, t_1) E(l, t_1) \quad (6.63)$$

となり, さらに (6.54b) の積分の対称性から,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t_1) &= \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm \frac{4k^2}{\pi l m} \theta(k, l, m; t_1) \frac{b_{klm} + b_{kml}}{2} k E(m, t_1) E(l, t_1) \\ &= \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm \frac{4k^2}{\pi l m} \theta(k, l, m; t_1) a_{klm} k E(m, t_1) E(l, t_1) \end{aligned} \quad (6.64)$$

である. (6.49) より $a_{klm} > 0$ なので, (6.64) 即ち, $T_{\mathcal{E}}(k, t_1) > 0$ であり, realizability が保障される. また, Markov 化した場合でもエネルギーとエントロピーの詳細保存則は成り立っていることに注意しておく.

6.4 渦減衰準正規 Markov 化近似理論

Markov 化によって realizability が保障され, 負のエネルギースペクトルを防ぐことができるが, 依然として乱流による渦の減衰が理論に取り込まれていないという欠点がある. QNA の異常な振る舞いは, 3 次のモーメントの緩和が十分でないために起こることが Orszag (1970)[32] の研究によって指摘されている. QNA における 3 次モーメントは大きな値に成長するが, 実際にはある値に飽和する. QNA における 3 次モーメントの減衰は分子粘性によるが, 実際には 4 次のキュムラントが 3 次モーメントの減衰をもたらしているのである. したがって, 4 次キュムラントをゼロとする代わりに, 3 次モーメントを緩和させる減衰を採用した近似として, 渦減衰準正規近似 (eddy damped quasi normal approximation: EDQNA) や渦減衰準正規 Markov 化近似 (eddy damped quasi normal Markovian approximation: EDQNMA) が提唱されている. EDQNA や EDQNMA では, 3 次モーメントの式 (6.13) を,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + l^2 + m^2) + \mu_{klm} \right) \langle \hat{q}(-\mathbf{l}) \hat{q}(-\mathbf{m}) \hat{q}(\mathbf{k}) \rangle &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m}) \\ &\times \left\{ \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha m^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(\mathbf{m}) \right. \\ &+ \frac{(m^\alpha - k^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{k^\alpha m^\alpha} \Theta(-\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{m}) \\ &\left. + \frac{(k^\alpha - l^\alpha)(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z}{l^\alpha k^\alpha} \Theta(\mathbf{l}) \Theta(-\mathbf{k}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.65)$$

とする. ここで μ_{klm} は時間の逆数の次元をもった量であり, 三波 $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ に対応する 3 次モーメントの特徴的渦減衰率である. この μ_{klm} の選び方は理論の中では任意で, これ

1465 をどのように選ぶかが次の問題となる．例えば，一様等方性乱流の場合，

$$1466 \quad \mu_{klm} = \mu_k + \mu_l + \mu_m, \quad (6.66)$$

1467 とおき， μ_k をエネルギースペクトル $E(k)$ を使って次元解析的に

$$1468 \quad \mu_k = \mu \{k^{5-\alpha} E(k)\}^{1/2}, \quad (6.67)$$

1469 と表す．*6 ここで， μ は無次元パラメーターであり，エネルギーやエンストロフィー慣性領域
1470 における (Kolmogorov 定数まで含めて) Kolmogorov スペクトルと矛盾しないように定
1471 められる．EDQMNA では，三波エネルギー伝達関数 (6.62) の時定数 $\theta(k, l, m; t)$ は

$$1472 \quad \theta(k, l, m; t) = \frac{1 - \exp[-\{\nu(k^2 + l^2 + m^2) + \mu_{klm}\}t]}{\nu(k^2 + l^2 + m^2) + \mu_{klm}} \quad (6.68)$$

1473 もしくは，

$$1474 \quad \theta(k, l, m; t) = \frac{1}{\nu(k^2 + l^2 + m^2) + \mu_{klm}} \quad (6.69)$$

1475 である．

1476 6.5 その他の完結理論

1477 θ_{klm} を現象論的にではなく，流体力学の基礎方程式から決定する完結理論が
1478 Kraichnan (1958)[17, 18] によって導入された直接相互作用近似 (Direct Interaction
1479 Approximation:DIA) 理論である．DIA 理論は，EDQNM 理論の μ のような adjustable
1480 parameter を含まず，より良い完結理論であるが，K41 スペクトルの導出には失敗した．
1481 DIA 理論の方程式は，Euler 的場の多時刻相関関数を含むので方程式がガリレイ変換不
1482 変性を破るという欠点があった．DIA をさらに改良し K41 スペクトルを Kolmogorov
1483 定数まで含めて予測できるようにした理論が，abridged Lagrangian history direct
1484 interaction approximation (AHL DIA) である (Kraichnan, 1965[19])．様々な完結近似
1485 の関係を図式化してまとめたものを図 6.4 に示す．*7

*6 次元解析によると

$$[\mathcal{E}] = [\psi][q] = \frac{L^2}{T} \frac{L^{2-\alpha}}{T} = \frac{L^{4-\alpha}}{T^2},$$

$$[\mathcal{E}] = [E(k)]L^{-1}.$$

以上より，(6.67) が導かれる． $\alpha = 2$ の場合の μ_k は Orszag (1970) によって提唱された．任意の α の場合の (6.67) は，Burgess and Shepherd (2013) により提唱されている．

*7 完結理論は，後藤 (1998)，木田 & 柳瀬 (1999) に詳しく解説されているので，興味を持った人はこれらを参考にして下さい．

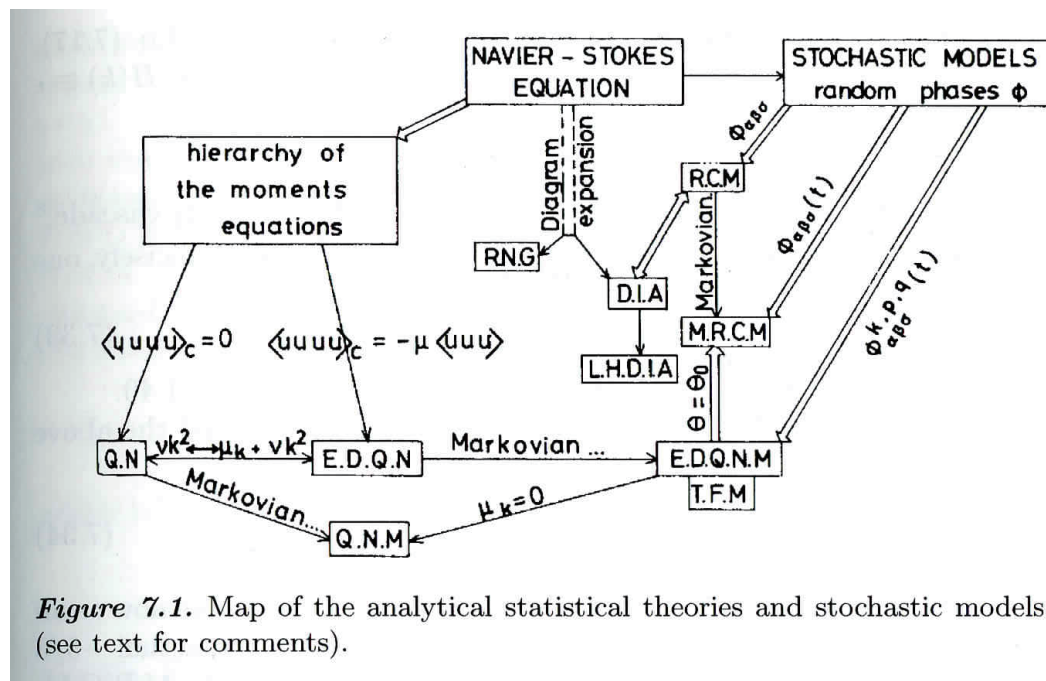


Figure 7.1. Map of the analytical statistical theories and stochastic models land (see text for comments).

図 6.4 様々な完結理論の関係. (Lesieur, 2008)

第 7 章

波数空間内のダイナミクス

慣性領域や赤外領域における波数空間のダイナミクス (伝達関数やフラックスの性質) を詳細に議論してみる. 初めは完結近似に依存しない議論を行い, その後前節で導入した準正規近似理論に基づく議論を行う.

7.1 フラックスの分解

エネルギーフラックス $\Pi_{\mathcal{E}}(k)$ は, 三波エネルギー伝達関数 $T_{\mathcal{E}}(k, l, m)$ を用いて,

$$\Pi_{\mathcal{E}}(k) = \frac{1}{2} \int_k^{\infty} dk' \int_0^{\infty} dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m), \quad (7.1)$$

と表すことができるが, エネルギーの詳細釣合を用いるとさらに別の形に書き下すことができることを示す (Kraichnan, 1971[20]).

三波エネルギー伝達関数 $T_{\mathcal{E}}(k, l, m)$ を図 6.2 の積分領域の外側ではゼロであると定義し, (7.1) の m に関する積分領域を次のように拡張する:

$$\Pi_{\mathcal{E}}(k) = \frac{1}{2} \int_k^{\infty} dk' \int_0^{\infty} dl \int_0^{\infty} dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m). \quad (7.2)$$

1499 l, m に関する積分は4つに分解することができる:

$$\begin{aligned}
 1500 \quad \int_k^\infty dk' \int_0^\infty dl \int_0^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m) &= \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^k dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m) \\
 1501 &+ \underbrace{\int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m)}_{\text{I}} \\
 1502 &+ \underbrace{\int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl \int_0^k dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m)}_{\text{II}} \\
 1503 &+ \underbrace{\int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m)}_{\text{III}}. \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

1504 先ず I の項に詳細釣り合を用いると

$$\begin{aligned}
 1505 \quad \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m) &= - \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(l, m, k') \\
 1506 &- \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(m, k', l) \\
 1507 &= - \int_0^k dl \int_k^\infty dm \int_k^\infty dk' T_{\mathcal{E}}(l, m, k') \\
 1508 &- \int_k^\infty dm \int_k^\infty dk' \int_0^k dl T_{\mathcal{E}}(m, k', l) \\
 1509 &= - \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m) \\
 1510 &- \underbrace{\int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl \int_0^k dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m)}_{= \text{II}} \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

1511 となる. 最後の表現は, その前の式の第1項, 第2項においてそれぞれ $(l, m, k') \rightarrow$
 1512 (k', l, m) , $(m, k', l) \rightarrow (k', l, m)$ という置き換えを行った. (7.4) の第2項は (7.3) の II
 1513 項に等しい. したがって, I と II の項の和は (7.4) の最後の表現の第1項に等しい. また,
 1514 III の項は k よりも大きな3つの波数 k', l, m の間でのエネルギーのやり取りを表してお
 1515 り, k よりも小さな波数との相互作用がないために, k を通過するエネルギーは存在しな

い. 即ち, III の項はゼロである. 実際に, 詳細釣合を用いて

$$\begin{aligned}
 \int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m) &= - \int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(l, m, k') \\
 &\quad - \int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(m, k', l) \\
 &= - \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm \int_k^\infty dk' T_{\mathcal{E}}(l, m, k') \\
 &\quad - \int_k^\infty dm \int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl T_{\mathcal{E}}(m, k', l), \\
 &= -2 \int_k^\infty dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m),
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 最後の表式はその前の式の第 1 項で $(l, m, k') \rightarrow (k', l, m)$, 第 2 項では $(m, k', l) \rightarrow (k', l, m)$ と変数の置き換えを行って得られた. したがって, III の項がゼロであることが示された. 以上をまとめると, エネルギーフラックスは,

$$\Pi_{\mathcal{E}}(k) = \Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k) - \Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k), \quad (7.5a)$$

$$\Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k) \equiv \frac{1}{2} \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^k dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m), \quad (7.5b)$$

$$\Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k) \equiv \frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m), \quad (7.5c)$$

と分解することができる. $\Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k)$ は, k よりも小さな波数 l, m と k よりも大きな波数 k' との相互作用により, k よりも大きな波数に流れるエネルギーを表す. 一方, $\Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k)$ は, k よりも大きな波数 l, m と k よりも小さな波数 k' との相互作用により, k よりも小さな波数に流れるエネルギーを表す. 波数 l と m は対称的であるので, (7.5b), (7.5c) を

$$\Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k) = \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^l dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m), \quad (7.6a)$$

$$\Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k) = \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_l^\infty dm T_{\mathcal{E}}(k', l, m), \quad (7.6b)$$

と表すこともできる. このばあい, $\Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k)$ は, $m \leq l \leq k \leq k'$, $\Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k)$ は, $k' \leq k \leq l \leq m$ となる三波 (k', l, m) の相互作用になっている (図 7.1).

以上の議論は, エネルギーの詳細釣合のみを用いているので, エンストロフィーフラックスに対しても同様の議論が成り立つ. 即ち, エンストロフィーフラックスは次のように

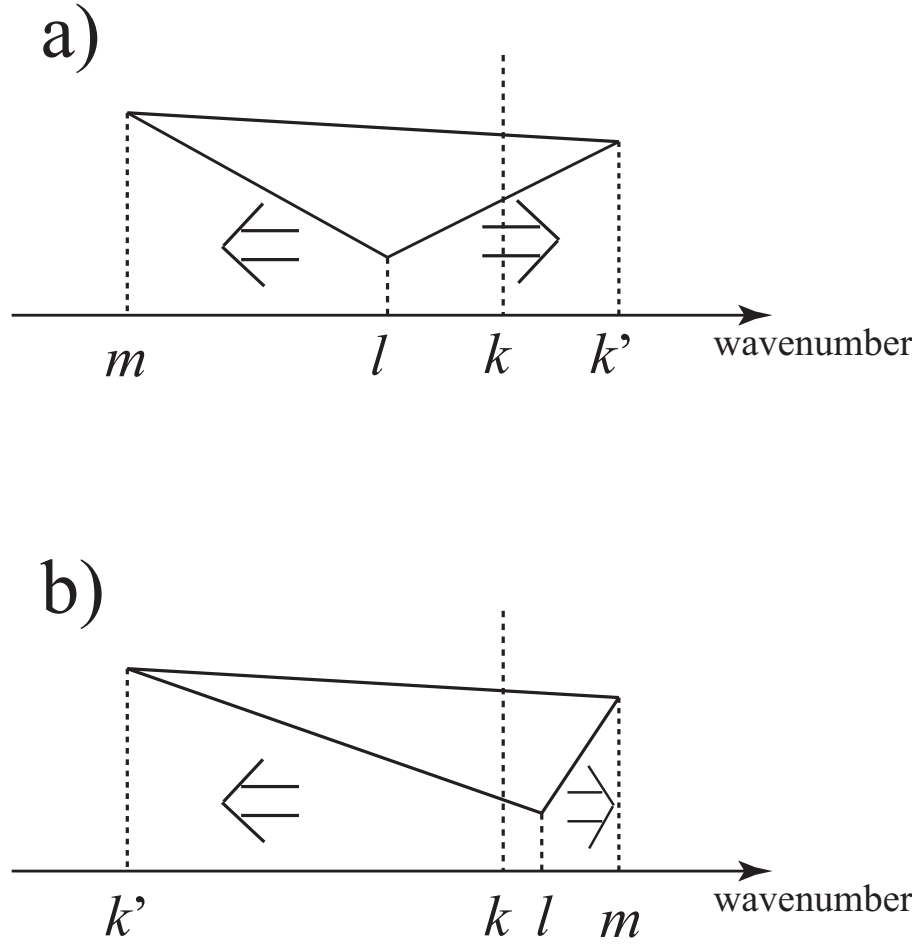


図 7.1 フラックスの分解. a) $\Pi^{(+)}(k)$, b) $\Pi^{(-)}(k)$ の模式図. $\Leftarrow, \Rightarrow$ はエネルギーやエントロフィーのフラックスを表す.

1538 分解できる:

$$1539 \quad \Pi_Q(k) = \Pi_Q^{(+)}(k) - \Pi_Q^{(-)}(k), \quad (7.7a)$$

$$1540 \quad \Pi_Q^{(+)}(k) \equiv \frac{1}{2} \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^k dm T_Q(k', l, m) \quad (7.7b)$$

$$1541 \quad = \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^l dm T_Q(k', l, m), \quad (7.7c)$$

$$1542 \quad \Pi_Q^{(-)}(k) \equiv \frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_k^\infty dm T_Q(k', l, m) \quad (7.7d)$$

$$1543 \quad = \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_l^\infty dm T_Q(k', l, m). \quad (7.7e)$$

7.2 自己相似スペクトル領域におけるフラックス

エネルギースペクトルが自己相似的なスペクトルを持つ場合, 即ち,

$$E(k) \sim k^{-n}, \quad (7.8)$$

のときのエネルギーフラックスとエンストロフィーフラックスの性質を調べる.

7.2.1 波数の規格化

分解して得られた 2 つのフラックスは, それぞれ異なるタイプの三波相互作用から構成されている. $\Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k)$ と $\Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k)$ を構成する三波をそれぞれ Type A, Type B と呼ぶことにする.

三波を k を基準にして中間の波数 l の絶対的な大きさを決め, さらに, l と相対的な k', m の大きさを計ることにする. 前者の方法により, 三角形を構成する三波の絶対的な大きさが決まり, 後者の方法により三角形の形が決まることになる.

Type A, Type B の三波を規格化する. 規格化の仕方が異なるので, 別々に議論する. $m \leq l \leq k \leq k'$ の関係にある Type A の三波 (k', l, m) を新しい波数に関する無次元変数 (u, v, w) で表す. 先ず, 中間の波数 l を k を用いて,

$$l = k/u, \quad (7.9)$$

と表し, 最少の波数 m と最大の波数 k' はそれぞれ,

$$m = lv, \quad (7.10)$$

$$k' = lw, \quad (7.11)$$

と規格化する. このとき, $m \leq l \leq k \leq k'$ は $v \leq 1 \leq u \leq w$ となる. $\Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k)$ の積分領域は

$$\begin{aligned} \int_0^k dl \int_k^\infty dk' \int_0^l dm &= \int_1^\infty du \int_u^\infty dw \int_0^1 dv \frac{k^3}{u^4} \\ &= \int_0^1 dv \int_1^\infty dw \int_1^w dw \frac{k^3}{u^4} \\ &= \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw \int_1^w dw \frac{k^3}{u^4}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

と変換される. 最後の変形には, w の最大値は三波からの束縛 $k' = l + m^{*1}$ から, ∞ ではなく $1 + v$ にとれることを用いた.

^{*1} k' の最大値は $k' = l + m$ なのでこれは $lw = l + lv$ に等しい.

同様にして, $k' \leq k \leq l \leq m$ の関係にある Type B の三波 (k', l, m) を新しい波数に関する無次元変数 (u, v, w) で表す. 先ず, 中間の波数 l を k を用いて,

$$l = k/u, \quad (7.13)$$

と表し, 最少の波数 k' と最大の波数 m はそれぞれ

$$k' = lv, \quad (7.14)$$

$$m = lw, \quad (7.15)$$

と規格化する. このとき, $k' \leq k \leq l \leq m$ は $v \leq u \leq 1 \leq w$ となる. $\Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k)$ の積分領域は

$$\begin{aligned} \int_k^\infty dl \int_0^k dk' \int_l^\infty dm &= \int_0^1 du \int_0^u dv \int_1^\infty dw \frac{k^3}{u^4} \\ &= \int_0^1 dv \int_1^\infty dw \int_v^1 du \frac{k^3}{u^4} \\ &= \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw \int_v^1 du \frac{k^3}{u^4}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

と変換される. 最後の変形には, w の最大値は三波からの束縛 $m = k' - l$ から $1 + v$ にとっている.

詳細釣合 ((5.2) と (5.8)) より,

$$T_{\mathcal{E}}(k', l, m) = \frac{m^\alpha - l^\alpha}{k'^\alpha - m^\alpha} T_{\mathcal{E}}(l, m, k'), \quad (7.17)$$

が導かれる. (7.17) を無次元化した波数で表現すると, Type A では

$$T_{\mathcal{E}}(k', l, m) = \frac{1 - v^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha} T_{\mathcal{E}}(l, lv, lw), \quad (7.18)$$

Type B では

$$T_{\mathcal{E}}(k', l, m) = \frac{w^\alpha - 1}{v^\alpha - w^\alpha} T_{\mathcal{E}}(l, lv, lw), \quad (7.19)$$

となる.

7.2.2 三波エネルギー伝達関数の次元解析

散逸項を除けばエネルギースペクトルの時間発展方程式は

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int dl \int dm T_{\mathcal{E}}(k, l, m)$$

と書ける。したがって,

$$[E(k)]T^{-1} = L^{-2}[T_{\mathcal{E}}(k, l, m)] \quad (7.20)$$

である。ここで,

$$[E(k)] = L^{5-\alpha}T^{-2} \quad (7.21)$$

なので,

$$[T_{\mathcal{E}}(k, l, m)] = L^{7-\alpha}T^{-3} \quad (7.22)$$

である。次元解析によって、三波エネルギー伝達関数をエネルギースペクトルと波数で表現すると

$$T_{\mathcal{E}}(k, l, m) \sim k^{(1-\alpha)/2}E(k)^{3/2} \quad (7.23)$$

が得られる。

エネルギースペクトルが自己相似的なスペクトルを持つ場合、即ち、(7.8) のとき、(7.23) より

$$\begin{aligned} \frac{T_{\mathcal{E}}(ak, al, am)}{T_{\mathcal{E}}(k, l, m)} &\sim \frac{(ak)^{(1-\alpha)/2}E(ak)^{3/2}}{k^{(1-\alpha)/2}E(k)^{3/2}} \\ &= a^{(1-3n-\alpha)/2}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

である。

7.2.3 フラックスの解析

以上の準備のもと、エネルギーフラックス (7.6a), (7.6b) はそれぞれ

$$\Pi_{\mathcal{E}}^{(+)}(k) = k^{(7-3n-\alpha)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw \int_1^w u^{(3n+\alpha-9)/2} du \frac{1-v^\alpha}{v^\alpha-w^\alpha} T_{\mathcal{E}}(1, v, w), \quad (7.25a)$$

$$\Pi_{\mathcal{E}}^{(-)}(k) = k^{(7-3n-\alpha)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw \int_v^1 u^{(3n+\alpha-9)/2} du \frac{w^\alpha-1}{v^\alpha-w^\alpha} T_{\mathcal{E}}(1, v, w), \quad (7.25b)$$

と書き換えられる。これらをまとめると以下を得る:

$$\Pi_{\mathcal{E}}(k) = k^{(7-3n-\alpha)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw W_{\mathcal{E}}^\alpha(v, w, n) T_{\mathcal{E}}(1, v, w), \quad (7.26a)$$

$$W_{\mathcal{E}}^\alpha(v, w, n) = (v^\alpha - w^\alpha)^{-1} \left[(1-v^\alpha) \int_1^w u^{(3n+\alpha-9)/2} du - (w^\alpha - 1) \int_v^1 u^{(3n+\alpha-9)/2} du \right]. \quad (7.26b)$$

同様の議論により, エンストロフィーフラックスも書き換えることができる. 三波エネルギー伝達関数と三波エンストロフィー伝達関数の関係

$$T_Q(k', l, m) = k'^\alpha T_E(k', l, m) \\ = \begin{cases} (lw)^\alpha T_E(lw, l, lv) = \left(\frac{kw}{u}\right)^\alpha T_E(lw, l, lv), & \text{(Type A)}, \\ (lv)^\alpha T_E(lv, l, lw) = \left(\frac{kv}{u}\right)^\alpha T_E(lv, l, lw), & \text{(Type B)}, \end{cases} \quad (7.27)$$

を使って,

$$\Pi_Q(k) = k^{(7-3n+\alpha)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw W_Q^\alpha(v, w, n) T_E(1, v, w), \quad (7.28a)$$

$$W_Q^\alpha(v, w, n) = (v^\alpha - w^\alpha)^{-1} \left[(1 - v^\alpha) w^\alpha \int_1^w u^{(3n-\alpha-9)/2} du - (w^\alpha - 1) v^\alpha \int_v^1 u^{(3n-\alpha-9)/2} du \right], \quad (7.28b)$$

と書ける.

7.3 慣性領域におけるフラックス

エネルギー慣性領域におけるエネルギーフラックスとエンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィーフラックスは逆向きであることが以下のように証明できる.

7.3.1 エネルギー慣性領域

まず, エネルギー慣性領域について議論を行う. 慣性領域ではフラックスは波数に依存しない. (7.26) のエネルギーフラックスが波数に依存しないためには

$$n = \frac{7 - \alpha}{3} \quad (7.29)$$

でなければならない. このとき重み関数 (7.26b) は

$$W_E^\alpha(v, w, (7 - \alpha)/3) = (v^\alpha - w^\alpha)^{-1} \left[(1 - v^\alpha) \int_1^w u^{-1} du - (w^\alpha - 1) \int_v^1 u^{-1} du \right] \\ = (v^\alpha - w^\alpha)^{-1} [(1 - v^\alpha) \ln w + (w^\alpha - 1) \ln v] \quad (7.30)$$

である. いっぽう, (7.28b) は

$$W_Q^\alpha(v, w, (7 - \alpha)/3) = (v^\alpha - w^\alpha)^{-1} \left[(1 - v^\alpha) w^\alpha \int_1^w u^{-\alpha-1} du - (w^\alpha - 1) v^\alpha \int_v^1 u^{-\alpha-1} du \right] \\ = -\{\alpha(v^\alpha - w^\alpha)\}^{-1} [(1 - v^\alpha) w^\alpha (w^{-\alpha} - 1) - (w^\alpha - 1) v^\alpha (1 - v^{-\alpha})] \\ = 0 \quad (7.31)$$

である。したがって、エネルギー慣性領域ではエンストロフィーフラックスはゼロである。

重み関数 $W_{\mathcal{E}}^{\alpha}(v, w, (7-\alpha)/3)$ は正值であることが証明できる。なお、 $0 < v < 1$, $w > 1$ であることに注意する。

$$I(v, w) \equiv (1 - v^{\alpha}) \ln w + (w^{\alpha} - 1) \ln v \quad (7.32)$$

と定義する。 $I(1, w) = 0$ である。 I を v で偏微分すると

$$\frac{\partial I(v, w)}{\partial v} = -\alpha v^{\alpha-1} \ln w + \frac{w^{\alpha} - 1}{v} \quad (7.33)$$

である。さらに

$$F(w) \equiv \left[\frac{\partial I(v, w)}{\partial v} \right]_{v=1} = -\alpha \ln w + w^{\alpha} - 1 \quad (7.34)$$

と定義すると、 $F(1) = 0$, $dF/dw = \alpha w^{\alpha-1} - \alpha/w > 0$ である。そこで、 $F(w) > 0$, 即ち $w^{\alpha} - 1 > \alpha \ln w$ であることがわかる。また、 $v^{-1} > v^{\alpha-1}$ なので、したがって、 $\partial I(v, w)/\partial v > 0$ 。そこで、 $I(v, w) < 0$ が言える。このことから、 $W_{\mathcal{E}}^{\alpha}(v, w, (7-\alpha)/3) > 0$ が証明される。

7.3.2 エンストロフィー慣性領域

次に、エンストロフィー慣性領域について議論を行う。(7.28) のエンストロフィーフラックスが波数に依存しないためには

$$n = \frac{7 + \alpha}{3} \quad (7.35)$$

でなければならない。このとき重み関数 (7.26b), (7.28b) はそれぞれ、

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{E}}^{\alpha}(v, w, (7 + \alpha)/3) &= (v^{\alpha} - w^{\alpha})^{-1} \left[(1 - v^{\alpha}) \int_1^w u^{\alpha-1} du - (w^{\alpha} - 1) \int_v^1 u^{\alpha-1} du \right] \\ &= \{\alpha(v^{\alpha} - w^{\alpha})\}^{-1} [(1 - v^{\alpha})(w^{\alpha} - 1) - (w^{\alpha} - 1)(1 - v^{\alpha})], \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{Q}}^{\alpha}(v, w, (7 + \alpha)/3) &= (v^{\alpha} - w^{\alpha})^{-1} \left[(1 - v^{\alpha}) w^{\alpha} \int_1^w u^{-1} du - (w^{\alpha} - 1) v^{\alpha} \int_v^1 u^{-1} du \right] \\ &= (v^{\alpha} - w^{\alpha})^{-1} [(1 - v^{\alpha}) w^{\alpha} \ln w + (w^{\alpha} - 1) v^{\alpha} \ln v], \end{aligned} \quad (7.37)$$

である。したがって、エンストロフィー慣性領域ではエネルギーフラックスはゼロであることがわかる。

重み関数 $W_{\mathcal{Q}}^{\alpha}(v, w, (7 + \alpha)/3)$ が負値であることが証明できる。再び、 $0 < v < 1$, $w > 1$ であることに注意する。

$$J(v, w) \equiv (1 - v^{\alpha}) w^{\alpha} \ln w + (w^{\alpha} - 1) v^{\alpha} \ln v \quad (7.38)$$

1667 と定義する. $J(1, w) = 0$ である. J を v で偏微分すると

$$1668 \quad \frac{\partial J(v, w)}{\partial v} = \{(w^\alpha - 1)(\alpha \ln v + 1) - \alpha w^\alpha \ln w\} v^{\alpha-1} \quad (7.39)$$

1669 である. さらに

$$1670 \quad G(w) \equiv \left[\frac{\partial J(v, w)}{\partial v} \right]_{v=1} = (w^\alpha - 1) - \alpha w^\alpha \ln w \quad (7.40)$$

1671 と定義すると, $G(1) = 0$, $dG/dw = -\alpha^2 w^{\alpha-1} \ln w < 0$ である. そこで, $G(w) < 0$, 即
 1672 ち $\alpha w^\alpha \ln w > w^\alpha - 1$ であることがわかる. また, $1 > 1 + \alpha \ln v$ なので, したがって,
 1673 $\partial J(v, w)/\partial v < 0$. そこで, $J(v, w) > 0$ が言える. このことから, $W_{\mathcal{Q}}^\alpha(v, w, (7+\alpha)/3) < 0$
 1674 が証明される.

1675 7.3.3 渦減衰準正規 Markov 化近似理論に基づく解析

1676 これまでの解析は, 何の近似もせずに行ってきた. ここからは, 渦減衰準正規 Markov
 1677 化近似のもとで (7.26a) に現れている三波エネルギー伝達関数 $T_{\mathcal{E}}(1, v, w)$ の性質につい
 1678 て調べることにする. $T_{\mathcal{E}}(1, v, w)$ の符号を決めることで, 慣性領域におけるエネルギーフ
 1679 ラックスやエンストロフィーフラックスの向きが決定される.

1680 EDQNM 近似における三波エネルギー伝達関数は,

$$1681 \quad T_{\mathcal{E}}(k, l, m; t) = \frac{2k^2}{\pi l m} \theta(k, l, m; t) \\
 1682 \quad \times \{2a_{klm} k E(l, t) E(m, t) - b_{klm} l E(m, t) E(k, t) - b_{kml} m E(k, t) E(l, t)\}, \\
 1683 \quad (7.41a)$$

$$1684 \quad \theta(k, l, m; t) = \mu^{-1} \left\{ [k^{5-\alpha} E(k)]^{1/2} + [l^{5-\alpha} E(l)]^{1/2} + [m^{5-\alpha} E(m)]^{1/2} \right\}^{-1} \quad (7.41b)$$

1685 である ((6.54c) 参照.). ここで, 慣性領域のダイナミクスを考えていくので, 分子粘性
 1686 は重要でないとして $\nu = 0$ とした.

1687 エネルギースペクトルが自己相似なスペクトル (7.8) を持つ場合, 三波エネルギー伝達
 1688 関数 (7.41a) は,

$$1689 \quad T_{\mathcal{E}}(1, v, w) = \frac{4a_{1vw}}{\pi v w} \theta(1, v, w) \{E(1)\}^2 (vw)^{-n} K(v, w, n, \alpha) \quad (7.42a)$$

$$1690 \quad K(v, w, n, \alpha) \equiv 1 - \frac{b_{1vw}}{2a_{1vw}} v^{n+1} - \frac{b_{1wv}}{2a_{1vw}} w^{n+1}, \quad (7.42b)$$

1691 となる. 幾何学因子は, 定義 (6.49), (6.51) から

$$1692 \quad \frac{b_{1vw}}{2a_{1vw}} = \frac{1 - w^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha}, \\
 1693 \quad \frac{b_{1wv}}{2a_{1vw}} = \frac{v^\alpha - 1}{v^\alpha - w^\alpha},$$

となるので, したがって (7.42b) は

$$K(v, w, n, \alpha) = 1 - \frac{1 - w^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha} v^{n+1} - \frac{v^\alpha - 1}{v^\alpha - w^\alpha} w^{n+1}, \quad (7.43)$$

となる. K は $n = -1$ と $n = \alpha - 1$ のときにゼロになることが示される. 実際に計算すると,

$$\begin{aligned} K(v, w, -1, \alpha) &= 1 - \frac{1 - w^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha} - \frac{v^\alpha - 1}{v^\alpha - w^\alpha} \\ &= \frac{v^\alpha - w^\alpha - 1 + w^\alpha - v^\alpha + 1}{v^\alpha - w^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(v, w, \alpha - 1, \alpha) &= 1 - \frac{1 - w^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha} v^\alpha - \frac{v^\alpha - 1}{v^\alpha - w^\alpha} w^\alpha \\ &= \frac{v^\alpha - w^\alpha - v^\alpha + (vw)^\alpha - (vw)^\alpha + w^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

つまり, $n = -1$ と $n = \alpha - 1$ のときには三波エネルギー伝達関数, さらにエネルギー伝達関数とエンストロフィー伝達関数はゼロになる. このことは 非粘性 $\nu = 0$ においてエネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルが定常であることを意味している. $n = -1$, $n = \alpha - 1$ のスペクトルは, それぞれエネルギーとエンストロフィーが各波数モードに等分配されたスペクトルである.*2

次に 三波エネルギー伝達関数の符号を調べる. スペクトルの傾きの変化に対する, $K(v, w, n, \alpha)$ の変化率は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} K(v, w, n, \alpha) &= -\frac{1 - w^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha} v^{n+1} \ln v - \frac{v^\alpha - 1}{v^\alpha - w^\alpha} w^{n+1} \ln w \\ &= \frac{w^\alpha - 1}{w^\alpha - v^\alpha} v^{n+1} \ln(v^{-1}) - \frac{1 - v^\alpha}{w^\alpha - v^\alpha} w^{n+1} \ln w. \end{aligned} \quad (7.44)$$

である.*3 ここで, $0 < v < 1$, $1 < w$ なので, (7.44) の第 1, 2 項はともに正である.

*2 エンストロフィーが各波数モードに当分配されている $|\hat{q}(\mathbf{k})|^2 = \text{const}$ のとき,

$$Q(k) = 2\pi k |\hat{q}(\mathbf{k})| \sim k^1.$$

つまり, エンストロフィー等分配状態のときのエンストロフィースペクトルは波数の 1 乗に比例する. 同様の議論でエネルギー等分配状態のエネルギースペクトルは, 波数の 1 乗に比例する. またエンストロフィー等分配状態の, エネルギースペクトルは, エネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの関係から

$$E(k) = k^{-\alpha} Q(k) \sim k^{1-\alpha}$$

である.

*3 $y = A^x$ のとき, $\ln y = x \ln A$ とかけるので, dy/dx は

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \ln A, \\ \frac{dy}{dx} &= A^x \ln A, \end{aligned}$$

1712 $n \rightarrow -\infty$ では第2項はゼロになるので (7.44) は正, $n \rightarrow \infty$ では第1項がゼロになる
 1713 ので (7.44) は負となる. したがって, $K(v, w, n, \alpha)$ は $n < -1$, $n > \alpha - 1$ のときは負,
 1714 $-1 < n < \alpha - 1$ のときは正になることがわかる.

1715 (7.42a) に戻ると, $T_{\mathcal{E}}(1, v, w)$ のうち, $K(v, w, n, \alpha)$ を除く因子は全て正であるので
 1716 $T_{\mathcal{E}}(1, v, w)$ の符号は $K(v, w, n, \alpha)$ の符号で決まる. そこで, 上の議論をまとめると,

$$1717 \quad T_{\mathcal{E}}(1, v, w) \begin{cases} < 0 & (n < -1, n > \alpha - 1 \text{ のとき}) \\ = 0 & (n = -1, \alpha - 1 \text{ のとき}) \\ > 0 & (-1 < n < \alpha - 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7.45)$$

1718 となる. $T_{\mathcal{E}}(1, v, w)$ は, 小さい波数 v と大きい波数 w との相互作用により中間の波数 (波
 1719 数 1) が単位時間に得るエネルギーを表しているので, これが負符号であることは中間の
 1720 波数から低波数と高波数へエネルギー (とエンストロフィー) が輸送されることを意味し,
 1721 一方, $T_{\mathcal{E}}(1, v, w)$ の正符号は, 中間の波数に向けて低波数と高波数からエネルギー (とエ
 1722 ンストロフィー) が輸送されることを意味する.

1723 なお, エネルギー慣性領域では $n = (7 - \alpha)/3$ なので,

$$1724 \quad \frac{7 - \alpha}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 10, \quad (7.46)$$

$$1725 \quad \frac{7 - \alpha}{3} = \alpha - 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2}, \quad (7.47)$$

1726 が得られる. つまり, $\alpha = 5/2, 10$ において伝達関数はゼロになる. したがって, (7.45) を
 1727 α の値で整理すると,

$$1728 \quad T_{\mathcal{E}}(1, v, w) \begin{cases} < 0 & (\alpha < 5/2, \alpha > 10 \text{ のとき}) \\ = 0 & (\alpha = 5/2, 10 \text{ のとき}) \\ > 0 & (5/2 < \alpha < 10 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7.48)$$

1729 となる. $5/2 < \alpha < 10$ ではエネルギーフラックスが高波数側へ向かうことになり, NS で
 1730 知られた描像と異なることになる.

1731 7.4 赤外領域のスペクトル

1732 一様等方性乱流の波数スペクトルには, スペクトルのピーク (エネルギー保持領域)
 1733 よりも波数が小さい領域 ($k \rightarrow 0$) にも波数の冪乗則に従うスペクトルが形成される
 1734 ことが知られている (図 1.2). このような波数領域のスペクトルは赤外スペクトル
 1735 (infrared spectrum) と呼ばれている. 赤外スペクトルの理論的な導出は, NS 系に関して

は Basdevant, *et al.* (1978)[1] が EDQNM 方程式を用いて行っている. 一方, Davidson (2007)[6] は Kármán–Howarth 方程式^{*4}からの導出を行っている. また CHM-AM 系の赤外スペクトルは, Yanase & Yamada (1984)[45] と Iwayama, *et al.* (2001)[15] が準正規近似タイプの方程式を用いて, Fox & Davidson (2008)[8] が Kármán–Howarth 方程式を用いて導出している. 直接数値実験による検証は, NS 系に関しては Chasnov (1997)[5], Ossia & Lesieur(2001)[33], Fox & Davidson (2008) などによって, CHM-AM 系に関しては, Iwayama, *et al.* (2001), Fox & Davidson (2008) によって行われている. また, 任意の α の場合の赤外スペクトルが, Iwayama & Watanabe (2013)^{*5}によって調べられている.

赤外スペクトルの研究は, 急峻な初期スペクトルからの発展する減衰性乱流では, 普遍的な冪を持つ赤外スペクトルが存在する, という点で興味深いだけでなく, 系の大域的な保存則 (ある物理量の空間相関関数のモーメントの不変性) とも関連している, という点で興味深い研究課題である.

7.4.1 赤外領域スペクトルの導出

本小節では, Iwayama & Watanabe (2013) に従って減衰性 α 乱流の赤外スペクトルの導出を行う. 過去に行われた研究は, エネルギースペクトルに注目してきたが, ここではエンストロフィースペクトルに注目する. 以下で見るようにエンストロフィースペクトルに注目すると, α に依存しない普遍的な性質が現れる. 導出には, EDQNM 完結方程式を用いる. 先ず, EDQNM 近似のもとでのエンストロフィースペクトルの発展方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu_p k^{2p}\right) Q(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \left(\Pi_Q^{(+)}(k) - \Pi_Q^{(-)}(k)\right), \quad (7.49a)$$

$$\Pi_Q^{(+)}(k) = \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^l dm T_Q(k', l, m), \quad (7.49b)$$

$$\Pi_Q^{(-)}(k) = \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_l^\infty dm T_Q(k', l, m), \quad (7.49c)$$

$$T_Q(k, l, m) = \frac{2k^{\alpha+2}}{\pi l m} \theta(k, l, m) \times \left\{ 2a_{klm} \frac{k}{(lm)^\alpha} Q(l)Q(m) - b_{klm} \frac{l}{(km)^\alpha} Q(m)Q(k) - b_{kml} \frac{m}{(kl)^\alpha} Q(k)Q(l) \right\}, \quad (7.49d)$$

$$\theta(k, l, m) = \mu^{-1} \left\{ [k^{5-2\alpha} Q(k)]^{1/2} + [l^{5-2\alpha} Q(l)]^{1/2} + [m^{5-2\alpha} Q(m)]^{1/2} \right\}^{-1} \quad (7.49e)$$

^{*4} 速度場の空間相関関数の時間発展方程式

^{*5} T. Iwayama & T. Watanabe. Universal spectrum in the infrared range of two-dimensional turbulent flows. *submitted to Phys. Fluids*.

1762 である. 三波エンストロフィー伝達関数と3次モーメントの減衰の時定数 $\theta(k, l, m)$ の表
 1763 現は, (7.41a), (7.41b) において, エネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの
 1764 関係式 $Q(k) = k^\alpha E(k)$ を用いて, エンストロフィースペクトルを使った表現に書き換え
 1765 てある.

1766 赤外領域のスペクトルは, 赤外領域の波数 k とエネルギー保持領域の波数 l, m との相
 1767 互作用により形成されることが知られている. このような三波は $k \ll l \simeq m$ となる非局
 1768 所相互作用で, 7.1 節における Type B に分類される. そこで, エンストロフィーの発展方
 1769 程式 (7.49a) は,

$$1770 \quad \frac{\partial}{\partial t} Q(k) \simeq \frac{\partial}{\partial k} \Pi_Q^{(-)}(k) \quad (7.50)$$

1771 と書ける. ここで, (7.49a) の左辺第2項の超粘性項は $k \rightarrow 0$ では無視できることを用い
 1772 ている. $\Pi_Q^{(-)}(k)$ は 図 6.2 の積分領域の形の考慮すると,

$$\begin{aligned} 1773 \quad \Pi_Q^{(-)}(k) &= \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_l^\infty dm T_Q(k', l, m) \\ 1774 \quad &= \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_l^{l+k'} dm T_Q(k', l, m) \\ 1775 \quad &= \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_{-1}^{k'/(2l)} dz \frac{k'l}{m} T_Q(k', l, m) \end{aligned} \quad (7.51)$$

1776 と書ける. ここで, 余弦定理 (6.30) を用いて m から z への変数変換を行った.

1777 $\Pi_Q^{(-)}(k)$ の波数依存性からエンストロフィースペクトルの波数依存性が求められる. そ
 1778 こで $\Pi_Q^{(-)}(k)$ の波数依存性を調べる. より具体的には小さなパラメーター $\epsilon \equiv k'/l \ll 1$
 1779 による三波エンストロフィー伝達関数の漸近展開を行って主要項を取出し, その結果を
 1780 (7.51) に代入し, $\Pi_Q^{(-)}(k)$ の主要項を求めることによりエンストロフィーフラックスの波
 1781 数依存性を求める.

1782 幾何学的係数を陽に書き下し, 正弦定理 (6.27) を用いると三波エンストロフィー伝達関
 1783 数 (7.49d) は, 以下ようになる:

$$\begin{aligned} 1784 \quad T_Q(k', l, m) &= \frac{4k'\sqrt{1-z^2}}{\pi l^{\alpha-1} m^\alpha} \theta(k', l, m) \left[\frac{(m^\alpha - l^\alpha)^2}{(lm)^\alpha} k' Q(l) Q(m) \right. \\ 1785 \quad &\quad \left. - \frac{(m^\alpha - l^\alpha)}{k'^\alpha} \left\{ \frac{(m^\alpha - k'^\alpha)}{m^\alpha} l Q(m) - \frac{(l^\alpha - k'^\alpha)}{l^\alpha} m Q(l) \right\} Q(k') \right]. \\ 1786 \end{aligned} \quad (7.52)$$

1787 三波エンストロフィー伝達関数の $\epsilon = k'/l$ による漸近展開を計算するための準備を行う.

余弦定理 (6.30) より,

$$m^\alpha = l^\alpha \left[1 - \alpha z \epsilon + \frac{1}{2} \alpha \{1 + (\alpha - 2) z^2\} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right]. \quad (7.53)$$

$$m^\alpha - l^\alpha = l^\alpha \left[-\alpha z \epsilon + \frac{1}{2} \alpha \{1 + (\alpha - 2) z^2\} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right]. \quad (7.54)$$

$$(m^\alpha - l^\alpha)^2 = l^{2\alpha} [\alpha^2 z^2 \epsilon^2 - \alpha^2 z \{1 + (\alpha - 2) z^2\} \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4)]. \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} m^\alpha - k'^\alpha &= m^\alpha - l^\alpha \epsilon^\alpha \\ &= l^\alpha \left[1 - \epsilon^\alpha - \alpha z \epsilon + \frac{1}{2} \alpha \{1 + (\alpha - 2) z^2\} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$l^\alpha - k'^\alpha = l^\alpha (1 - \epsilon^\alpha). \quad (7.57)$$

さらにエンストロフィースペクトルは次のように展開できる:

$$\begin{aligned} Q(m) &= Q(l \{1 - \epsilon z + \mathcal{O}(\epsilon^2)\}) \\ &= Q(l) - l z \epsilon \frac{\partial Q(l)}{\partial l} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (7.58)$$

上の近似式を用いて (7.52) の大括弧内の第 1 項の主要項は

$$\frac{(m^\alpha - l^\alpha)^2}{(lm)^\alpha} k' Q(l) Q(m) \simeq \alpha^2 z^2 k' \epsilon^2 \{Q(l)\}^2 \quad (7.59)$$

となる. (7.52) の大括弧内の第 2 項の主要項は

$$\begin{aligned} &\frac{m^\alpha - l^\alpha}{k'^\alpha} \left[\frac{(m^\alpha - k'^\alpha)}{m^\alpha} l Q(m) - \frac{(l^\alpha - k'^\alpha)}{l^\alpha} m Q(l) \right] Q(k') \\ &= -\frac{\alpha l^{\alpha+1} z \epsilon}{k'^\alpha} \left[(1 + \alpha z \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)) (1 - \epsilon^\alpha - \alpha z \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \left(Q(l) - l z \epsilon \frac{\partial Q(l)}{\partial l} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - (1 - z \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)) (1 - \epsilon^\alpha) Q(l) \right] Q(k') \\ &\simeq -\frac{\alpha l^{\alpha+1} z^2 \epsilon^2}{k'^\alpha} \left[\left\{ 2Q(l) - \frac{\partial \{lQ(l)\}}{\partial l} \right\} - \left\{ (\alpha + 2)Q(l) - \frac{\partial \{lQ(l)\}}{\partial l} \right\} \epsilon^\alpha \right] Q(k'), \end{aligned} \quad (7.60)$$

となる. $\alpha > 0$ のとき (7.60) の中括弧内の第 1 項が (7.60) の主要項であり, $\alpha < 0$ のときには第 2 項が主要項になる. さらに $\theta(k', l, m)$ の主要項は

$$\begin{aligned} \theta(k', l, m) &= \mu^{-1} \{l^{5-2\alpha} Q(l)\}^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{k'^{5-2\alpha} Q(k')}{l^{5-2\alpha} Q(l)} \right)^{1/2} + \left(\frac{m^{5-2\alpha} Q(m)}{l^{5-2\alpha} Q(l)} \right)^{1/2} \right]^{-1} \\ &= \mu^{-1} \{l^{5-2\alpha} Q(l)\}^{-1/2} \left[1 + \epsilon^{(5-2\alpha+n)/2} + (1 - \alpha z \epsilon + \dots)^{(5-2\alpha+n)/2} \right]^{-1}. \\ &\simeq (2\mu)^{-1} \{l^{5-2\alpha} Q(l)\}^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \epsilon^{(5-2\alpha+n)/2} \right]^{-1} \simeq \theta(k', l, l) \end{aligned} \quad (7.61)$$

ここで、自己相似なスケーリング $Q(k) \sim k^n$ を仮定している。もし、(7.61) の中括弧の第二項の指数が 0 以上であれば、 $\theta(k', l, m)$ の主要項は k' に依存しなくなる。この条件は、 $n \geq 2\alpha - 5$ である。物理的に適切な系は $\alpha \leq 3$ なので、 $n \geq 2\alpha - 5$ の条件は、 $n \geq 1$ を意味する。エントロフィースペクトルに対するこの制約は、以下で見るように得られる結果と矛盾がない。

(7.59) ~ (7.61) を (7.52) に代入すると

$$\begin{aligned}
 T_Q(k', l, m) &\simeq \frac{4k' z^2 \sqrt{1-z^2}}{\pi l^{2\alpha-1}} \theta(k', l, l) \epsilon^2 \left[\alpha^2 k' \{Q(l)\}^2 \right. \\
 &\quad - \frac{\alpha l^{\alpha+1}}{k'^{\alpha}} \left\{ \frac{\partial \{lQ(l)\}}{\partial l} - 2Q(l) \right\} Q(k') H(\alpha) \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha l^{\alpha+1}}{k'^{\alpha}} \epsilon^{\alpha} \left\{ \frac{\partial \{lQ(l)\}}{\partial l} - (\alpha+2)Q(l) \right\} Q(k') H(-\alpha) \right] \\
 &= \frac{4z^2 \sqrt{1-z^2}}{\pi} \theta(k', l, l) \left[\alpha^2 l^{-(2\alpha+1)} \{Q(l)\}^2 k'^4 \right. \\
 &\quad - \alpha l^{-\alpha} \left\{ \frac{\partial \{lQ(l)\}}{\partial l} - 2Q(l) \right\} k'^{3-\alpha} Q(k') H(\alpha) \\
 &\quad \left. + \alpha l^{-2\alpha} \left\{ \frac{\partial \{lQ(l)\}}{\partial l} - (\alpha+2)Q(l) \right\} k'^3 Q(k') H(-\alpha) \right], \tag{7.62}
 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $H(x)$ は Heaviside の階段関数である：

$$H(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0), \\ 1, & (x > 0). \end{cases} \tag{7.63}$$

(7.62) を (7.51) に代入し、まず z に関する積分を実行する。 z に関する積分は、

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{2k'/l} z^2 \sqrt{1-z^2} dz &\simeq \int_{-1}^0 z^2 \sqrt{1-z^2} dz \\
 &= \int_0^1 z^2 \sqrt{1-z^2} dz \\
 &= \frac{\pi}{16}, \tag{7.64}
 \end{aligned}$$

となる.*6 また, l に関する積分の下限も非局所相互作用を考慮して $sup(k, k'/\epsilon)$ と取り直す. 以上より, エンストロフィー伝達関数

$$\begin{aligned} T_Q(k) &\simeq \frac{\partial}{\partial k} \Pi_Q^{(-)}(k) \\ &\simeq \frac{\alpha^2}{4} \left[\int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta(k, l, l) l^{-(2\alpha+1)} \{Q_\alpha(l)\}^2 dl \right] k^5 \\ &\quad - 2\nu_T^{(+)} k^{4-\alpha} Q_\alpha(k) H(\alpha) - 2\nu_T^{(-)} k^4 Q_\alpha(k) H(-\alpha), \end{aligned} \quad (7.66a)$$

を得る. ここで

$$\nu_T^{(+)} \equiv \frac{\alpha}{8} \int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta(k, l, l) l^{-\alpha} \left[\frac{\partial \{l Q_\alpha(l)\}}{\partial l} - 2Q_\alpha(l) \right] dl, \quad (7.66b)$$

$$\nu_T^{(-)} \equiv \frac{|\alpha|}{8} \int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta(k, l, l) l^{-2\alpha} \left[\frac{\partial \{l Q_\alpha(l)\}}{\partial l} - (\alpha + 2)Q_\alpha(l) \right] dl, \quad (7.66c)$$

は渦粘性係数である. (7.66) の l に関する積分は下限はエネルギー保持領域程度であり, したがって積分の値は k に依存しないことを注意しておく.

一方, エンストロフィースペクトル $Q(k)$ は, 渦度 q の相関関数の Fourier 変換 $\Theta(\mathbf{k})$ を用いると ((6.7) 参照),

$$\begin{aligned} Q(k) &= \pi k \Theta(\mathbf{k}) = \frac{\pi k}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \langle q(\mathbf{x}) q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_0^{\infty} r dr \langle q(\mathbf{x}) q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \langle q(\mathbf{x}) q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle kr J_0(kr) dr, \end{aligned} \quad (7.67)$$

と表現できる. ここで, 渦度の相関関数の一様等方性を用いている. また, $J_0(x)$ は第一種 Bessel 関数で,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \theta) d\theta, \quad (x \geq 0), \quad (7.68)$$

*6

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^2 \sqrt{1-z^2} dz &= \frac{1}{2} \int_0^1 \xi^{1/2} \sqrt{1-\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

第一式では $\xi \equiv z^2$ と変換した. B は beta 関数, Γ は gamma 関数である.

1849 で定義される.*7 Bessel 関数の級数表現,

$$1850 \quad J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{1}{(k!)\Gamma(k+1)} x^{2k} \quad (7.70)$$

$$1851 \quad = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6 + \mathcal{O}(x^8) \quad (7.71)$$

1852 を用いると, エンストロフィースペクトルは波数の級数展開の形で

$$1853 \quad Q(k) = \frac{J}{4\pi}k + \frac{L}{4\pi}k^3 + \frac{I}{16\pi}k^5 + \dots \quad (7.72a)$$

$$1854 \quad J = \int_{\Omega} \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}, \quad (7.72b)$$

$$1855 \quad L = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} r^2 \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}, \quad (7.72c)$$

$$1856 \quad I = \frac{1}{16} \int_{\Omega} r^4 \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}, \quad (7.72d)$$

1857 と書ける. (7.66a) と (7.72a) を (7.50) に代入すると,

$$\begin{aligned} 1858 \quad & \left\{ \frac{1}{4\pi}k \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{4\pi}k^3 \frac{dL}{dt} + \frac{1}{16\pi}k^5 \frac{dI}{dt} + \dots \right\} \\ 1859 \quad & \simeq \frac{\alpha^2}{4} \left[\int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta(k, l, l) l^{-(2\alpha+1)} \{Q_{\alpha}(l)\}^2 dl \right] k^5 \\ 1860 \quad & - 2\nu_{\text{T}}^{(+)} k^{4-\alpha} Q_{\alpha}(k) H(\alpha) - 2\nu_{\text{T}}^{(-)} k^4 Q_{\alpha}(k) H(-\alpha), \\ 1861 \quad & \quad (7.73) \end{aligned}$$

1862 が得られる. 赤外領域 $k \rightarrow 0$ では $Q(k) \rightarrow 0$ となることを仮定すると, (7.73) 右辺第 2,
1863 3 項は無視できる. そこで, J, L が不変量であることが導かれる. さらに (7.73) の右辺第
1864 1 項の被積分関数は正定値なので, $dI/dt > 0$, 即ち, I は時間の増加関数である.

1865 以上の解析より, 赤外領域のエンストロフィースペクトルは初期条件に依存し, 初期ス
1866 pektルが $k \rightarrow 0$ で k や k^3 のスペクトルを持つならば過渡的にそれらの形が保たれ, 次

*7 ここで, (7.67) の第 2 式からの変形には, 以下の計算を行った:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \theta} d\theta &= 2 \int_{-1}^1 \frac{e^{-ixz}}{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{\cos xz}{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos(x \cos \theta) d\theta \\ &= 2\pi J_0(x). \end{aligned} \quad (7.69)$$

第に k^5 のスペクトルに浸食される。また、初期スペクトルが急峻 ($k \rightarrow 0$ で $Q(k) \sim k^s$, ($s \geq 5$)) ならば, $Q(k) \sim k^5$ となる。したがって、赤外領域のエンストロフィースペクトルの傾きは, α の値に依存しないことがわかる。

NS 系では赤外領域のエネルギースペクトルは, $E(k \rightarrow 0) \sim k^{-1}$, $E(k \rightarrow 0) \sim k$ が過渡的に存在し, 急峻な初期スペクトルからは $E(k \rightarrow 0) \sim k^3$ となることが知られている (Davidson, 2007). NS 系では $Q(k) = k^2 E(k)$ なので, これらのスペクトルは上記の解析と一致する。また, CHM-AM 系 ($\alpha = -2$) では, 全エネルギースペクトルは急峻な初期スペクトルから発展したとき, k^5 に比例することが Iwayama, *et al.* (2001) により導かれている。CHM-AM 系の全エネルギーは, α 乱流系におけるエンストロフィーに対応するので, この結果も上記の解析と一致する。

また, 上記の解析は渦粘性についても示唆を与えている。(7.66b), (7.66c) は k に依存しない。そこで, $\alpha > 0$ のときには渦粘性は $k^{4-\alpha}$ に, $\alpha < 0$ の場合には k^4 の波数依存性を持つことになる。

数値実験による検証

Iwayama & Watanabe (2013) によって行われた数値実験の結果を図 7.2–7.4 に示す。初期スペクトルとして,

$$Q(k) \propto k^s \exp \left[-\frac{|s|}{2} \left(\frac{k}{k_p} \right)^2 \right], \quad k_p = 50 \quad (7.74)$$

を与え, $s = 1, 3, 5, 7$ について, $\alpha = 1, 2, 3$ の場合を計算した。低波数側に十分なスペクトルの領域を確保するため, $8\pi \times 8\pi$ の正方形領域, 二重周期境界条件, 解像度 4096^2 , $p = 1$ の通常粘性を課し, $Re = 100$ でシミュレーションを行った結果である。 $Q(k) \sim Jk$, $Q(k) \sim Lk^3$ のスペクトルが過渡的に存在し, J, L が不変量であることがわかる。また狭い波数領域の初期スペクトルからの発展は, $Q(k) \sim Ik^5$ となることも見て取れる。

7.4.2 赤外領域スペクトルの運動学

前節までに示した赤外領域のエンストロフィースペクトルの傾きを生む渦度場の例を挙げる。これは, Davidson (2007) によって考察されたもので, ここではそれを紹介する。渦の具体的な形を与え, それを空間中に無作為に分布させることにより作られる渦度場のエンストロフィースペクトルを求める。考える渦の形としては, Gauss 型単極子渦, ピークの渦度と逆符号の裾野を持つ Gauss 型単極子渦, Gauss 型双極子渦の 3 種類である。

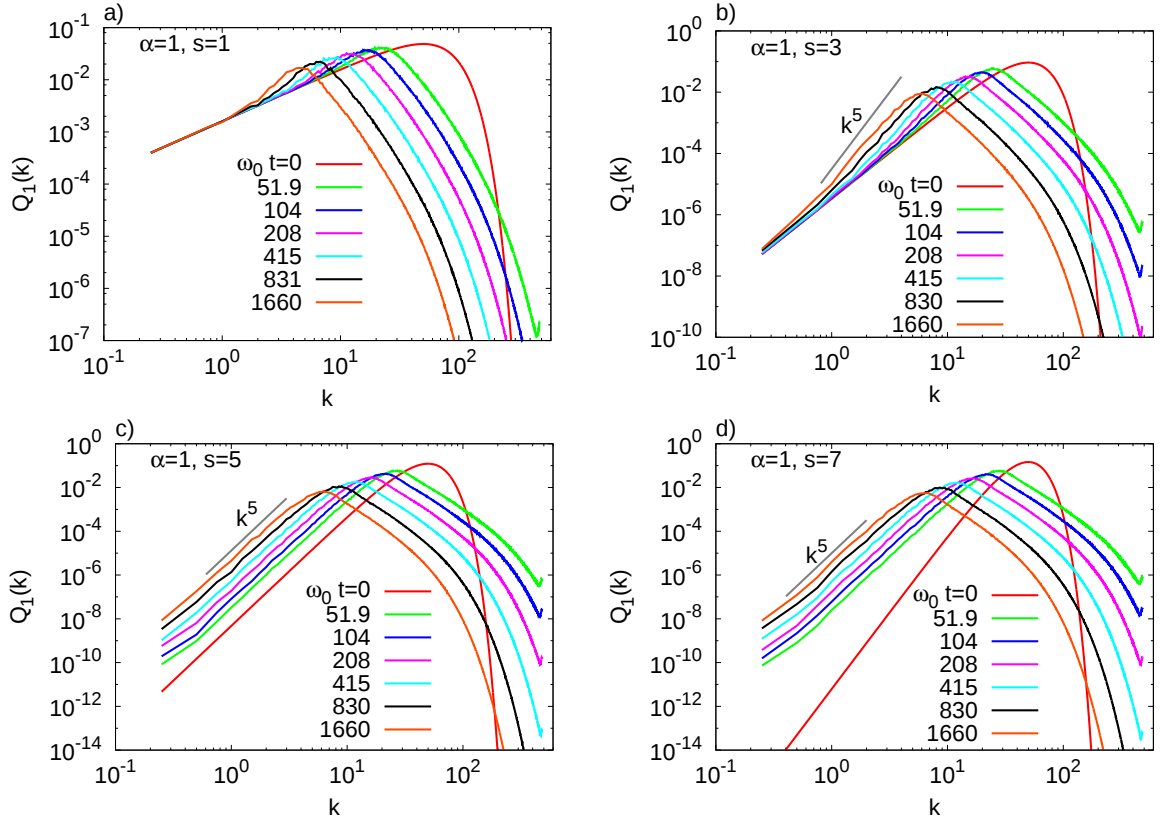


図 7.2 Evolution of the enstrophy spectrum for $\alpha = 1$ starting with a) $s = 1$, b) $s = 3$, c) $s = 5$, and d) $s = 7$. The plotted times correspond to $\omega_0 t = 0, 51.9, 104, 208, 415, 830$, and $1,660$.

1895 Gauss 型単極子渦

1896 $\boldsymbol{x}$ に中心を持ち、強さ $\mathcal{Q}$ で半径 ℓ の Gauss 型渦、

$$1897 \quad q = \mathcal{Q} \exp \left[-2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x})^2 / \ell^2 \right] \quad (7.75)$$

1898 を考える. $\mathcal{Q}, \ell$ は定数とする. このような渦を, 空間中に統計的に一様に無作為に分布さ
1899 せる. このとき渦度場は,

$$1900 \quad q = \sum_n \delta_n |\mathcal{Q}| \exp \left[-2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_n)^2 / \ell^2 \right], \quad (7.76)$$

1901 で与えられる. ここで, δ_n は渦の符号を与え,

$$1902 \quad \delta_n = \pm 1, \quad (7.77a)$$

$$1903 \quad \langle \delta_m \delta_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (7.77b)$$

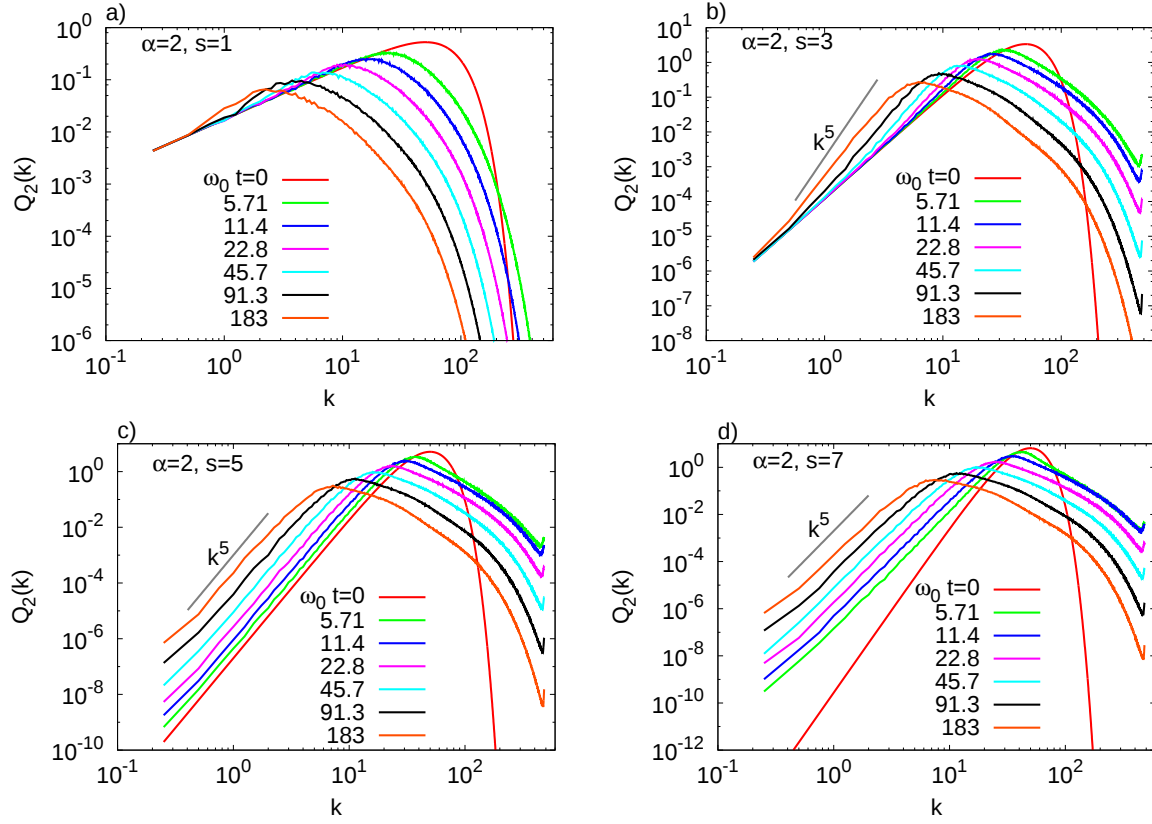


図 7.3 Evolution of the enstrophy spectrum for $\alpha = 2$ with a) $s = 1$, b) $s = 3$, c) $s = 5$, and d) $s = 7$. The plotted times correspond to $\omega_0 t = 0, 5.71, 11.4, 22.8, 45.7, 91.3$, and 183 .

という性質を持つ乱数であり、 $\mathbf{x}_n$ も統計的に一様なランダムな変数で、これらは互いに独立であるとする。(7.76) の渦度場の 2 点相関関数は、

$$\begin{aligned}
 \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle &= \langle q(0)q(\mathbf{r}) \rangle = \langle qq' \rangle \\
 &= \sum_m \sum_n \langle \delta_m \delta_n \rangle \mathcal{Q}^2 \langle \exp [-2\mathbf{x}_m^2/\ell^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2/\ell^2] \rangle \\
 &= \mathcal{Q}^2 \sum_n \langle \exp [-2\{\mathbf{x}_n^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2\}/\ell^2] \rangle. \quad (7.78)
 \end{aligned}$$

ここで、統計的一様性と (7.77b) を用いた。 $\mathbf{x}_n$ と同様の統計的性質をもった新しい変数、

$$\mathbf{y}_n \equiv \mathbf{x}_n - \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad (7.79)$$

を導入すると、(7.78) は

$$\begin{aligned}
 \langle qq' \rangle &= \mathcal{Q}^2 \exp[-r^2/\ell^2] \sum_n \langle \exp [-4\mathbf{y}_n^2/\ell^2] \rangle \\
 &= \langle q^2 \rangle \exp[-r^2/\ell^2], \quad (7.80)
 \end{aligned}$$

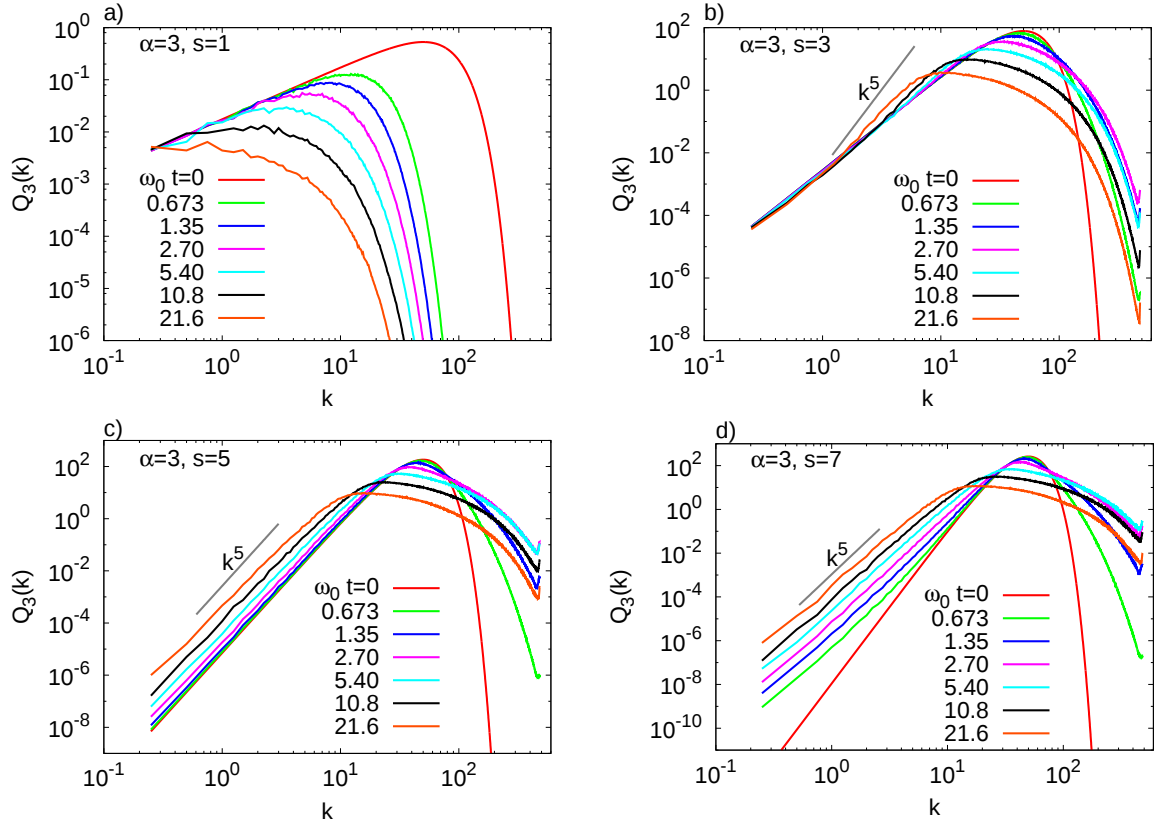


図 7.4 Evolution of the enstrophy spectrum for $\alpha = 3$ starting with a) $s = 1$, b) $s = 3$, c) $s = 5$, and d) $s = 7$. The plotted times correspond to $\omega_0 t = 0, 0.673, 1.35, 2.70, 5.40, 10.8$, and 21.6 .

1914 となる. (7.67) から (7.76) を持つ渦度場のエントロフィースペクトルは,

$$\begin{aligned}
 1915 \quad Q(k) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle q^2 \rangle \exp[-r^2/\ell^2] kr J_0(kr) dr \\
 1916 \quad &= \frac{1}{2} \langle q^2 \rangle \ell \left(\frac{k\ell}{2} \right) \exp \left[-\frac{(k\ell)^2}{4} \right], \quad (7.81)
 \end{aligned}$$

である ((7.84) 参照)。^{*8} 即ち, $Q(k \rightarrow 0) \sim k$ となるエンストロフィースペクトルが得られる。

(7.72b)–(7.72d) で定義される積分量を求めておく。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{2n+1} \exp[-r^2/\ell^2] dr &= \frac{1}{2} \ell^{2n+2} \int_0^\infty \xi^n \exp[-\xi] d\xi \\ &= \frac{1}{2} \ell^{2n+2} \Gamma(n+1) \end{aligned} \quad (7.88)$$

を用いて,

$$J = \pi \ell^2 \langle q^2 \rangle, \quad (7.89)$$

$$L = -\frac{1}{4} \pi \ell^4 \langle q^2 \rangle, \quad (7.90)$$

$$I = \frac{1}{8} \pi \ell^6 \langle q^2 \rangle, \quad (7.91)$$

と計算できる。

^{*8} Bessel 関数と Gauss 関数を含む積分の公式を記しておく。実数の μ, ν で $\mu + \nu > 0$ という条件のもとで,

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x^{\mu-1} J_\nu(bx) dx = \frac{\Gamma((\mu+\nu)/2) b^\nu}{2^{\nu+1} a^{\mu+\nu} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}; \nu+1; -\frac{b^2}{4a^2}\right), \quad (7.82)$$

ここで, ${}_1F_1$ は一般化された超幾何級数,

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{z^n}{n!}, \quad (7.83)$$

である。特に, $\nu = 0, \mu = 2n, n \in \mathbb{N}$ の場合は,

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x J_0(bx) dx = \frac{1}{2a^2} \exp\left[-\frac{b^2}{4a^2}\right], \quad (7.84)$$

を用いて,

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x^{2n+1} J_0(bx) dx = -\frac{\partial}{\partial a^2} \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x^{2n-1} J_0(bx) dx, \quad (7.85)$$

とよく知られた Gauss 関数のモーメントの計算のときのように (7.84) を次々に微分することにより得られる。具体的には,

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x^3 J_0(bx) dx = \frac{1}{2a^4} \left(1 - \frac{b^2}{4a^2}\right) \exp\left[-\frac{b^2}{4a^2}\right], \quad (7.86)$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x^5 J_0(bx) dx = \frac{1}{a^6} \left(1 - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^4}{32a^4}\right) \exp\left[-\frac{b^2}{4a^2}\right], \quad (7.87)$$

である。

1927 負のすそ野を持つ Gauss 型単極子渦

1928 $\mathbf{x}$ に中心を持ち, 強さ $\mathcal{Q}$ で半径 ℓ の Gauss 型渦,

$$1929 \quad q = \mathcal{Q} \left\{ 1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{x})^2}{\ell^2} \right\} \exp[-2(\mathbf{r} - \mathbf{x})^2/\ell^2], \quad (7.92)$$

1930 を考える. $\mathcal{Q}, \ell$ は再び定数である. このような渦を, 空間中に統計的に一様に無作為に分
1931 布させる. このとき渦度場は,

$$1932 \quad q = \sum_n \delta_n |\mathcal{Q}| \left\{ 1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2}{\ell^2} \right\} \exp[-2(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2/\ell^2], \quad (7.93)$$

1933 で与えられる. (7.93) の渦度場の 2 点相関関数は,

$$\begin{aligned} 1934 \quad \langle qq' \rangle &= \sum_m \sum_n \langle \delta_m \delta_n \rangle \mathcal{Q}^2 \left\langle \left\{ 1 - \frac{2\mathbf{x}_m^2}{\ell^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2}{\ell^2} \right\} \exp[-2\mathbf{x}_m^2/\ell^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2/\ell^2] \right\rangle \\ 1935 \quad &= \mathcal{Q}^2 \sum_n \left\langle \left\{ 1 - \frac{2\mathbf{x}_n^2}{\ell^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2}{\ell^2} \right\} \exp[-2\{\mathbf{x}_n^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2\}/\ell^2] \right\rangle, \\ 1936 \end{aligned} \quad (7.94)$$

1937 である. ここで, 統計的一様性と (7.77b) を用いた. 再び, (7.79) で定義される新しい変数
1938 $\mathbf{y}_n$ を導入すると, (7.94) は

$$\begin{aligned} 1939 \quad \langle qq' \rangle &= \mathcal{Q}^2 \exp[-r^2/\ell^2] \sum_n \left\langle 1 - \frac{4}{\ell^2} \left(\frac{r^2}{4} + \mathbf{y}_n^2 \right) \right. \\ 1940 \quad &\quad \left. + \frac{2}{\ell^4} \left\{ \frac{r^4}{16} + \frac{r^2}{2} \mathbf{y}_n^2 + \mathbf{y}_n^4 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{y}_n)^2 \right\} \exp[-4\mathbf{y}_n^2/\ell^2] \right\rangle \\ 1941 \quad &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}^2 \exp[-r^2/\ell^2] \sum_n \left\langle \left\{ \left(1 - z_n^2 + \frac{1}{4} z_n^4 \right) - \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{r^4}{4\ell^4} \right\} \exp(-z_n^2) \right\rangle \\ 1942 \quad &= \langle q^2 \rangle \exp[-r^2/\ell^2] \left(1 - \frac{2r^2}{\ell^2} + \frac{r^4}{2\ell^4} \right), \quad (7.95) \end{aligned}$$

1943 を得る. ここで, 第 1 式から第 2 式へは,

$$\begin{aligned} 1944 \quad \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{y})^2 \exp[-4\mathbf{y}^2/\ell^2] \rangle &= r^{(x)2} \langle y^{(x)2} \exp[-4\mathbf{y}^2/\ell^2] \rangle \\ 1945 \quad &\quad + r^{(y)2} \langle y^{(y)2} \exp[-4\mathbf{y}^2/\ell^2] \rangle \\ 1946 \quad &\quad + 2r^{(x)} r^{(y)} \langle y^{(x)} y^{(y)} \exp[-4\mathbf{y}^2/\ell^2] \rangle \\ 1947 \quad &= \frac{1}{2} r^2 \langle \mathbf{y}^2 \exp[-4\mathbf{y}^2/\ell^2] \rangle, \quad (7.96) \end{aligned}$$

を用い,

$$z_n \equiv 4\mathbf{y}_n^2/\ell^2, \quad (7.97)$$

というランダムな変数を導入した. (7.96) では, $\mathbf{y}$ の x, y 成分である $y^{(x)}, y^{(y)}$ の統計的独立性と $\mathbf{y}$ の統計的等方性を用いている. さらに, 第 2 式から第 3 式へは,

$$\begin{aligned} \langle z^{2n} \exp[-z^2] \rangle &= \int_0^\infty z^{2n} \exp[-z^2] dz^2 \\ &= \int_0^\infty \xi^n \exp[-\xi] d\xi \\ &= \Gamma(n+1), \end{aligned} \quad (7.98)$$

を用いた.

(7.67) から (7.93) を持つ渦度場のエンストロフィースペクトルは,

$$Q(k) = \frac{1}{4} \langle q^2 \rangle \ell \left(\frac{k\ell}{2} \right)^5 \exp \left[-\frac{(k\ell)^2}{4} \right], \quad (7.99)$$

である ((7.84), (7.86), (7.87) 参照). 即ち, $Q(k \rightarrow 0) \sim k^5$ となるエンストロフィースペクトルが得られる.

再び, (7.72b)–(7.72d) で定義される積分量を求めておく. (7.88) を用いて,

$$J = 0, \quad (7.100)$$

$$L = 0, \quad (7.101)$$

$$I = \frac{1}{8} \pi \ell^6 \langle q^2 \rangle, \quad (7.102)$$

と計算できる.

Gauss 型双極子渦

$\mathbf{x}$ に中心を持ち, $\hat{\mathbf{e}}$ の方向を持つ, Gauss 型双極子渦,

$$q = \mathcal{Q} \left\{ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}}{\ell} \right\} \exp \left[-2(\mathbf{r} - \mathbf{x})^2/\ell^2 \right], \quad (7.103)$$

を考える. $\mathcal{Q}, \ell$ は定数である. このような渦を空間中に統計的に一様は無作為に分布させる. このとき渦度場は,

$$q = \sum_n \delta_n |\mathcal{Q}| \left\{ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n}{\ell} \right\} \exp \left[-2(\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2/\ell^2 \right], \quad (7.104)$$

で与えられる. $\delta_n, \mathbf{x}_n, \hat{\mathbf{e}}_n$ はそれぞれ独立なランダムな変数で, $\hat{\mathbf{e}}_n$ は統計的等方性と,

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_n^2 \rangle = 1 \quad (7.105)$$

1973 を満たすとする. (7.104) の渦度場の 2 点相関関数は,

$$1974 \quad \langle qq' \rangle = \mathcal{Q}^2 \sum_n \left\langle \left\{ \frac{\mathbf{x}_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_n}{\ell} \right\} \left\{ \frac{(\mathbf{x}_n - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n}{\ell} \right\} \exp \left[-2 \{ \mathbf{x}_n^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{x}_n)^2 \} / \ell^2 \right] \right\rangle, \\ 1975 \quad (7.106)$$

1976 である. ここで, 統計的一様性と (7.77b) を用いた. 再び, (7.79) で定義される新しい変数
1977 $\mathbf{y}_n$ を導入すると, (7.106) は

$$1978 \quad \langle qq' \rangle = \frac{\mathcal{Q}^2}{\ell^2} \exp[-r^2/\ell^2] \sum_n \left\langle \left\{ (\mathbf{y}_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_n)^2 - \frac{1}{4} (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n)^2 \right\} \exp \left[-4 \mathbf{y}_n^2 / \ell^2 \right] \right\rangle \\ 1979 \quad = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{Q}^2}{\ell^2} \exp[-r^2/\ell^2] \sum_n \left[\langle \mathbf{y}_n^2 \exp(-4 \mathbf{y}_n^2 / \ell^2) \rangle - \frac{1}{4} r^2 \langle \exp(-4 \mathbf{y}_n^2 / \ell^2) \rangle \right] \langle \hat{\mathbf{e}}_n^2 \rangle \\ 1980 \quad = \frac{1}{8} \mathcal{Q}^2 \exp[-r^2/\ell^2] \sum_n \left[\langle z_n^2 \exp(-z_n^2) \rangle - (r/\ell)^2 \langle \exp(-z_n^2) \rangle \right] \\ 1981 \quad = \langle q^2 \rangle \exp[-r^2/\ell^2] \left\{ 1 - \frac{r^2}{\ell^2} \right\}, \quad (7.107)$$

1982 を得る. ここで, 第 1 式から第 2 式へは, $\mathbf{y}$ と $\hat{\mathbf{e}}$ は統計的に独立であることと, (7.96) と
1983 同様の計算を行い, $\hat{\mathbf{e}}_n$ の等方性を使用した. 第 2 式から第 3 式へは (7.105) の使用と,
1984 (7.97) で定義される z_n^2 というランダムな変数を再び用いた. さらに, 第 3 式から第 4 式
1985 へは, (7.98) を用いた.

1986 (7.67) から (7.104) を持つ渦度場のエンストロフィースペクトルは,

$$1987 \quad Q(k) = \frac{1}{2} \langle q^2 \rangle \ell \left(\frac{k\ell}{2} \right)^3 \exp \left[-\frac{(k\ell)^2}{4} \right], \quad (7.108)$$

1988 である ((7.84), (7.86) 参照). 即ち, $Q(k \rightarrow 0) \sim k^3$ となるエンストロフィースペクトル
1989 が得られる.

1990 再び, (7.72b)–(7.72d) で定義される積分量を求めておく. (7.88) を用いて,

$$1991 \quad J = 0, \quad (7.109)$$

$$1992 \quad L = \frac{1}{4} \pi \ell^4 \langle q^2 \rangle, \quad (7.110)$$

$$1993 \quad I = -\frac{1}{4} \pi \ell^6 \langle q^2 \rangle, \quad (7.111)$$

1994 と計算できる.

付録 A

Green 関数の導出に必要な計算に関するノート

A.1 Gamma 関数, Beta 関数に関する公式とその証明

A.1.1 定義

Gamma 関数 $\Gamma(n)$ と Beta 関数 $B(m, n)$ はそれぞれ以下のように定義される:

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad (\text{A.1})$$

$$B(m, n) \equiv \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad (m > 0, n > 0). \quad (\text{A.2})$$

ここで, Beta 関数の定義における, m, n の正值性は積分の収束性を補償するために必要となる.

A.1.2 Gamma 関数の公式

1. $n = 1$ のとき

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{A.3})$$

2. $n = \frac{1}{2}$ のとき,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.4})$$

証明: $x = y^2$ と変数変換を行って Gauss 積分に帰着させる. Gauss 積分の公式から証明できる.

2012 3. 漸化関係式

$$2013 \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (\text{A.5})$$

2014 証明: (A.1) を部分積分して証明できる.

2015 4. 積分公式

$$2016 \quad \frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^{p-1} e^{-xu} du, \quad (x > 0, p > 0) \quad (\text{A.6})$$

2017 証明: 右辺の積分を $xu = y$ と変数変換し, Gamma 関数の定義 (A.1) を用いるこ
2018 とにより証明できる.

2019 A.1.3 Beta 関数に関する公式

2020 1. 相反定理

$$2021 \quad B(m, n) = B(n, m) \quad (\text{A.7})$$

2022 証明: $x = 1 - y$ と変数変換することにより証明できる.

2023 2. 三角関数の積の積分と Beta 関数の関係

$$2024 \quad B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta, \quad (m > 0, n > 0) \quad (\text{A.8})$$

2025 証明: $x = \sin^2 \theta$ の変数変換により, (A.2) の形に帰着できる.

2026 3. Gamma 関数と Beta 関数との関係

$$2027 \quad B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (\text{A.9})$$

2028 証明: $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$ において, $x = \xi^2$ と変数変換する. このとき

$$2029 \quad \Gamma(m) = 2 \int_0^\infty \xi^{2m-1} e^{-\xi^2} d\xi.$$

2030 同様に,

$$2031 \quad \Gamma(n) = 2 \int_0^\infty \eta^{2n-1} e^{-\eta^2} d\eta.$$

2032 したがって

$$2033 \quad \Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta \xi^{2m-1} \eta^{2n-1} e^{-(\xi^2 + \eta^2)}.$$

上の式で $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$ の変数変換を行うことにより

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)B(m, n)$$

が示せる.

4. Gamma 関数の倍数公式 (duplication formula)

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2p). \quad (\text{A.10})$$

証明: 2つの積分 $I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} x \, dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} 2x \, dx$ を考える. (A.2) と (A.9) より

$$I = \frac{1}{2}B(p+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+1)}.$$

一方, $2x = u$ の変数変換と引き続く $u = \pi - \xi$ の変換により

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^{2p} u \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} u \, du + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} \xi \, d\xi \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} u \, du = I. \end{aligned}$$

J は別の表現として

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} (2 \sin x \cos x)^{2p} \, dx \\ &= 2^{2p} \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} x \cos^{2p} x \, dx \\ &= 2^{2p-1} B(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}) \\ &= 2^{2p-1} \frac{\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\}^2}{\Gamma(2p+1)}. \end{aligned}$$

ここで, 第2式から第3式への変形には (A.2) を, 第3式から第4式への変形には (A.9) を用いた. $I = J$ より

$$\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+1)} = 2^{2p-1} \frac{\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\}^2}{\Gamma(2p+1)}.$$

(A.4) と (A.5) を使って上式を整理すると (A.10) が得られる.

2055 A.1.4 代数関数の積分

2056 1. 代数関数の積分公式, Gamma 関数を使った表現 (1)

$$2057 \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p), \quad (0 < p < 1) \quad (\text{A.11})$$

2058 証明: (A.11) において, $x = \frac{y}{1+y}$ の変数変換を行うと,

$$2059 \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 y^p (1-y)^{-p} dy$$

2060 となる. ここで, 上の式の右辺は (A.2) の形をしているので,

$$2061 \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = B(p, 1-p).$$

2062 Beta 関数の収束条件から, この積分の収束条件は $0 < p < 1$ である. さらに,
2063 (A.9) を用いると, (A.11) が導かれる.

2064 2. 代数関数の積分公式, Gamma 関数を使った表現 (2)

$$2065 \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^q}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \frac{\Gamma(\frac{p}{q})}{\Gamma(\frac{p}{q} + \frac{1}{2})}, \quad (\frac{p}{q} > 0) \quad (\text{A.12})$$

2066 証明: (A.12) において, $x^q = z$ の変数変換を行うと

$$\begin{aligned} 2067 \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^q}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{q} z^{\frac{p}{q}-1} (1-z)^{\frac{1}{2}} dz \\ 2068 \quad &= \frac{1}{q} B\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2}\right) \\ 2069 \quad &= \frac{1}{q} \frac{\Gamma(\frac{p}{q})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{q} + \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

2070 第 2 式から第 3 式への変形は, (A.9) を用いた. 最後の表現において (A.5) を
2071 用いると (A.12) が得られる.

2072 3. 代数関数の積分公式. 複素積分を使った計算

$$2073 \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (0 < p < 1) \quad (\text{A.14})$$

2074 証明: $z = -1$ に極を持ち, $z = 0$ に分岐点をもつ複素関数 $f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$ を次のよ
2075 うな経路の沿って積分する. 複素平面の原点を中心に持つ半径 r , ($r < 1$) と
2076 半径 R , ($R > 1$) の同心円を考える. 半径 r の円に沿った反時計回りの積分

路を C , 半径 R の円に沿った反時計回りの積分路を C' で表す. 実軸にそった $r + i\epsilon \rightarrow R + i\epsilon$, ($\epsilon > 0$, $\epsilon \approx 0$) の積分を ab , 実軸にそった $R - i\epsilon \rightarrow r - i\epsilon$ の積分を $b'a'$ で表す. $ab \rightarrow C' \rightarrow b'a' \rightarrow C$ の積分範囲の中には, $z = -1$ の極が含まれるので, 留数定理より

$$\int_{ab} f(z) dz + \int_{C'} f(z) dz + \int_{b'a'} f(z) dz + \int_C f(z) dz = 2\pi i(-1)^{p-1} = 2\pi i e^{i(p-1)\pi}$$

ここで

$$\int_{C'} f(z) dz = i \int_0^{2\pi} i \frac{R^p e^{ip\theta}}{1 + R e^{i\theta}} d\theta \rightarrow 0, \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\int_C f(z) dz = i \int_{2\pi}^0 i \frac{r^p e^{ip\theta}}{1 + r e^{i\theta}} d\theta \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow 0)$$

$$\int_{ab} f(z) dz = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

$R \rightarrow \infty$ で積分が消えるためには $1 > p$ が要請される. また, $r \rightarrow 0$ で積分が 0 に収束するためには, $p > 0$ が要請される. さらに, $b'a'$ 上では $\arg z = 2\pi$ であることに注意すると,

$$z^{p-1} = e^{(p-1)(\ln z + 2\pi i)} = e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)} = x^{p-1} e^{2\pi i(p-1)}.$$

したがって,

$$\int_{ab} f(z) dz + \int_{b'a'} f(z) dz = (1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{i\pi(p-1)}.$$

最後の式を整理すると, (A.14) が得られる. さらに, (A.14) と (A.11) から Gamma 関数に関する次の公式 (A.15) が得られる.

4. Gamma 関数の公式

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (0 < p < 1). \quad (\text{A.15})$$

A.1.5 代数関数と三角関数の積の定積分に関する公式

1.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{1}{2\Gamma(p)} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(p)} \frac{\pi}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \quad (\text{A.17})$$

$$= \Gamma(1-p) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right). \quad (\text{A.18})$$

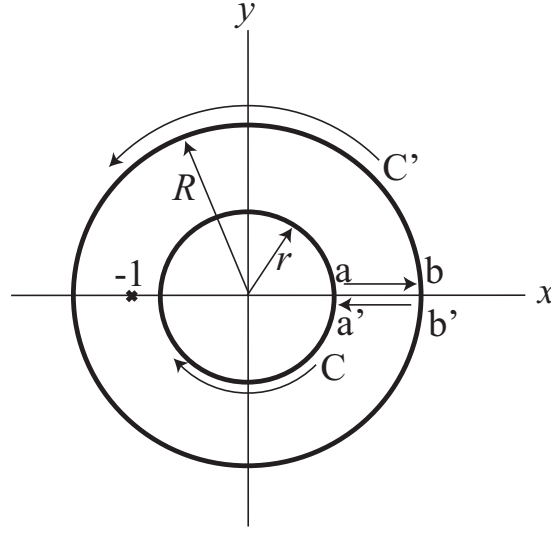


図 A.1 積分経路

2100 証明: (A.5) と (A.21) を用いると

$$\begin{aligned}
 2101 \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty dx \cos x \left\{ \int_0^\infty du u^{p-1} e^{-xy} \right\} \\
 2102 \quad &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty du u^{p-1} \left\{ \int_0^\infty dx \cos x e^{-xy} \right\} \\
 2103 \quad &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{u^p}{1+u^2} du \\
 2104 \quad &= \frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{(p-1)/2}}{1+x} dx. \tag{A.19}
 \end{aligned}$$

2105 最後の式変形には, $u^2 = x$ の変数変換を用いた. (A.11) を用いると,

$$\begin{aligned}
 2106 \quad (A.19) &= \frac{1}{2\Gamma(p)} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) \\
 2107 \quad &= \frac{1}{2\Gamma(p)} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{p+1}{2}\pi\right)} \\
 2108 \quad &= \frac{1}{2\Gamma(p)} \frac{\pi}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

2109 (A.15) と三角関数の倍角公式より, (A.18) が証明できる.

2. 2110

$$2110 \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx = \Gamma(1-p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right). \tag{A.20}$$

A.1.6 その他の積分公式

1. 指数関数と三角関数を含んだ積分 (1)

$$\int_0^{\infty} e^{-ux} \cos x \, dx = \frac{u}{1+u^2} \quad (\text{A.21})$$

証明:

$$\int_0^{\infty} e^{-(u-i)x} \, dx = \frac{u+i}{1+u^2} \quad (\text{A.22})$$

上の式の実部を取ることににより, 件の式が証明できる. また虚数部を取ることににより次の積分公式が導かれる.

2. 指数関数と三角関数を含んだ積分 (2)

$$\int_0^{\infty} e^{-ux} \sin x \, dx = \frac{1}{1+u^2} \quad (\text{A.23})$$

A.2 Fourier 変換の公式

Green 関数 (3.6) もしくは (3.7) の計算に必要な Fourier 変換の公式をまとめておく. これらは Lighthill(1958) [25] および森口他^{*1} に掲載されている公式を整理したものである.

A.2.1 Fourier 変換の定義

ここでの Fourier 変換, Fourier 逆変換の定義はそれぞれ

$$\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \, dk, \quad (\text{A.25})$$

である. つまり, $f(x)$ の Fourier 変換が $\hat{f}(k)$ であり, $\hat{f}(k)$ の Fourier 逆変換は, $f(x)$ である.

Lighthill(1958) では Fourier 変換, 逆変換は

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} \, dx, \quad (\text{A.26})$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-2\pi i k x} \, dk, \quad (\text{A.27})$$

^{*1} 森口繁一, 宇田川 (金圭) 久, 一松信: 岩波 数学公式 II, (岩波書店, 1957), ISBN4-00-005508-9.

と定義されているので, Lighthill(1958) に掲載されている公式表 (p.43 Table I) を使用する
ときには注意が必要である.

A.2.2 Fourier 変換の性質

(A.25) の両辺を x で n 階微分して整理すると,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k^n \hat{f}(k) e^{ikx} dk = (-i)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

したがって,

$$\mathcal{F}^{-1} \left[k^n \hat{f}(k) \right] = (-i)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x). \quad (\text{A.28})$$

一方 (A.24) を k に関して n 階微分すると

$$\frac{d^n}{dk^n} \hat{f}(k) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-ikx} dx,$$

となる. 上の式を逆変換して整理すると

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{d^n}{dk^n} \hat{f}(k) \right] = (-i)^n x^n f(x) \quad (\text{A.29})$$

となる.

A.2.3 代数関数の Fourier 変換

Green 関数の計算に必要な Fourier 逆変換の公式を表 A.1 に示す. Green 関数の計算には代数関数 $|k|^p$, ($p \in \mathbb{R}$) の Fourier 逆変換を行う必要がある. 通常の意味での関数の範囲内では, $-1 < p < 0$ の場合しか $|k|^p$ の Fourier 逆変換の積分は収束しない. しかしながら, 我々が取り扱う関数の範囲を超関数まで拡張することにより, $p \in \mathbb{R}$ の場合の $|k|^p$ の Fourier 逆変換が可能となる.

$\hat{f}(k)$	$f(x)$
$ k ^p, (p \neq 0, 2, 4, \dots, -1, -3, \dots)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{\Gamma(1+p)}{ x ^{1+p}}$
$ k ^{2n}, (n \text{ は } n \geq 0 \text{ となる整数})$	$(-1)^n \sqrt{2\pi} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \delta(x)$
$ k ^{-2m+1}, (m \in \mathbb{N})$	$(-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ x ^{2m-2}}{\Gamma(2m-1)} (\ln x + C)$

表 A.1 代数関数 $|k|^p$ の逆 Fourier 変換.

A.2.4 代数関数の Fourier 変換の公式の証明

1. 非整数冪の代数関数の逆 Fourier 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^p e^{ikx} dk = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{\Gamma(1+p)}{|x|^{1+p}}. \quad (\text{A.30})$$

証明： 先ず, $0 < p < 1$ に対しては, (A.18) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-p} e^{ikx} dk &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p} dk \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \Gamma(1-p) x^{p-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

である. (A.31) の両辺を x に関して $2n$ 回微分する.

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-p+2n} e^{ikx} dk &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma(1-p)(p-1)(p-2) \cdots (p-2n) x^{p-2n-1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \Gamma(2n+1-p) x^{p-2n-1}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-(p-2n)} e^{ikx} dk &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{(p-2n)\pi}{2} + n\pi\right) \\ &\quad \times \Gamma(1-(p-2n)) x^{(p-2n)-1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{(p-2n)\pi}{2}\right) \Gamma(1-(p-2n)) x^{(p-2n)-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-p+(2n+1)} e^{ikx} dk &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} |k|^{-(p-2n-1)} \cos kx dk \\ &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} dk. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

ここで, (A.20) より

$$\begin{aligned}
 (A.33) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1-p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} x^{p-1} \\
 &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1-p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) (p-1)(p-2) \cdots (p-2n-1) x^{p-2n-2} \\
 &= (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(2n+2-p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) x^{p-2n-2} \\
 &= (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{(p-2n-1)\pi}{2} + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \\
 &\quad \times \Gamma(1-(p-2n-1)) x^{(p-2n-1)-1}. \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{(p-2n-1)\pi}{2}\right) \Gamma(1-(p-2n-1)) x^{(p-2n-1)-1}. \quad (A.34)
 \end{aligned}$$

(A.32) と (A.34) より非整数の $p(<1)$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-p} e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \Gamma(1-p) x^{p-1} \quad (A.35)$$

が成り立つ. なお,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-p} e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-p} e^{ik|x|} dk$$

なので, (A.35) における x は $|x|$ に置き換えられる. さらに (A.35) で, p を $1-p$ に置き換えて

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{p-1} e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \Gamma(p) |x|^{-p} \quad (A.36)$$

が成り立つことを意味する. したがって, 非整数の $p(<0)$ に対して,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^p e^{ikx} dk &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{(p+1)\pi}{2}\right) \Gamma(p+1) |x|^{-(p+1)} \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \Gamma(p+1) |x|^{-p-1}. \quad (A.37)
 \end{aligned}$$

(A.35) と (A.37) より, 非整数冪の代数関数の逆 Fourier 変換の公式 (A.30) が証明された.

2. 符号関数 $\text{sgn}(k)$ の逆 Fourier 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) e^{ikx} dk = -ix^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (A.38)$$

証明： 符号関数 $\text{sgn}(k)$ とは

$$\text{sgn}(k) = \begin{cases} 1, & (k > 0) \\ -1, & (k < 0) \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

を満足する関数である. 先ず,

$$\frac{d}{dk} \text{sgn}(k) = 2\delta(k) \quad (\text{A.40})$$

を証明する. $f(k)$ を $k \rightarrow \pm\infty$ で速やかに 0 に収束する任意関数として,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \frac{d}{dk} \text{sgn}(k) dk &= \text{sgn}(k) f(k) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(k)}{dk} \text{sgn}(k) dk \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{df(k)}{dk} dk + \int_{-\infty}^0 \frac{df(k)}{dk} dk \\ &= 2f(0) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \delta(k) dk. \end{aligned}$$

したがって, (A.40) が証明できた.

次に, $\text{sgn}(k)$ の逆 Fourier 変換を $g(x)$ とする. 即ち

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) e^{ikx} dk = g(x).$$

(A.29) より

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dk} \text{sgn}(k) e^{ikx} dk = ixg(x). \quad (\text{A.41})$$

一方, (A.40) の両辺を逆 Fourier 変換して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dk} \text{sgn}(k) e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (\text{A.42})$$

したがって, (A.41) と (A.42) より, $g(x) = -ix^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ が導かれる.

3. 奇数冪の代数関数の逆 Fourier 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{2n+1} e^{ikx} dk = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(2n+2) |x|^{-2n-2}. \quad (\text{A.43})$$

証明： (A.28) と (A.38) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k^n \text{sgn}(k) e^{ikx} dk &= (i)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(-ix^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \\ &= (-1)^{n+1} (i)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} n! x^{-n-1} \\ &= (-1)^{n+1} (i)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(n+1) x^{-n-1}. \end{aligned}$$

したがって, 上の式で n を $2n+1$ で置き換えて

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n+1} \operatorname{sgn}(k) e^{ikx} dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{2n+1} e^{ikx} dk \\ &= (-1)^{2n+2} (i)^{2n+2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(2n+2) |x|^{-2n-2} \\ &= (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(2n+2) |x|^{-2n-2} \end{aligned}$$

なので, (A.43) が証明された. なお, (A.30) において, $p = 2n+1$ とすると, (A.43) と等しいことがわかる.

4. 負の偶数冪の代数関数の Fourier 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-2m} e^{ikx} dk = (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(2m)} |x|^{2m-1}. \quad (\text{A.44})$$

証明: (A.43) の両辺を Fourier 変換することにより

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-2n-2} e^{-ikx} dx = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(2n+2)} |k|^{2n+1}.$$

ここで, n を $m-1$ に置き換えて,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-2m} e^{-ikx} dx = (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(2m)} |k|^{2m-1}$$

なので, (A.44) を得る. 前と同様にして, (A.30) において $p = -2m$ としたものは (A.44) と同等である. 以上から, (A.30) は $p = 0, 2, 4, \dots, -1, -3$, をのぞく実数の p に対して成立する.

5. 偶数冪の代数関数の逆 Fourier 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{2n} e^{ikx} dk = (-1)^n \sqrt{2\pi} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \delta(x). \quad (\text{A.45})$$

証明:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

の両辺を x に関して $2n$ 階微分する. ここで n は正の整数である.

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \delta(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} e^{ikx} dk.$$

従って, k^{2n} の Fourier 変換は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} e^{ikx} dk = (-1)^n \sqrt{2\pi} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \delta(x).$$

となり, (A.45) が導かれる.

A.2.5 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の漸化式及び y の n 階微分

$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ として, y の n 階微分を $y^{(n)}$ とするとき, 次の漸化式

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+3)xy^{(n+1)} - (n+1)y^{(n)} = 0 \quad (\text{A.46})$$

が成り立つ.

証明: 数学的帰納法により証明する. $n = 0$ では, $y^{(1)} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$, $y^{(2)} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$ を (A.46) に代入し, それが成り立つことを確かめる. また, $n = m$, ($m \geq 1$) の時に (A.46) が成り立つと仮定し, それを x で 1 階微分する. このとき, $n = m+1$ とした (A.46) が成り立つことを示すことにより, (A.46) が証明される.

6.

$$\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]_{x=0} = \frac{2^{2n} \Gamma(\frac{2n+1}{2})^2}{\pi} \quad (\text{A.47})$$

証明: 先の漸化式より,

$$y^{(2n)}(0) = (2n-1)^2 y^{(2n-2)}(0) \quad (\text{A.48})$$

が成り立つことがわかる. (A.48) を順々に適用することにより

$$\begin{aligned} y^{(2n)}(0) &= \{(2n-1)(2n-3)\}^2 y^{(2n-4)}(0) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \{(2n-1)(2n-3)\dots(3)(1)\}^2 y^{(0)}(0) \\ &= \left\{ 2^n \frac{2n-1}{2} \frac{2n-3}{2} \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\}^2 \\ &= \frac{2^{2n} \Gamma(\frac{2n+1}{2})^2}{\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

A.3 積分 $I(m) = \int_0^1 \frac{x^{2m-2} \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ についてA.3.1 $m = 1$ のとき

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (\text{A.50})$$

2257 証明： $x = \sin \theta$ と変数変換をする．このとき，

$$2258 \quad I(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta \quad (\text{A.51})$$

2259 また， $\xi = \frac{\pi}{2} - \theta$ とすると，

$$2260 \quad I(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos \xi) d\xi \quad (\text{A.52})$$

2261 となる．したがって，

$$\begin{aligned} 2262 \quad 2I(1) &= \int_0^{\pi/2} \{\ln(\sin \theta) + \ln(\cos \theta)\} d\theta \\ 2263 \quad &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta + \cos \theta) d\theta \\ 2264 \quad &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right) d\theta \\ 2265 \quad &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

2266 一方， $2\theta = v$ と変数変換して

$$\begin{aligned} 2267 \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin v) dv \\ 2268 \quad &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \ln(\sin v) dv + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin v) dv \right\}. \end{aligned}$$

2269 最後の積分で， $v = \pi - u$ とすると，

$$2270 \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin v) dv = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u) du = I(1).$$

2271 したがって，(A.53) は

$$2272 \quad 2I(1) = I(1) - \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (\text{A.54})$$

2273 となり，(A.52) が導かれる．

2274 A.3.2 数値計算による $I(m)$ の見積もり

2275 $0 < x < 1$ の区間を 10^6 点に分割し，Simpson の台形公式によって $I(m)$ を数値的に見
2276 積もった．その結果を図 A.2 に示す． $I(1)$ がもっとも小さな値をとり， m の増大ともに
2277 $I(m)$ の値は増大していくが， $I(m)$ はゼロに近づく傾向にある．

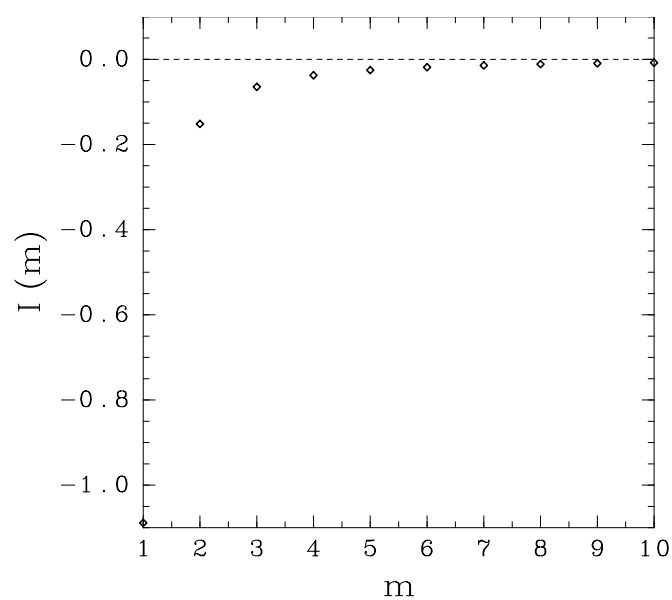


図 A.2 $I(m)$ の値

付録 B

Helmholtz の基本定理

流体の運動は,

- 並進
- 収束・発散
- 回転
- ずれ (歪)

の運動の 4 つに分解できることを主張するのが Helmholtz の基本定理である. 以下では, 2 次元流体を例に Helmholtz の基本定理を示す.

ある位置 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ における速度ベクトルを $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$ とする. この速度を $\mathbf{r}_0$ の周りに Taylor 展開する:

$$\begin{aligned}
 u(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) &\simeq u(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \delta y \\
 &= u(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta x - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta y \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta x + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta y,
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 v(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) &\simeq v(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \delta y \\
 &= u(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta y + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta x \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta y + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \right\} \delta x.
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

2297 ここで、添え字の 0 は物理量を $\mathbf{r}_0$ で見積もることを表す.

$$2298 \quad \mathcal{D} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0, \quad (\text{B.3})$$

$$2299 \quad \omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0, \quad (\text{B.4})$$

$$2300 \quad \gamma_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0, \quad (\text{B.5})$$

$$2301 \quad \gamma_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0, \quad (\text{B.6})$$

2302 を定義すると, (B.1), (B.2) はそれぞれ

$$2303 \quad u(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) \simeq u(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(\mathcal{D} + \gamma_1)\delta x + \frac{1}{2}(\gamma_2 - \omega)\delta y, \quad (\text{B.7})$$

$$2304 \quad v(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) \simeq v(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(\omega + \gamma_2)\delta x + \frac{1}{2}(\mathcal{D} - \gamma_1)\delta y, \quad (\text{B.8})$$

2305 を書くことができる. $\mathcal{D}, \omega, \gamma_i$ はそれぞれ, 発散 (divergence), 渦度 (vorticity), 歪速度
2306 (rate of strain) と呼ばれる. γ_2 は γ_1 を 45 度回転させた流れである.

2307 A, B, C_i を定数とする次のような流れは, それぞれ純粋な並進, 収束・発散, 回転, ずれ
2308 の流れである:

- 2309 • 一様流

$$2310 \quad u = A, v = B \quad (\text{B.9})$$

- 2311 • 収束・発散 ($\mathcal{D} = 2C_1$)

$$2312 \quad u = C_1 x, v = C_1 y \quad (\text{B.10})$$

- 2313 • 回転 ($\omega = 2C_2$)

$$2314 \quad u = -C_2 y, v = C_2 x \quad (\text{B.11})$$

2315 上記の流れ関数は,

$$2316 \quad \psi = \frac{1}{2}C_2(x^2 + y^2) \quad (\text{B.12})$$

2317 である (図 B.1).

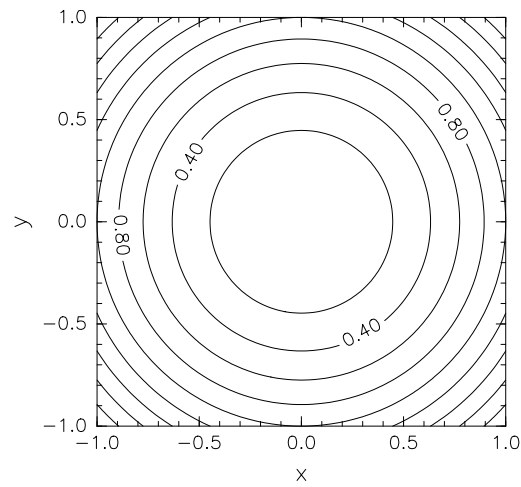
- 2318 • ずれ (その 1) ($\gamma_1 = 2C_3$)

$$2319 \quad u = C_3 x, v = -C_3 y \quad (\text{B.13})$$

2320 上記の流れ関数は,

$$2321 \quad \psi = -C_3 xy \quad (\text{B.14})$$

2322 である (図 B.2 の左図).



CONTOUR INTERVAL = 2.000E-01

図 B.1 回転運動の流線.

- ずれ (その 2) ($\gamma_2 = 2C_4$)

$$u = C_4 y, v = C_4 x \quad (\text{B.15})$$

上記の流れ関数は,

$$\psi = \frac{1}{2} C_4 (x^2 - y^2) \quad (\text{B.16})$$

である (図 B.2 の右図).

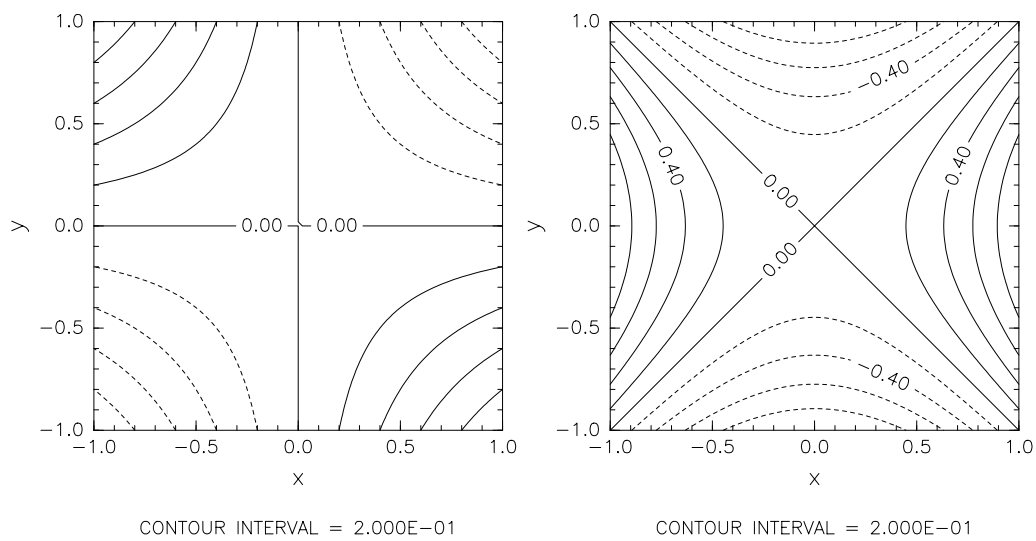


図 B.2 左図: 変形 (その 1) 運動の流線. 右図: 変形 (その 2) 運動の流線.

付録 C

キュムラントについてのノート

確率変数を x として, x の確率密度関数を $\rho(x)$ とする. もちろん,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1 \quad (\text{C.1})$$

である. x の n 次のモーメント $\langle x^n \rangle$ は

$$\langle x^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^n \rho(x) dx \quad (\text{C.2})$$

と定義される. いま, 確率密度関数の Fourier 変換 $\Phi(\xi)$,

$$\Phi(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \rho(x) dx, \quad (\text{C.3})$$

を考える. $\Phi(\xi)$ を $\xi = 0$ を中心に Taylor 展開すると, 展開の各次数の係数にその次数のモーメントが現れる:

$$\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \langle x^n \rangle. \quad (\text{C.4})$$

そこで, $\Phi(\xi)$ は特性関数 (もしくは, モーメント母関数) と呼ばれる. 一方, $\Phi(\xi)$ の対数をとったもの, $\Psi(\xi)$ は $\rho(x)$ のキュムラント母関数と呼ばれる.

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &\equiv \ln \Phi(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \left[\frac{d^n}{d\xi^n} \ln \Phi \right]_{\xi=0}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$\Psi(\xi)$ の $\xi = 0$ を中心とした Taylor 展開の各次数の係数に現れる係数 $\langle x^n \rangle_c$ を n 次のキュムラントという. キュムラントとモーメントの関係は 4 次までは以下のとおりである:

- 2347 • $n = 1$ のとき, $\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$.
- 2348 • $n = 2$ のとき, $\langle x^2 \rangle_c = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$.
- 2349 • $n = 3$ のとき, $\langle x^3 \rangle_c = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle$.
- 2350 • $n = 4$ のとき, $\langle x^4 \rangle_c = \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle - 3 \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^2$.

2351 例として $\rho(x)$ として Gauss 分布を考える:

$$2352 \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-x_0)^2/(2\sigma^2)}. \quad (\text{C.6})$$

2353 このとき, 特性関数は

$$\begin{aligned}
 2354 \quad \Phi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/(2\sigma^2) + i\xi x} dx \\
 2355 \quad &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ix_0\xi - \sigma^2\xi^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{x-(x_0+i\sigma)\}^2/(2\sigma^2)} dx \\
 2356 \quad &= e^{ix_0\xi - \sigma^2\xi^2/2} \quad (\text{C.7})
 \end{aligned}$$

2357 でキュムラント母関数は

$$2358 \quad \Psi(\xi) = ix_0\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \quad (\text{C.8})$$

2359 である. そこで,

$$\begin{aligned}
 2360 \quad &\langle x \rangle_c = x_0, \\
 2361 \quad &\langle x^2 \rangle_c = \sigma^2, \\
 2362 \quad &\langle x^3 \rangle_c = 0, \\
 2363 \quad &\langle x^4 \rangle_c = 0,
 \end{aligned}$$

2364 である.

参考文献

- [1] C. Basdevant, M. Lesieur, and R. Sadourny. Subgrid-scale modeling of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 35, p. 1028, 1978.
- [2] G. K. Batchelor. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 12, pp. II–233, 1969.
- [3] J. C. Bowman. On inertial-range scaling laws. *J. Fluid Mech.*, Vol. 306, p. 167, 1996.
- [4] B. H. Burgess and T. G. Shepherd. Spectral nonlocality, absolute equilibria, and Kraichnan-Leith-Batchelor phenomenology in two-dimensional turbulent energy cascades. *J. Fluid Mech.*, Vol. 725, p. 332, 2013.
- [5] J. R. Chasnov. On the decay of two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 9, p. 171, 1997.
- [6] P. A. Davidson. On the large-scale structure of homogeneous two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 580, p. 431, 2007.
- [7] R. Fjørtoft. On the exchanges in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional nondivergent flow. *Tellus*, Vol. 5, p. 225, 1953.
- [8] S. Fox and P. A. Davidson. Integral invariants of two-dimensional and quasi-geostrophic shallow-water turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 20, , 2008.
- [9] U. Frisch. *Turbulence : The legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge Univ. Press., 1995.
- [10] E. Gkioulekas and K. K. Tung. A new proof on net upscale energy cascade in two-dimensional and quasi-geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 576, p. 173, 2007.
- [11] A. V. Gruzinov, N. Kukharkin, and R. N. Sudan. Two-dimensional convective turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76, p. 1260, 1996.
- [12] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, and K. L. Swanson. Surface quasi-geostrophic dynamics. *J. Fluid Mech.*, Vol. 282, p. 1, 1995.

- [13] T. Iwayama, T. G. Shepherd, and T. Watanabe. An ‘ideal’ form of decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 456, p. 183, 2002.
- [14] T. Iwayama and T. Watanabe. Green’s function for a generalized two-dimensional fluid. *Phys. Rev. E*, Vol. 82, p. 036307, 2010.
- [15] T. Iwayama, T. Watanabe, and T. G. Shepherd. Infrared dynamics of decaying two-dimensional turbulence governed by the charney-hasegawa-mima equation. *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 70, p. 376, 2001.
- [16] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, Vol. 30, p. 299, 2013.
- [17] R. H. Kraichnan. Irreversible statistical mechanics of incompressible hydrodynamic turbulence. *Phys. Rev.*, Vol. 109, p. 1407, 1958.
- [18] R. H. Kraichnan. The structure of isotropic turbulence at very high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, Vol. 5, p. 497, 1959.
- [19] R. H. Kraichnan. Lagrangian-history closure approximation for turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 8, p. 575, 1965.
- [20] R. H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 47, p. 525, 1971.
- [21] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 10, p. 1417, 2013.
- [22] V. D. Larichev and J. C. McWilliams. Weakly decaying turbulence in an equivalent-barotropic fluid. *Phys. Fluids*, Vol. A3, p. 938, 1991.
- [23] C. E. Leith. Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 11, p. 671, 1968.
- [24] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Springer, 第 4 th 版, 2008.
- [25] M. J. Lighthill. *An introduction to Fourier analysis and generalised functions*. Cambridge University Press, 1958.
- [26] J. C. McWilliams. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, Vol. 146, p. 21, 1984.
- [27] P. E. Merilees and H. Warn. On energy and enstrophy exchanges in two-dimensional non-divergent flow. *J. Fluid Mech.*, Vol. 69, p. 625, 1975.
- [28] G. D. Nastom and K. S. Gage. A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed ny commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 42, p. 950, 1985.
- [29] A. M. Obukhov. Energy distribution in the spectrum of turbulent flow. *Izv.*

-
- Akad. Nauk. SSR, Ser. Geogr. Geofiz.*, Vol. 5, p. 453, 1941.
- [30] Y. Ogura. A consequence of the zero fourth cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 16, p. 33, 1963.
- [31] K. Ohkitani. Asymptotics and numerics of a family of two-dimensional generalized surface quasi-geostrophic equations. *Phys. Fluids*, Vol. 24, p. 095101, 2012.
- [32] S. A. Orszag. Analytical theories of turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 41, p. 363, 1970.
- [33] S. Ossia and M. Lesieur. Large-scale energy and pressure dynamics in decaying 2d incompressible isotropic turbulence. *J. Turbul.*, Vol. 2, p. N13, 2001.
- [34] R. T. Pierrehumbert, I. M. Held, and K. L. Swanson. Spectra of local and nonlocal two dimensional turbulence. *Chaos, Solitons Fractals*, Vol. 4, p. 1111, 1994.
- [35] P. B. Rhines. Ann. rev. fluid mech. *Geostrophic turbulence*, Vol. 11, p. 401, 1979.
- [36] M. Riesz. L'integrale de riemann-liouville et le probleme de cauchy. *Acta Mathematica*, Vol. 81, p. 1, 1949.
- [37] N. Schorghofer. Energy spectra of steady two-dimensional turbulent flows. *Phys. Rev. E*, Vol. 61, p. 6572, 2000.
- [38] R. B. Scott. Evolution of energy and enstrophy containing scales in decaying, two-dimensional turbulence with friction. *Phys. Fluids*, Vol. 13, p. 2739, 2001.
- [39] K. S. Smith, G. Boccaletti, C. C. Henning, I. Marinov, C. Y. Tam, I. M. Held, and G. K. Vallis. Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade. *J. Fluid Mech.*, Vol. 469, p. 13, 2002.
- [40] K. R. Sreenivasan. On the universality of the kolmogorov constant. *Phys. Fluids*, Vol. 7, p. 2778, 1995.
- [41] C. V. Tran. Nonlinear transfer and spectral distribution of energy in α turbulence. *Physica D*, Vol. 191, p. 137, 2004.
- [42] T. Watanabe and T. Iwayama. Unified scaling theory for local and non-local transfers in generalized two-dimensional turbulence. *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 74, p. 3319, 2004.
- [43] T. Watanabe and T. Iwayama. Interacting scales and triad enstrophy transfers in generalized two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, Vol. 76, p. 046303, 2007.
- [44] S. A. Weinstein, P. L. Olson, and D. A. Yuen. Time-dependent large aspect-ratio thermal convection in the earth's mantle. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, Vol. 47, p. 157, 1989.
- [45] S. Yanase and M. Yamada. The effect of the finite rossby radius on two-

- 2462 dimensional isotropic turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 53, p. 2513, 1984.