

惑星流体力学^{*1}

2017年度講義ノート

岩山隆寛

^{*1} 所属学部・学科, 入学年度によって, 惑星情報論, 生命情報基礎論, 地球および惑星大気科学, 地球流体力学, 惑星流体力学, 波動物理学という授業科目名が割り当てられているが, 流体力学, 地球流体力学に関する講義である.

目次

| | | |
|-------|------------------------|----|
| 第 1 章 | ガイダンス | 1 |
| 1.1 | 授業のテーマと目標 | 1 |
| 1.2 | 成績の評価方法 | 1 |
| 1.3 | 教科書・参考書 | 2 |
| 1.4 | 連絡先 | 3 |
| 1.5 | 第 3 クォーターの目標 | 3 |
| 1.6 | 第 4 クォーターの目標 | 5 |
| 第 2 章 | 連続の式 | 7 |
| 2.1 | 連続体 | 7 |
| 2.2 | 流体粒子 | 8 |
| 2.3 | 連続の式 | 8 |
| 第 3 章 | 流れの記述 | 11 |
| 3.1 | Lagrange 的記述 | 11 |
| 3.2 | Lagrange 微分 | 12 |
| 3.3 | Euler 的記述 | 12 |
| 3.4 | Lagrange 微分の Euler 的表現 | 13 |
| 第 4 章 | 流体に働く力 | 17 |
| 4.1 | 体積力, 面積力 | 17 |
| 4.2 | 応力 | 17 |
| 4.3 | 応力を用いた流体の定義 | 18 |
| 4.4 | Pascal の原理 | 18 |
| 第 5 章 | 運動方程式 | 21 |
| 5.1 | 一般的な場合の運動方程式 | 21 |

| | | |
|--------|--|----|
| 5.2 | Newton 流体の場合 : Navier-Stokes 方程式 | 22 |
| 5.3 | 非粘性流体の場合 : Euler 方程式 | 23 |
| 第 6 章 | エネルギー方程式 | 25 |
| 6.1 | 運動エネルギーの発展方程式 | 25 |
| 6.2 | 熱力学的エネルギー方程式 | 27 |
| 第 7 章 | 状態方程式 | 31 |
| 7.1 | 理想気体の状態方程式 | 31 |
| 7.2 | 順圧流体の状態方程式 | 32 |
| 7.3 | Boussinesq 流体の状態方程式 | 34 |
| 第 8 章 | 相似性 | 37 |
| 8.1 | 問題設定 | 37 |
| 8.2 | Reynolds の相似法則 | 38 |
| 8.3 | Reynolds 数の物理的意味 | 39 |
| 8.4 | その他の無次元数 | 39 |
| 第 9 章 | Bernoulli の定理 | 41 |
| 9.1 | 準備 | 41 |
| 9.2 | Bernoulli の定理 | 42 |
| 9.3 | 一般化された Bernoulli の定理 | 42 |
| 第 10 章 | 流体力学の基礎方程式の応用 (1) : 静力学平衡 | 45 |
| 10.1 | 大気鉛直構造 | 45 |
| 10.2 | 浮力と Archimedes の原理 | 48 |
| 第 11 章 | 流体力学の基礎方程式の応用 (2) : 音波 | 51 |
| 11.1 | 問題設定 | 51 |
| 11.2 | 線形近似 | 52 |
| 11.3 | 波動方程式 | 54 |
| 11.4 | 分散関係式 | 55 |
| 11.5 | 縦波・横波と圧縮条件の関係 | 56 |
| 11.6 | 波動解の種類 | 56 |
| 第 12 章 | 流体力学の基礎方程式の応用 (3) : 浅水系 | 59 |
| 12.1 | はじめに : 問題設定 | 59 |

| | | |
|--------|-------------------------------------|----|
| 12.2 | 浅水方程式系 | 60 |
| 12.3 | 重力波 | 62 |
| 第 13 章 | 渦 | 65 |
| 13.1 | 渦度 | 65 |
| 13.2 | 渦度方程式 | 66 |
| 13.3 | Lagrange の渦定理 (渦の不生不滅の定理) | 67 |
| 13.4 | 循環 | 68 |
| 13.5 | 循環定理 | 69 |
| 13.6 | 渦位の保存則 | 70 |
| 付録 A | 運動学と構成方程式 | 73 |
| A.1 | Helmholtz の基本定理 | 73 |
| A.2 | 構成方程式 | 75 |
| 付録 B | 波の運動学 | 79 |
| B.1 | 空間 1 次元の場合 | 79 |
| B.2 | 空間 2 次元の場合 | 82 |

第 1 章

ガイダンス

1.1 授業のテーマと目標

この授業では流体力学の基礎を講義する。物質の三態、即ち、気体、液体、固体のうち、気体と液体は力を加えると変形し、流れるという共通の性質を持っている。そこで、気体と液体を総称して流体 (fluid) と呼ぶ。そして、それらの運動を調べる学問が流体力学 (fluid mechanics) である。流体力学は基礎方程式が 1800 年代には提出され学問が体系化されたので、物理学の中では力学、熱力学、電磁気学などと同じように古典物理学に分類される。また、流体力学は『場の物理学』^{*1}の一つである。場の物理学として代表的なものは電磁気学であろう。流体力学と電磁気学では似た形の方程式が現れる。片方の学問がもう片方の学問を理解するのに役に立つことがしばしばある、という点から流体力学を将来使うあてがない場合でも学んでおく意義はある。

流体力学は、小さなスケールでは血管の中の血液の流れから、大きなスケールでは星間空間物質から星や惑星が形成される過程など、時間的にも空間的にも非常に幅広いスケールの現象に適用され、応用範囲が広い。例えば、地球惑星科学関連の学問分野では、気象学、海洋学、宇宙物理学などで流体力学が応用されている。この授業では理学部や発達科学部の学生として持つべき流体力学の基礎知識について解説する。第 3 クォーターでは流体力学の基礎方程式や流体力学の基礎的な概念を解説する。第 4 クォーターでは流体力学の基礎方程式をいくつかの自然現象に適用して、それらを流体力学的に考察する。

1.2 成績の評価方法

学期末に行う試験により評価する。

^{*1} 物理量が時間、空間の関数として与えられるような対象を扱う物理学

1.3 教科書・参考書

幾つか推薦図書を挙げておく。流体力学のテキストを一冊ぐらいは手元に持っておくことを勧める。また、できれば「研究者向け」と紹介されている本は、一度は手に取って眺めて欲しい。

1. 木田重雄, 「なっとくする流体力学」(講談社)【初学者向け】

講談社の“なっとくするシリーズ”の1冊。著者は流体力学, 特に乱流理論の世界的に有名な研究者であり, 近年「乱流力学」という450ページの大著も著している。他の“なっとくする”シリーズと同様に, 難しい数式を極力減らし, 基本的な考えを丁寧に解説している。またベクトル解析の詳しい説明が付録についていることも特徴で, ベクトル解析の教科書としても適当である。

2. 巽友正, 「流体力学」(培風館, 新物理学シリーズ21)【一般向け】

著者は乱流理論の専門家で, 準正規理論と呼ばれる乱流の解析的理論のひとつを提唱した。次に述べる今井功著「流体力学」との大きな違いは, 粘性流体の運動方程式から説き起こし, 比較的早い章で波の運動を扱っている点である。また, 今井著「流体力学」では書かれていない「乱流への遷移」や「乱流の統計理論」についての章が設けられていることも特徴のひとつである。実在の流体は少なからず粘性を持っているために, まず実在する流体としての粘性流体を記述する上での概念や基礎方程式の導出を行い, 数学的に扱いやすい理想的な非粘性流体の運動は粘性流体の近似として位置づけている。この本に準じた内容で初学者向けの“巽友正, 「連続体の力学」(岩波書店, 岩波基礎物理シリーズ)”も出版されている。

3. 谷一郎, 「流れ学 第3版」(岩波書店, 岩波全書136)【初学者～一般向け】

流体力学の入門書を意図して書かれた本で, 多くの流体力学の教科書が数学的側面を強調して, 書かれているのに対し, 本書は物理的な解釈に重点を置くように書かれたている。1967年の出版以来いまだに読みつがれている名著である。

4. 今井功, 「流体力学(前編)」(裳華房)【一般～研究者向け】

著者は航空力学の専門家で, 文化勲章受賞者である。著者は応用数学にも強く, 超関数の本も執筆している。今井先生は誠に残念ながら2004年秋に亡くなったので, 流体力学(後編)は未完となった。この本では粘性のない流体(完全流体)の力学から説き起こし, 渦のない流れ, 渦運動の力学, そして粘性流体へと議論を進めている。渦運動の章は特に詳しく, 世界的に見てもこの本ほど詳しく渦運動を詳しく扱っている本はない。^{*2} 波を扱った章は残念ながらない(後編に掲載される予定で

^{*2} P.G.Saffma, “Vortex Dynamics”, Cambridge Univ. Press. を除いて。

あった)。なお、この書籍のコンパクトなもの（全書版）として、“今井功、「流体力学」(岩波書店)”が出版されている。(私は大学2年生のときにまずこの全書版で流体力学の勉強をした。)

5. G. K. Batchelor, 「An Introduction to Fluid Mechanics」(Cambridge U. P.)
【一般～研究者向け】

著者は乱流理論の大家で、流体力学で現在最も権威ある雑誌 Journal of Fluid Mechanics の創始者である。残年ながら 1999 年に亡くなった。日本語訳が電機大学出版会から発行されている(訳者：橋本英典, 松信八十男)。

6. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 「Fluid Mechanics」(Pergamon Press) 【一般～研究者向け】

物理学を学ぶ者は必ず手にする Landau - Lifshitz 理論物理学教程の1冊。Landau は 1962 年のノーベル物理学賞受賞者。東京書籍から翻訳が出版されている。

7. S. H. Lamb, 「Hydrodynamics」(Cambridge U. P.) 【一般～研究者向け】

1879 年に初版が発行された流体力学の教科書の古典中の古典。著者は Sir の称号を持つ。現在手に入る版は第6版。東京書籍から翻訳が出版されている。

1.4 連絡先

授業に対する質問や要望がある人は遠慮なく授業中にしてください。講義を中断してもかまいません。講義が終わった後で気付いたことは、私の居室(自然科学総合研究棟3号館502号室)に来て指摘してくれても結構ですし、

e-mail: iwayama@kobe-u.ac.jp

へ電子メールを送ってもかまいません。なお、今までの講義ノートや今年度の講義ノートは私のホームページ

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~iwayama/>

からたどれるページに掲載しています。必要な人はダウンロードしてください。

1.5 第3クォーターの目標

第3クォーターでは流体力学の基礎方程式や基礎的な概念について解説する。最終的な目標は、以下の流体力学の方程式を理解することである。流体力学の基礎方程式を導くことが通常の流体力学の講義の進め方である。しかしながら、この講義では流体力学の基礎

方程式を先に与えてしまって、その意味を考える、理解する、という方針をとることにする。流体力学の基礎方程式は3種類の方程式の連立方程式系である。なお、座標系は特に断りがない場合にはデカルト座標系^{*3}を使用することにする。

1.5.1 最も一般的な基礎方程式系

連続の式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

ここで、 $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ はそれぞれ密度と流速である。^{*4}

\mathbf{v} の x, y, z 成分をそれぞれ u, v, w と書いたり、デカルト座標系の単位ベクトル \mathbf{e}_i , ($i = 1, 2, 3$) を用いて $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ と書く。

運動方程式 (和の規約を用いた表現)：

$$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{= \frac{Dv_i}{Dt}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i.$$

上式は i 成分の運動方程式である。ここで、 i, j は1～3までのいずれかの値をとる。 τ_{ij} は応力テンソル、 F_i は単位質量の流体に働く体積力の i 成分である。 $\frac{D}{Dt}$ はLagrange 微分と呼ばれ、 $\frac{\partial}{\partial t}$ とは

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

の関係がある。

応力テンソルを、流れを記述する物理量で表現する式は構成方程式と呼ばれ、流体の種類によって異なる。

熱力学的エネルギー方程式 (和の規約を用いた表現)：

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} e_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + J.$$

ここで、 \mathcal{U} は単位質量あたりの内部エネルギーで、 $\boldsymbol{\theta} = \theta_i \mathbf{e}_i$ は熱流、 e_{ij} はひずみ速度テンソル $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ 、 J は単位質量あたりの流体の加熱率である。応力テンソルのように、熱流 $\boldsymbol{\theta}$ の表現も流体の種類により異なる。

^{*3} x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, もしくは \mathbf{e}_i , ($i = 1, 2, 3$) と書く。

^{*4} 物理量の時間、空間依存性は以下では省略して書くことにする。

1.5.2 Newton 流体

応力テンソル τ_{ij} がひずみ速度テンソルの1次までで表現されるような等方性流体は Newton 流体と呼ばれ、この場合の基礎方程式系は以下の通りである。

連続の式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

運動方程式 (和の規約を用いた表現)：

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda e_{jj}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu e_{ij}) + F_i.$$

ここで、 p は圧力、 μ は粘性率、 λ は第2粘性率と呼ばれる。 μ, λ が定数と見なせる場合には、上式は Navier–Stokes 方程式と呼ばれる。さらに非圧縮性が仮定される場合には、粘性力項は速度の拡散 $\frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v}$ の形に書き下すことができる。一方、非粘性流体 ($\mu = \lambda = 0$) の運動方程式は Euler の方程式と呼ばれる。

熱力学的エネルギー方程式：

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J.$$

ここで、 $\Phi = \lambda e_{jj}^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij}$ は散逸関数と呼ばれ、粘性による運動エネルギーの散逸を表し、熱力学的エネルギー方程式の加熱項としての役割を果たす。

1.6 第4クォーターの目標

第4クォーターでは、上で提示した（特に議論の簡単化のために非粘性流体の場合の）基礎方程式を用いて、

- 大気鉛直構造
- 音波
- 水の波

を議論する予定である。

第 2 章

連続の式

流体力学の基礎方程式の一つである連続の式を議論する。連続の式は質量保存則を具体的に数式で書き表したものである。連続の式と質量保存則が等価であることを示す議論は、流体力学のその他の基礎方程式である運動方程式と熱力学的エネルギー方程式が、それぞれ運動量保存則とエネルギー保存則と等価であることを示す議論でも使用する。そこで、2.3 節の議論はよく理解しておいてほしい。

2.1 連続体

流体力学では連続体と呼ばれる物体を考察の対象とする。連続体とは物理量が、空間・時間の連続関数として与えられる仮想的な物体である。実在の物質を連続体とみなす近似は連続体近似と呼ばれる。すべての物質は原子や分子などの粒子により構成されるので、少なくとも物理量は空間の連続関数ではないが、原子や分子といった微細構造に立ち入らず、微細構造を平均化することによって実在の物体を連続体として取り扱う。

古典力学では、物体を有限の質量を持つが大きさを持たない質点や有限の大きさと質量を持つが変形しない剛体と理想化して物理現象を記述する。連続体近似という理想化は、このような古典力学における質点や剛体といった理想化に対応するものである。

連続体近似の方法

連続体近似は、物体内部のある点 P におけるある物理量 A の値を、 P を含む微小体積 δV (ただし、多数の原子や分子を含む) に関する A の平均値をもって定義することにより実現される。また、時間についても多数の原子や分子の衝突が充分に行われるが、しかしながら微小な時間 δt に渡って A を平均する。このような操作を物体内のあらゆる点、あらゆる時刻で行うことにより、その物理量は空間・空間の連続関数、即ち、場の量となる。

2.2 流体粒子

流体力学ではしばしば流体粒子 (fluid particle) またはパーセル (fluid particle) という言葉が登場する。これは流体を構成している原子・分子などの粒子を言い表しているのではなく、記述する現象の大きさに比べて (巨視的には) 極めて小さく点とみなせるが、無数の原子・分子が含まれるくらい (微視的には) 大きな体積要素のことである。前節で述べた δV 程度の大きさをもった流体の微小な塊のことである。このような流体粒子に対する様々な保存則を数式で表現したものが流体力学の基礎方程式となる。流体力学ではそれらの式を適当な初期条件, 境界条件の下で解くことにより, 流体の運動を考察する。

2.3 連続の式

流体は不生不滅である (流体の質量が保存される) こと (質量保存則) を具体的に書き表した数式が連続の式 (equation of continuity)

連続の式 (一般的な形)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

である。

(2.1) が質量保存則を表していることを以下で示す。空間に固定された形を変えない任意の閉曲面 S を考える。 S に囲まれた領域を V とする。(2.1) を V にわたって体積積分する:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0. \quad (2.2)$$

ここで左辺第1項は時間微分と空間積分は独立な演算であるため順序を交換してもよいこと, さらに空間積分された場の量は時間のみの関数であることから時間微分は偏微分ではなく常微分で書き換えられることに注意すると,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (2.3)$$

となる。一方, (2.2) の左辺第2項における体積積分は Gauss の発散定理を用いて面積積分に書き換えられる:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.4)$$

以上をまとめると

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.5)$$

となる.

(2.5) の意味を考える. 任意の時刻で V に含まれる質量は,

$$\int_V \rho dV$$

である. そこで, (2.5) の左辺は単位時間あたりの V の質量変化である. いっぽう (2.5) の右辺の $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ は微小面積 dS を底辺とする高さ $v_n \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ の斜円柱の体積である (図 2.1 参照). ここで, \mathbf{n} は微小面積要素 $d\mathbf{S}$ の外向き法線である. この体積 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ は単位時間あたり dS を通過して V から流出する流体の体積に等しいので, 従って (2.5) の右辺は, 単位時間あたり V の表面を通過して V 内に流入する流体の質量を表す.*¹ つまり, (2.5) は

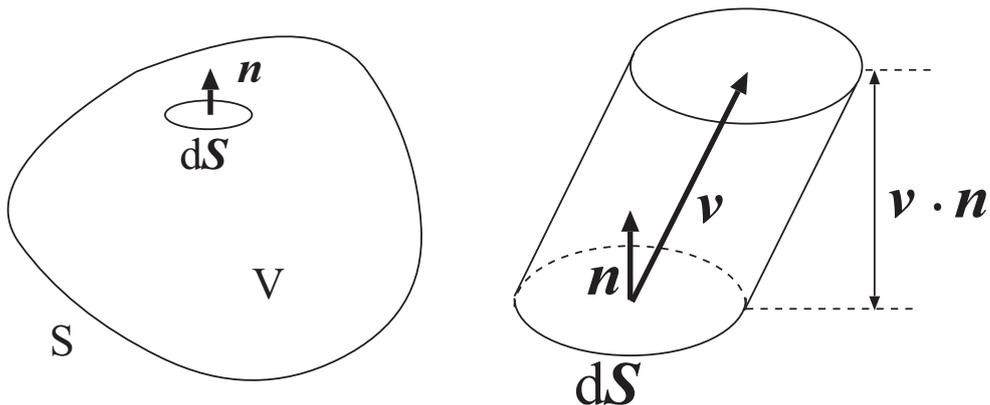


図 2.1 連続の式を適用する任意の体積 V と単位時間あたり微小面積領域 dS を通過する流体の体積.

(2.5) の解釈

(V の質量の時間変化率)

= (単位時間あたり V の表面 S を通過して V 内に流入する流体の質量)

を表している. 別の言い方をすると, (2.5) は V 内に質量の湧き出しや吸い込みがない, ことを示している.

*¹ ここで S の表面に立てられた法線ベクトル \mathbf{n} は外向きであるため, 負符号は流れ込む流体を表していることに注意せよ.

(2.1) の左辺第2項, ρv は質量流束 (質量フラックス) と呼ばれ, 単位時間・単位面積あたりを通過する質量を表す. (2.1) は, 質量が保存されるならば, ある点における密度の時間変化は, 質量フラックスの収束・発散に等しいことを表している.

演習問題

1. 和の規約を用いて連続の式 (2.1) を書くと,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (2.6)$$

となることを確かめなさい.

2. 和の規約を用いて Gauss の発散定理 (2.4) を書くと

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) dV = \int_S \rho v_i dS_i \quad (2.7)$$

と表現されることを確かめなさい.

第 3 章

流れの記述

流体力学では流体を連続体とみなすので、物理量は時間と空間の連続関数、即ち、場の量、として表現される。場の量としての記述には二通りの記述方法があり、それぞれの方法に時間微分が定義できる。ここではこれら二つの記述方法と二つの時間微分について解説する。

3.1 Lagrange 的記述

この記述方法では、流体を無数の流体粒子の集団と見なし、各粒子の運動を追跡することにより流体の運動を記述する。この記述方法は質点系の力学における質点系の記述方法を連続体に対して適用したものである。そこで質点系の記述方法と非常によい対応関係がある。たとえば N 個の質点系の運動を考えたときに、質点系の力学では i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N$) の質点の任意の時刻 t における位置 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ を問題にする。^{*1} ここで i は質点の“名前”である。一方、流体粒子の“名前”には、ある時刻における流体粒子の位置座標を用いる。ある時刻における空間の一点に存在する流体粒子は唯一であるために、位置座標で流体粒子を識別することができる。通常は初期時刻 ($t = 0$) の位置が“名前”に用いられる。 $t = 0$ において位置座標 $\mathbf{a} \equiv (a, b, c)$ に存在していた流体粒子の“名前”を \mathbf{a} もしくは (a, b, c) と名付ける。 \mathbf{a} や (a, b, c) は物質座標 (material coordinates) と呼ばれる。

質点系と流体の大きな違いは次の 2 点である。

- 質点の名前 i は離散的量 (整数) であるが、流体粒子の名前 \mathbf{a} は連続的量 (\mathbf{a} の成分は実数) である。
- 質点系の場合には各質点はバラバラに運動をする。一方流体の運動では、流体は連

^{*1} この授業では特に断りのない限り、デカルト座標系で流体現象を記述する。

| | 流体力学 (Lagrange 的記述) | 古典力学 (質点系) |
|------------|---|-------------------|
| 粒子の識別子 | 物質座標 $\mathbf{a} \equiv (a, b, c)$: 連続的量 | i : 離散的量 |
| 物理量, 例えば速度 | $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ | $\mathbf{v}_i(t)$ |
| 時間微分 | $\frac{D}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{a}}$ | $\frac{d}{dt}$ |

表 3.1 流体力学における Lagrange 的記述と質点系の力学との対応関係.

連続体であるから隣り合う流体粒子 (近い名前の流体粒子) は互いに似た運動をする.

3.2 Lagrange 微分

各流体粒子に付随した物理量の時間的変化率, 時間微分, を **Lagrange 微分** (または物質微分, material differentiation) と呼び

$$\frac{D}{Dt}$$

で表す.*² Lagrange の方法では, 物理量 $F(\mathbf{a}, t)$ (\mathbf{a} という名前の流体粒子が時刻 t において持っている物理量) の Lagrange 微分は

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\mathbf{a}} \quad (3.1)$$

と表せる. これは質点系の力学の $\frac{d}{dt}$ に対応するものである.*³

以上をまとめると, 表 3.1 のようになる.

例

流体粒子の位置ベクトル \mathbf{r} の Lagrange 微分は, その流体粒子の速度 \mathbf{v} である. 即ち, $\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt}$ となる. また, 速度の時間変化率 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ は加速度である.

3.3 Euler 的記述

Lagrange 的記述は質点系の力学とよい対応関係にあるので, 質点系の力学の知識を利用できるという利点がある. しかしながら, この記述方法は実用的ではない. Lagrange の方法が与えるのは, ある時刻に適当な場所にあった流体粒子が, のちの時刻にどこに行き,

*² 教科書によっては, Lagrange 微分を $\frac{d}{dt}$ と表しているものもある.

*³ 質点系の力学における時間微分 $\frac{d}{dt}$ は, 名前 i を固定して微分していることに注意.

どのような性質（温度, 圧力, 速さ）をもつか, である.*4 一方, 我々が興味のあるものは, 例えば, 大気現象を想像してみると, ある時刻における, ある場所の気温であったり気圧や風向・風速であろう. このような観測する時間と場所における物理量の記述に用いられるより実用的な記述法が Euler 的記述である.

この記述方法では任意の時刻 t において, 空間の各点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ で物理量の値を指定することによって流体の運動を記述する. すなわち, 電磁気学における物理量の記述と同じものである. そこで, 電磁気学と流体力学ではしばしば同じ形の方程式が登場する. 歴史的には電磁気学よりも先に流体力学が学問的に体系化されており, 流体力学の学問体系を参考にして電磁気学が体系化されたといわれている.

Euler 的記述と Lagrange 的記述の大きく異なる点は, 変数 x, y, z が Lagrange 的記述では従属変数 (物質座標と時間に依存する変数) なのに対し, Euler 的記述では独立変数であることである.

3.4 Lagrange 微分の Euler 的表現

流体粒子に付随したある物理量 F の Euler 的記述は $F(x, y, z, t)$ である. この量の Lagrange 微分を導く. 即ち, F の Lagrange 微分を独立変数を x, y, z, t とした微分 (Euler 微分と呼ぶことにする) で表現する). ある時刻 t で $\mathbf{r} = (x, y, z)$ にあった流体粒子が, 時刻 $t + \delta t$ において $\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t = (x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t)$ に移動したとする. このとき流体粒子に付随した F の変化 δF は,

$$\begin{aligned}\delta F &= F(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t, t + \delta t) - F(x, y, z, t) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right) \delta t + \mathcal{O}((\delta t)^2),\end{aligned}$$

である. ここで $\mathcal{O}((\delta t)^2)$ は δt の二次以上の項を表す. そこで, F の Lagrange 微分の Euler 的表現は

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \quad (3.2)$$

となる. F は任意であるから, Lagrange 微分の Euler 微分による表現として

*4 原子力発電所を発生源とした放射性物質が, いつ, どこに, どのくらいの濃度でやってくるか, といったことを問題にする場合には Lagrange 的記述が有効である.

Lagrange 微分の Euler 微分による表現

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\end{aligned}\tag{3.3}$$

を得る.

注意： (3.3) の第 2 の表現に特に注意して欲しい. $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は決して $\nabla \cdot \mathbf{v}$ とは等しくない! ∇ は演算子であるから演算の順序を入れ換えては意味が違ってくる. 例年, 両者の区別ができない人が非常に多い. $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は演算子で, 何か関数に食いついて初めて数値をとりえる (つまり $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は飢えている) のに対し, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ はそれ自身で明確な数値を持ちえる.

以下に 2 つの記述を表にしてまとめておく.

| | Langrange の方法 | Euler の方法 |
|-----------------------------|---|---|
| 立場 | 粒子的立場の記述 | (電磁気学のような) 場の立場の記述 |
| 独立変数 | $\mathbf{a} = (a, b, c), t$ | $\mathbf{r} = (x, y, z), t$ |
| 従属変数 | $\mathbf{r}; p, \rho, T, \dots$ | $\mathbf{v} = (u, v, w); p, \rho, T, \dots$ |
| Lagrange 微分, $\frac{D}{Dt}$ | $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{a}}$ | $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ |

(3.3) の右辺第 1 項は Euler 微分項, $\mathbf{v} \cdot \nabla$ の項は移流項 (advective term) や対流項 (convective term) と呼ばれる. 以下の例題は, 移流という言葉の意味と移流項の作用を理解するのに適当であろう.

例題: ある観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3.0 K 気温が低いとする. もし 10m s^{-1} の北風が吹いていて, 空気塊の温度は変化しないものとする. このとき, 観測所における気温の時間変化率は以下のように求められる.

温度 T の Lagrange 微分は Euler 的な微分によって,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T$$

と表現できる. ここで, $\frac{DT}{Dt}$ が空気塊の温度変化率であり, $\frac{\partial T}{\partial t}$ が観測地点における温度変化率である. いま, 問題より $\frac{DT}{Dt} = 0$ なので, 観測地点における温度変化率は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T$$

と温度移流で決まる. 北向きを y 座標の正の向きとすると北風は $\mathbf{v} = v\mathbf{j}$, $v = -10\text{m/s}^2$ と表現できる. 一方, 温度勾配は北に行くほど温度が下がるので, $\nabla T =$

$\frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j}$, $\frac{\partial T}{\partial y} = -3 \text{ K/50 km}$ である。したがって

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T = -6.0 \times 10^{-4} \text{ K/s} = -2.2 \text{ K/h}$$

北半球に住んでいる我々にとって、一般に北に行くほど温度は下がっており、日常経験によると、「北風が吹くと冷たいもしくは寒い」、のであるが、上の例はそのような状況をまさに表現している。

演習問題

1. Lagrange 微分を用いて連続の式 (2.1) を表現すると

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

となることを示しなさい。

2. 体積 δV の微小な流体要素を考える。この微小体積のもつ物理量 A が Lagrange 的な保存則に従う $\frac{DA}{Dt} = 0$ とする。このとき、 A の単位質量あたりの量 $a \equiv \frac{A}{\rho \delta V}$ は Lagrange 的な保存則 $\frac{Da}{Dt} = 0$ に従い、一方、単位体積あたりの量 $\tilde{a} \equiv \frac{A}{\delta V}$ はフラックス形式の保存則 $\frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{a} \mathbf{v}) = 0$ に従うことを確かめなさい。

第 4 章

流体に働く力

質点や剛体の運動を考察する際には, Newton の第二法則 (考察する物体に働く力の総和はその物体の運動量の時間変化率に等しい) よりそれらの運動方程式をたてる. さらに, その方程式を解くことにより質点や剛体の運動状態を調べることができる. 流体力学でも同様に “流体粒子に働く力の総和が, 流体粒子の運動量の時間変化率に等しい” として流体粒子に関する運動方程式を立て, それを適当な条件 (境界条件, 初期条件) のもとで解き, 流体の運動を考察する. ここでは流体に限らず広く連続体*¹に働く力について考える.

4.1 体積力, 面積力

連続体に働く力には次の二種類がある.

- 体積力 (body force) : その大きさが物質の質量や体積に比例する力. 重力, 遠心力, Coliois 力などがその例であり, 質点の力学でもおなじみのものである.
- 面積力 (surface force) : 連続体特有の力. 面を通して作用し, その大きさが面の大きさに比例する力. この力は, 連続体を変形させる作用をもつ.

単位面積あたりに働く面積力を応力 (stress) と呼ぶ. これは MKS 単位系では Nm^{-2} の次元を持つ. “力” という言葉がついているが, その次元は力の次元 N ではないことに注意して欲しい.

4.2 応力

連続体中の点 P における応力は, 点 P を通る平面 S を選び, S 上の P を含む単位面積を通して平面 S の法線 \boldsymbol{n} の正の側から負の側へ及ぼす力で定義する. 応力は, S の選

*¹ 流体以外の連続体の代表的なものは弾性体である. 連続体と流体の区別はのちの章で述べる.

び方, すなわち法線 \mathbf{n} に依存する. また, 力はベクトル量であるから大きさと方向を持つ. したがって応力は2つの方向 (法線の方向と力の方向) と1つの大きさ (力の大きさ) に依存する量である. これは, 数学的には2階のテンソル (tensor) と呼ばれ, 9個の成分, τ_{ij} , ($i, j = x, y, z$ もしくは $1, 2, 3$), で表される量である.*2 τ_{ij} は応力テンソルと呼ばれる. τ_{ij} の表記の定義は以下のとおりである:

——— 応力テンソル τ_{ij} の定義 ———

x_j 軸に垂直な平面を通して, x_j 軸の大きい側から小さい側へ作用する x_i 方向の応力を τ_{ij} と定義する.

例えば, x 軸に垂直な平面を通して, x の大きい側から小さい側へと作用する y 方向の応力は τ_{yx} または τ_{21} と書かれる. 作用・反作用の法則を考えると,

$$\tau_{i(-j)} = -\tau_{ij} \quad (4.1)$$

の関係がある.

応力を面の接線方向の成分と法線方向の成分に分解し, それぞれを接線応力 (tangential stress) またはせん断応力 (shear stress), 法線応力 (normal stress) と呼ぶ. 法線応力は, 面の両側が押しあう場合は圧力 (pressure), 引っ張りあう場合は張力 (tension) となる. 即ち, τ_{ij} , ($i \neq j$) は接線応力, τ_{ij} , ($i = j$) は法線応力を表す.

4.3 応力を用いた流体の定義

先に, 気体と液体を一括して流体と呼ぶと述べたが, 本節で定義した応力の概念を用いると, 流体は以下のように定義できる:

——— 流体の定義 ———

静止状態では接線応力が現れず, かつ法線応力が圧力である連続体を流体と定義する.

ここで, 「静止状態では」という断りが重要である. なぜなら, もし接線応力が現れたら, 僅かの力で変形するという性質のために, 流体は静止状態にあり得ない. また, 法線応力が張力の場合には, その面から流体は裂けてしまうからである.

4.4 Pascal の原理

法線応力 (圧力) に関して次の性質が証明できる:

*2 添え字 1, 2, 3 はそれぞれデカルト座標系の x, y, z 成分を表す.

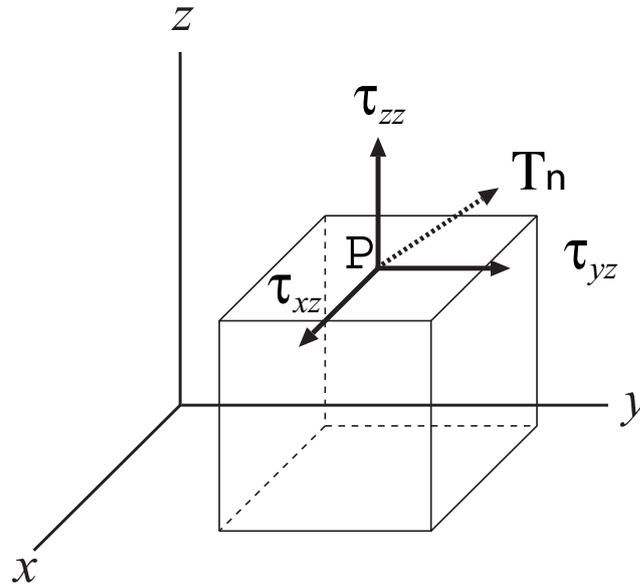


図 4.1 点 P を通る z 軸に垂直な平面を考える. このとき, P に働く応力 \mathbf{T}_n は平面に水平な成分 τ_{xz}, τ_{yz} と垂直な成分 τ_{zz} に分解できる.

“静止状態, 運動状態を問わず接線応力が常に 0 ならば, 法線応力は考える面の選び方によらない.”

—————[証明]—————

[問題設定:] ある点 P における圧力が P を通る平面の選び方に依存しないことを示す.

点 P を頂点とし, 微小な三角形 PAB を底面とする高さが 1 の三角柱を考える (図 4.2 参照). 三角柱が微小なので, 側面 PA, PB, AB に働く法線応力 (圧力) は各側面上でそれぞれ一様で p_1, p_2, p_3 , とする. また, $PA = l_1, PB = l_2, \angle A = \alpha_1, \angle B = \alpha_2$ とする.

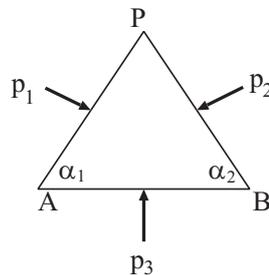


図 4.2 点 P を頂点とする単位高さの微小な三角柱に働く面積力.

- 静止状態で体積力が働いていない場合: 微小物体に働く圧力の AB 方向の成分は,

$$p_1 l_1 \sin \alpha_1 - p_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0, \quad (4.2)$$

である。正弦定理

$$\frac{\sin \alpha_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_2}{l_1} \quad (4.3)$$

より, (4.2) から

$$p_1 = p_2, \quad (4.4)$$

が導ける。したがって圧力は P を通る平面の選び方に依存しない。

- 静止状態で体積力が働いている場合: 三角形の辺の長さの大きさを l とすると, 体積力は上記のような微小物体を考えたときに, $\mathcal{O}(l^2)$ の大きさで, いっぽう面積力の大きさは $\mathcal{O}(l)$ であるので, 体積力の大きさは面積力の大きさに比べて高次の微少量になる。したがって, l が非常に小さい場合には, 体積力の効果は面積力の効果に比べて無視できる。したがって, 体積力が働いていない先の議論が適用できる。
- 運動状態の場合: 質量と加速度の積を D'Alembert の原理によって慣性力として静力学 (静止状態) の問題に帰着させる。さらに慣性力は体積力であるから, l が小さいときには慣性力は無視することができ, 体積力が働いていない静止状態の議論が適用できる。

—————[証明終り]—————

特に, 静止状態における流体の圧力が, 圧力の働く面の向きに依存しないことは **Pascal** の原理として知られている。

第 5 章

運動方程式

流体粒子に対する運動量保存則（Newton の第 2 法則）を具体的に書き表した数式が流体力学の基礎方程式の一つである運動方程式である。この節では運動方程式の解説をする。

5.1 一般的な場合の運動方程式

流体力学の基礎方程式の一つである運動方程式は以下の形で書ける：

運動方程式 (一般的な形)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i. \quad (5.1)$$

(5.1) が運動量保存則を表していることを以下で示す。連続の式が質量保存則を表していることを示した時と同じ議論をする。その前に準備として (5.1) を少し変形する。 ρ と (5.1) との積を作り、連続の式を用いると

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\rho v_i) v_j\} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i \quad (5.2)$$

となる。空間に固定された形を変えない任意の閉曲面 S を考える。 S に囲まれた領域を V とする。(5.2) を V にわたって体積積分する：

$$\int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\rho v_i) v_j\} dV = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho F_i dV. \quad (5.3)$$

ここで左辺第 1 項は時間微分と空間積分は独立な演算であるため順序を交換してもよいこと、さらに空間積分された場の量は時間のみの関数であることから時間微分は偏微分ではなく常微分で書き換えられることに注意すると、

$$\int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV \quad (5.4)$$

となる. 一方, (5.2) の左辺第 2 項および右辺第 1 項における体積積分は共に Gauss の発散定理を用いて面積積分に書き換えられる:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i) v_j dV = \int_S (\rho v_i) v_j dS_j, \quad (5.5)$$

$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S \tau_{ij} dS_j. \quad (5.6)$$

以上をまとめると

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \int_S (\rho v_i) v_j dS_j + \int_S \tau_{ij} dS_j + \int_V \rho F_i dV \quad (5.7)$$

となる.

(5.7) の意味を考える. (5.7) の左辺第 1 項は V の運動量の i 方向成分の時間変化率である. (5.7) の右辺第 1 項は単位時間当たり V の表面 S を通って V 内に流入する流体の運動量の i 方向成分を表す. (5.7) の右辺第 2 項は, V の表面 S に働く面積力の i 方向成分である.*¹ (5.7) の右辺第 3 項は, V に働く体積力の i 方向成分である.

つまり, (5.7) は

(5.7) の解釈

(V の運動量の i 方向成分の時間変化率) =
 (単位時間当たり V の表面を通って V 内に流入する流体の運動量の i 方向成分) +
 (V の表面 S に作用する面積力の i 方向成分) +
 (V に作用する体積力の i 方向成分)

を表している. 別の言い方をすると, (5.7) は V 内に運動量の湧き出しや吸い込みがない, ことを示している.

(5.1) が流体力学の運動方程式のもっとも一般的な形である. 流体の種類により応力テンソルの表現が変わるので, 流体の種類ごとに運動方程式は異なる. 以下では代表的な二つの流体の運動方程式を紹介する.

5.2 Newton 流体の場合 : Navier-Stokes 方程式

流れの形態と応力との関係は考える流体によって異なる. とくに水や空気の場合は, 流れと応力との関係は

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij} \quad (5.8)$$

*¹ $\tau_{ij} dS_j$ は j 方向に垂直な面積 dS_j の面に τ_{ij} の応力が働いていることを表している.

でよく記述できることが知られている。応力と流れが (5.8) で与えられるような流体は Newton 流体と呼ばれる。ここで μ は粘性率, λ は第 2 粘性率と呼ばれる。

(5.8) を運動方程式 (5.1) に代入すると

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda e_{jj}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu e_{ij}) + F_i, \quad (5.9)$$

となる。温度や圧力によって μ や λ は変化するが, 変化が小さい場合にはそれらは定数と見なせて運動方程式 (5.9) は

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i, \quad (5.10a)$$

またはベクトル形式で

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\mu + \lambda) \nabla \{(\nabla \cdot \mathbf{v})\} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad (5.10b)$$

と書ける。ここで $\nu = \mu/\rho$ は動粘性率もしくは動粘性係数 (coefficient of kinematic viscosity) と呼ばれる。(5.10) は **Navier-Stokes** 方程式 (Navier-Stokes equation) と呼ばれる。

(5.10a) もしくは (5.10b) の右辺第 1 項は圧力傾度力と呼ばれる。流体に圧力が働いているだけでは, 流体は加速, 減速しない。圧力に勾配 (空間的な差異) があって初めて実質的な力となる。流体は圧力の下向き勾配 (down gradient) の方向 (圧力の高い方向から低い方向) に加速される, ことを表している。^{*2}

5.3 非粘性流体の場合：Euler 方程式

流体の粘性 μ, λ がゼロである理想的な流体は, 非粘性流体もしくは理想流体と呼ばれる。このとき (5.10) は

^{*2} ある物理量 A の勾配, ∇A , は A の等値線に垂直で A の値の小さいほうから大きな方向へ向く方向を持っていることを思い出そう。

Euler 方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i, \quad (5.11)$$

またはベクトル形式で

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F}, \quad (5.12)$$

と書ける。非粘性流体の運動方程式は **Euler** の方程式と呼ばれる。

演習問題

1. (5.2) を導出しなさい。
2. (5.8) を運動方程式 (5.1) に代入して (5.9) を導出しなさい。

第 6 章

エネルギー方程式

流体力学の基礎方程式の 1 つである熱力学的エネルギー方程式が、エネルギー保存則と等価であることを議論する。

6.1 運動エネルギーの発展方程式

6.1.1 一般的な場合

5 章で議論した運動方程式から、運動エネルギーに関する方程式を導出してみる。(5.1) に ρv_i を乗じると、

$$\rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i F_i,$$

上式左辺は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i v_j \right) - \underbrace{\frac{1}{2} v_i v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right)}_{\text{連続の式よりゼロ}}$$

と表現できる。次に右辺第一項は、

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} e_{ij}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

上式の最後の表現には τ_{ij} が対称テンソルである ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) ことを用いた。したがって、単位質量あたりの運動エネルギーを $\mathcal{T} = \frac{1}{2} v_i v_i$ とすると、その発展方程式は

$$\frac{\partial (\rho \mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \mathcal{T} v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} + \rho v_i F_i - \tau_{ij} e_{ij}, \quad (6.2)$$

となる。

質点系の力学では力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルとの和）が保存される。一方、流体力学では、たとえ微小体積要素に働く外力 \mathbf{F} がゼロであっても（ポテンシャルからの寄与はこの項から生じる）、微小体積要素の力学的エネルギーは保存しないことに注意すべきである。力学的エネルギーのみでは保存則は成立せず、力学的エネルギーと内部エネルギーの和が保存するのである。(6.2) の右辺最終項が、運動エネルギーと内部エネルギーとの間の変換を表す項になっている。このことは、応力テンソル τ_{ij} を具体的に表現すると分かりやすい。

6.1.2 Newton 流体の場合

構成方程式が (A.13) で与えられる Newton 流体では、

$$\begin{aligned}\tau_{ij}e_{ij} &= -pe_{ii} + \lambda e_{ii}e_{jj} + 2\mu e_{ij}e_{ij} \\ &= -pe_{ii} + \Phi\end{aligned}\quad (6.3)$$

$$\Phi \equiv \lambda e_{ii}^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij},\quad (6.4)$$

を用いることによって、(6.2) は

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\rho\mathcal{T} + p - \lambda e_{ii})v_j - 2\mu e_{ij}v_i\} = \rho v_i F_i + pe_{ii} - \Phi\quad (6.5)$$

と書ける。 Φ は散逸関数 (dissipation function) と呼ばれ、正の量である。これは粘性の効果による運動エネルギーの散逸を表している。この散逸された運動エネルギーは熱力学的エネルギーの方程式の加熱項になる。このことは熱力学的エネルギーの方程式の議論の際にもう一度振り返ることにする。

6.1.3 非粘性流体の場合

非粘性流体の場合には、 $\mu = \lambda = 0$ なので、散逸関数はゼロになり、したがって、(6.5) は

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\mathcal{T} + p)v_j}{\partial x_j} = \rho v_i F_i + pe_{ii},\quad (6.6a)$$

もしくはベクトル形式で

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho\mathcal{T} + p)\mathbf{v}\} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + p\nabla \cdot \mathbf{v},\quad (6.6b)$$

となる。(6.6b) の右辺最終項は圧力と体積の変化との積である。熱力学によるとそれは系がされた（もしくは系がした）仕事である。熱力学の第一法則は内部エネルギーの変化は系に加えられた熱量と系がされた（/された）仕事の和として書けるので、したがって、

(6.6b) の右辺最終項を通じて運動エネルギーの式が内部エネルギーとつながることがわかる。

6.2 熱力学的エネルギー方程式

6.2.1 一般的な場合

流体力学の基礎方程式の熱力学的エネルギー方程式は以下の形に書ける：

熱力学的エネルギー方程式（一般的な場合）

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} e_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + J. \quad (6.7)$$

ここで、 \mathcal{U} は単位質量当たりの内部エネルギー、 θ は熱流で J は単位質量当たりの流体の加熱率である。

(6.7) がエネルギー保存則を表していることを以下で示す。まず、密度と (6.7) との積を計算すると内部エネルギー密度の発展方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{U}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\rho \mathcal{U}) v_j\} = \tau_{ij} e_{ij} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + \rho J \quad (6.8)$$

が得られる。さらに運動エネルギーの発展方程式 (6.2) と (6.8) を足すことにより

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\rho(\mathcal{T} + \mathcal{U})\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{\rho(\mathcal{T} + \mathcal{U}) v_j\} = \frac{\partial (v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + \rho v_i F_i + \rho J \quad (6.9)$$

を得る。

空間に固定された形を変えない任意の閉曲面 S を考える。 S に囲まれた領域を V とする。(6.9) を V にわたって体積積分する：

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \{\rho(\mathcal{T} + \mathcal{U})\} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \{\rho(\mathcal{T} + \mathcal{U}) v_j\} dV = \\ \int_V \frac{\partial (v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} dV + \int_V \rho v_i F_i dV + \int_V \rho J dV. \end{aligned} \quad (6.10)$$

ここで左辺第1項は時間微分と空間積分は独立な演算であるため順序を交換してもよいこと、さらに空間積分された場の量は時間のみの関数であることから時間微分は偏微分ではなく常微分で書き換えられることに注意すると、

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \{\rho(\mathcal{T} + \mathcal{U})\} dV = \frac{d}{dt} \int_V \{\rho(\mathcal{T} + \mathcal{U})\} dV \quad (6.11)$$

となる. 一方, (6.10) の左辺第 2 項, 右辺第 1 項, 右辺第 2 項における体積積分は Gauss の発散定理を用いて面積積分に書き換えられる:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) v_j \} dV = \int_S \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) v_j dS_j, \quad (6.12)$$

$$\int_V \frac{\partial (v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} dV = \int_S (v_i \tau_{ij}) dS_j, \quad (6.13)$$

$$- \int_V \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} dV = - \int_S \theta_j dS_j. \quad (6.14)$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \{ \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) \} dV = & - \int_S \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) v_j dS_j \\ & + \int_S (v_i \tau_{ij}) dS_j - \int_S \theta_j dS_j + \int_V \rho v_j F_j dV + \int_V \rho J dV \end{aligned} \quad (6.15)$$

となる.

(6.15) の意味を考える. 任意の時刻で V に含まれる全エネルギー (運動エネルギーと内部エネルギーの和) は,

$$\int_V \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) dV$$

である. そこで, (6.15) の左辺は単位時間あたりの V の全エネルギー変化である. いっぽう (6.15) の右辺の $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ は微小面積 dS を底辺とする高さ $v_n \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ の斜円柱の体積である (図 2.1 参照). ここで, \mathbf{n} は微小面積要素 $d\mathbf{S}$ の外向き法線である. この体積 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ は単位時間あたり dS を通過して V から流出する流体の体積に等しいので, 従って (6.15) の左辺第 1 項は, 単位時間あたり V の表面を通過して V 内に流入する流体の全エネルギーを表す.*1 (6.15) の右辺第 2 項は, V の表面 S に働く面積力が行う単位時間当たりの仕事*2である. (6.15) の右辺 3 項は, V の表面 S を通過して単位時間内に V に流入する熱流である. (6.15) の右辺 4 項は, V に働く体積力がする仕事, (6.15) の右辺 4 項は, V 内に存在する熱源に伴う加熱率である.

つまり, (6.15) は

*1 ここで S の表面に立てられた法線ベクトル \mathbf{n} は外向きであるため, 負符号は流れ込む流体を表していることに注意せよ.

*2 力と変位との内積が仕事である. 単位時間当たりの変位は速度なので, 速度 v_j と面積力 $\tau_{ij} dS_j$ との内積は単位時間当たりの仕事になる.

(6.15) の解釈

$$\begin{aligned}
& (V \text{ の全エネルギーの時間変化率}) \\
= & (\text{単位時間当たり } V \text{ の表面 } S \text{ を通って } V \text{ 内に流入する流体の全エネルギー}) \\
& + (V \text{ の表面 } S \text{ に働く面積力が行う単位時間当たりの仕事}) \\
& + (V \text{ の表面 } S \text{ を通って単位時間内に } V \text{ に流入する熱流}) \\
& + (V \text{ に働く体積力がする仕事}) \\
& + (V \text{ 内に存在する熱源に伴う過熱率})
\end{aligned}$$

を表している。

6.2.2 Newton 流体の場合

Newton 流体の場合には, (6.7) の右辺第一項は (6.3) と連続の式から

$$e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

を用いることにより, (6.7) は

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \quad (6.16)$$

と書ける。熱流や粘性による運動エネルギーの散逸を含めて加熱項 J と見做すと (6.16) は, 熱力学の第一法則 $\delta U + p\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = Q$ において, 熱力学的な状態の変化が単位時間に起こったと考えて δ の記号を Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}$ で置き換えたものと同じ形式になっている。

6.2.3 非粘性流体の場合

非粘性流体の場合には, 熱力学的エネルギー方程式は, (6.16) において $\Phi = 0$ とした

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \quad (6.17)$$

となる。

演習問題

1. (6.8) を導出しなさい。

第 7 章

状態方程式

前章までに議論した連続の式, (Newton 流体もしくは非粘性流体の) 運動方程式, (Newton 流体もしくは非粘性流体の) 熱力学的エネルギー方程式の 3 種類, 計 5 本の方程式*1には, 未知変数として密度 ρ , 速度 \boldsymbol{v} , 圧力 p , 内部エネルギー \mathcal{U} の 6 つが含まれている. したがって, 方程式は閉じていないように見える. しかし熱力学によると, 熱力学的な物理量の間には一定の関数関係 (状態方程式) が存在し, ある熱力学的な変数は別の 2 つの熱力学的変数で表現することが可能であることが知られている. したがって, 状態方程式が与えられていれば, 流体力学の基礎方程式は上記の 5 本で充分である. 本章では, 代表的な状態方程式を紹介する.

7.1 理想気体の状態方程式

希薄な気体では, 以下のような状態方程式がよい近似で成り立つ:

理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT. \quad (7.1)$$

ここで, R は気体定数である. 例えば, 気象学では地球大気を理想気体とみなす.*2

注意: (7.1) は単位体積の理想気体の状態方程式である. 一方, 化学で習う n kmol の理

*1 空間が 3 次元の場合には, 運動方程式は x, y, z の各成分について存在するので, 連続の式, x, y, z 方向の運動方程式, 熱力学的エネルギー方程式の全部で 5 本である.

*2 理想気体では, 内部エネルギーは温度のみの関数,

$$\mathcal{U} = C_v T + \text{const} \quad (7.2)$$

と表される. ここで C_v は定積比熱である.

想気体の状態方程式は

$$pV = nR^*T \quad (7.3)$$

である。ここで、 R^* は普遍定数 ($R^* = 8.314 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$) である。体積 V に含まれる理想気体の分子の質量を m kg, 理想気体の分子量を M すると, (7.3) は

$$p = \frac{m}{V} \frac{R^*}{M} T \quad (7.4)$$

となる。 $\rho = m/V$ であるから, (7.1) と (7.4) を見比べると

$$R = \frac{R^*}{M} \quad (7.5)$$

という関係が成り立つことがわかる。即ち, (7.1) の気体定数 R は普遍定数ではなく, 気体の種類に依存した値を持つ。

■地球大気の気体定数 地球大気^{*3}は窒素 (分子量 28.01) 75.51 %, 酸素 (分子量 32.00) 23.01 %, アルゴン (分子量 39.95) 1.286 % の混合気体なので^{*4}, 平均分子量は $M = (28.01 \times 75.51 + 32.00 \times 23.01 + 39.95 \times 1.286)/100 = 28.97$ である。したがって $R = R^*/28.97 = 287.0 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ である。^{*5}

気体分子運動論によると単原子分子気体の定積比熱 C_v は気体定数 R^* の $\frac{3}{2}$ 倍, 2原子分子気体のそれは気体定数の $\frac{5}{2}$ 倍であることが知られている。^{*6} 一方, 定圧比熱は $C_p = C_v + R$ なので,^{*7} したがって, 単位体積あたりの空気の定圧比熱 C_p は $C_p = \frac{7}{2}R = 1004 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ となる。^{*8}

7.2 順圧流体の状態方程式

連続の式に現れる未知変数は, 密度 ρ と速度 \boldsymbol{v} である。一方, 運動方程式にはこれらの未知変数の他に圧力 p が未知変数として現れている。したがって, もし圧力と密度との間に一定の関数関係 (状態方程式)

$$\rho = \mathcal{F}(p), \quad (7.6)$$

*3 ただし水蒸気を含まない乾燥大気

*4 高度約 80 km あたりまでこのような成分比に保たれている。

*5 有効数字をいい加減にして計算しているので, よい子はこのような真似はしないように。

*6 定積比熱は $\frac{1}{2}R \times (\text{自由度})$ である。

*7 Mayer の関係式と呼ばれる。

*8 $C_p = \frac{7}{2}R$ が大雑把に 1000 という数値は覚えやすいので, 私は参照する文献が手元にない場合には, この関係式から逆に R の値を概算するようにしている。

もしくは陰関数表示で

$$f(p, \rho) = 0 \quad (7.7)$$

に従う流体を考えるならば、熱力学的エネルギー方程式を持ち出さなくても、連続の式と運動方程式のみで方程式を閉じるさせることができる。(7.6) あるいは (7.7) を満足するような流体を順圧流体 (barotropic fluid) と呼ぶ。これは (7.7) 式で与えられる流体の等圧面と等密度面が平行であることからこのように呼ばれている。実際に、(7.6) の両辺の勾配を取ると

$$\nabla \rho = \frac{d\mathcal{F}}{dp} \nabla p.$$

$\nabla \rho$ と ∇p の外積を計算すると、

$$\nabla \rho \times \nabla p = \frac{d\mathcal{F}}{dp} \nabla p \times \nabla p = 0. \quad (7.8)$$

つまり、(7.6) を満たす流体では p の等値線と ρ の等値線は平行である。

いっぽう一般の流体の状態は密度、圧力以外に例えば温度にも依存するので等密度面と等圧面は平行ではなく傾いている。このような流体は傾圧流体 (baroclinic fluid) と呼ばれる。順圧と言ういいかたは気象学や地球流体力学特有の呼びかたのようで、通常の流体力学では、barotropic fluid のことをバロトロピー流体と呼び (例えば今井功：流体力学 (岩波書店) 参照)、一方、baroclinic や傾圧と言う言葉はでてこない。

上に述べた順圧流体として例えば以下のような場合が考えられる。

均質流体

密度が空間的に一様で、時間的にも変動しない流体:

$$\rho = \rho_0 (= \text{const}). \quad (7.9)$$

等温変化する理想気体

理想気体の状態方程式において温度が一定 $T_0 = \text{const.}$ で変化する場合:

$$p = \rho R T_0. \quad (7.10)$$

断熱変化する理想気体

流体の熱伝導性が悪い場合には、運動に際して状態変化は断熱的となる。理想気体の状態変化を圧力 p 、密度 ρ 、エントロピー S で記述すると

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{C_v}\right) \quad (7.11)$$

と書ける。ここで添字 0 の付いた物理量は、ある基準となる状態を表す。また γ は定積比熱 C_v と定圧比熱 C_p の比 $\gamma = C_p/C_v$ である。断熱過程ではエントロピーが状態変化中で保存される ($S = S_0$) ので、(7.11) は、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (7.12)$$

となる。(7.12) は Poisson の関係式と呼ばれる。

7.3 Boussinesq 流体の状態方程式

熱の作用が駆動力となって生じる流体運動として有名なものが、熱対流である。ここでは、熱対流を議論する際によく用いられる Boussinesq 近似のもとでの状態方程式について述べる。

状態方程式は 3 つの熱力学的変数間の関数関係を与えるので、一般に

$$\rho = f(p, T) \quad (7.13)$$

と書ける。ここで、 f は適当な既知関数である。この式をある基準の温度 T_0 、圧力 p_0 の周りで Taylor 展開して、展開の 1 次の項までをとる：

$$\begin{aligned} \rho = f(p, T) &\simeq \underbrace{f(p_0, T_0)}_{=\rho_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \right\}. \end{aligned}$$

圧縮率がゼロ、

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = 0 \quad (7.14)$$

であるとすると、

Boussinesq 流体の状態方程式

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)], \quad (7.15)$$

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (7.16)$$

を得る.*⁹ (7.15) の状態方程式に従う流体は **Boussinesq 流体** と呼ばれる。基準状態からの温度変化が小さく、音波が重要でない現象に対しては流体を Boussinesq 流体として扱う。ここで、 α は体膨張係数、もしくは体膨張率と呼ばれる。*¹⁰

演習問題

1. 金星大気、火星大気の大気組成を調べ、これらの大気を理想気体とみなしたときの気体定数 R を求めなさい。
2. 熱力学の第一法則 $dU = T dS - p d(\rho^{-1})$ 、理想気体の状態方程式 $p = \rho R T$ 、さらに $dU = C_v dT$ を用いて、(7.11) を導きなさい。
3. (7.12) は Poisson の関係式と呼ばれる。Poisson の関係式を理想気体の状態方程式を使って、 T, p で表現すると、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (7.18)$$

となることを示しなさい。ここで、 T_0 は p_0 における温度である。また、 γ は比熱比 $\gamma \equiv C_p/C_v$ である。

*⁹ (7.14) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T &= \frac{\partial(\rho, T)}{\partial(p, T)} \\ &= \frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, S)} \frac{\partial(T, \rho)}{\partial(S, \rho)} \frac{\partial(S, p)}{\partial(T, p)} \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p / \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\rho \right\} \\ &= \frac{1}{c_s^2} \frac{C_p}{C_v} \end{aligned} \quad (7.17)$$

と書くことができる。即ち、比熱比と音速 $c_s \equiv \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$ を用いて表現できる。従って、等温圧縮率をゼロとおく Boussinesq 流体中では音速は無限大の速さで伝播することになる。

*¹⁰ (7.16) に負符号を付けて、膨張率を定義する理由は、一般に気体は等圧下で温度を加えれば膨張し密度は減るからである。すなわち、 $(\partial \rho / \partial T)_p < 0$ 。従って、膨張率を正の量として定義するために、負符号をつけている。 ρ_0 で除する理由は「率」にするためである。

第 8 章

相似性

流れの中にある形状の物体, 例えば球形や車, 飛行機の形をした物体, が存在したとしよう. この物体の形状を, 幾何学的相似性を保ったままに縮小したとき, もとの大きさの物体の周りの流れと同じ性質の流れを, その縮小された物体の周りに作ることが出来るであろうか? もしくは, 大きな物体 (飛行機や船, 車, あるいは建物など) の周りの流れを小さな実験室内で実現し, それを研究することによって実際の大きさの物体の周りの流れに関する知見が得られるだろうか.

8.1 問題設定

議論の簡単化のために, 考察する流体は外力の働いていない非圧縮性 Newton 流体とする. さらに, 運動は断熱的に起こると仮定し, 流体の熱力学的量の状態変化は順圧流体の状態方程式に従うものとする. このとき, この流体の運動を支配する方程式系は,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (8.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8.2)$$

で与えられる. ここで, \mathbf{v} は流速, ν は粘性係数である. また, P は圧力関数で, 以下のよう
に定義されるものである:

$$P(p) \equiv \int \frac{dp}{\rho}. \quad (8.3)$$

(8.1) において, ポテンシャル U から導かれる外力が働いている場合には, (8.1) の右辺第一項は

$$-\nabla(P + U)$$

になる。そこで、改めて圧力関数を

$$P_* \equiv P + U \quad (8.4)$$

と定義すれば、ポテンシャルから導かれる外力が働いている場合の運動方程式は、外力がゼロの場合の運動方程式と同じ形を持つ。したがって、以下で行う議論はポテンシャルから導かれる外力の働いている場合の流体運動にも適用できることを注意しておく。

8.2 Reynolds の相似法則

x 軸の負の方向から正の方向に向かって流速 U で流体が運動しているとする。この流れの中に半径 L の球が置かれたとしよう。もしくは、半径 L の円形の断面を持つパイプを考える。パイプの中心軸を x 軸にとる。パイプの中を x 軸の負の方向から正の方向にかけて流速 U で流体が運動している場合を考えよう。

球やパイプを特徴付ける長さスケールは L であり、流体運動の代表的な速度は U である。これらの量を用いて、方程式に含まれている独立変数、従属変数を次のように無次元化する：

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad (8.5)$$

$$t' = \frac{t}{L/U}, \quad P' = \frac{P}{\rho U^2}. \quad (8.6)$$

ここで、prime をつけた量が無次元量である。長さ、流速の代表的な大きさをそれぞれ L , U としたので、無次元変数の大きさはせいぜい $\mathcal{O}(1)$ の程度である。方程式 (8.1), (8.2) を上で導入した無次元の量を使って表現すると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \mathbf{v}' = -\nabla' P' + \frac{1}{Re} \Delta' \mathbf{v}', \quad (8.7)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (8.8)$$

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}, \quad (8.9)$$

となる。ここで、

$$\nabla' = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z'}, \quad (8.10)$$

$$\Delta' = (\nabla')^2, \quad (8.11)$$

であり、(8.7) の右辺最終項に現れた Re は次元を持たない量（無次元数）で **Reynolds 数** と呼ばれる。

方程式 (8.7) は次元を持たない量で書かれているので、連続体近似が成り立つ範囲であれば、あらゆるスケールの現象を記述することが出来るという利点がある。この方程式に

はパラメター Re が存在するので、その解は Re の値に依存する。つまり、流れの性質は Reynolds 数 Re で特徴づけられる。そこで、幾何学的な大きさは異なるが、“境界の形が幾何学的に相似であり、 Re の値が同じ二つの流れがあったとき、それらは幾何学的にも力学的にも相似になる。”これを **Reynolds** の相似法則という。

8.3 Reynolds 数の物理的意味

方程式 (8.1) において、方程式のいくつかの項の大きさを見積もってみる。前節の問題設定のもとでは、慣性項 ((8.1) の左辺第一項, および第二項) の大きさは U^2/L 程度と見積もることが出来る。一方、粘性項 ((8.1) の右辺第二項) の大きさは、 $\nu U/L^2$ と見積もれる。これら二つの項の比を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{(\text{慣性項})}{(\text{粘性項})} &= \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} \\ &= \frac{UL}{\nu} = Re. \end{aligned} \quad (8.12)$$

つまり Reynolds 数は慣性力項と粘性項の相対的な大きさを表している。そこで、Reynolds 数が小さいときには慣性力の影響が小さい流れを表し、逆に、Reynolds 数が大きいときには粘性力の影響が小さい流れを表していることになる。

8.4 その他の無次元数

流体の方程式を無次元変数で書いたときには、状況に応じて 8.2 節で現れた無次元数、Reynolds 数、以外にも方程式には様々な無次元数があわられる。

演習問題

1. 粘性係数が ν_1 で流速が U_1 の流体中に、大きさ L_1 の物体を置いたときに実現される物体周りの流れを考える。同じ粘性係数を持った流体中に、大きさが $L_2 = L_1/10$ の物体を置いたとき、 L_1 の大きさの物体の周りの流れと力学的に相似な流れを L_2 の大きさの物体の周りに実現させるためには、流速 U_2 をどのように設定すればよいか。

第 9 章

Bernoulli の定理

ある状況の下で流体力学の基礎方程式の 1 つである運動方程式を 1 回積分することにより得られる定理について述べる.

9.1 準備

慣性系上の非粘性順圧流体を考える. 圧力の関数

$$P = \int \rho^{-1} dp = \int \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{r} \quad (9.1)$$

を導入すると, 圧力傾度力項は

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla P \quad (9.2)$$

と書ける.

渦度 (vorticity) は速度場 \mathbf{v} の回転

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (9.3)$$

によって定義される. $\boldsymbol{\omega} = 0$ なる運動を渦無し運動 (irrotational motion) と呼び, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ なる運動を渦運動 (rotational motion) と呼ぶ. 第 A 章で述べたように, 渦度は流体の局所的な回転角速度の 2 倍である.

一般に運動方程式の非線形項は

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (9.4)$$

と書き換えられる. そこで非粘性順圧流体の運動方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(P + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \quad (9.5)$$

となる. (9.5) から導かれる幾つかの定理を述べる.

9.2 Bernoulli の定理

保存力場^{*1}中の定常流 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ を考える. このとき,

$$-\nabla \left(P + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (9.6)$$

となる. 流線 (曲線上の各点における接線が, 速度ベクトルの方向と一致している曲線) に沿って, $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ なので,

$$\nabla \left(P + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) = 0 \quad (9.7)$$

となる. つまり,

—— Bernoulli の定理 ——

保存力場中の非粘性順圧流体の定常流では, 流線に沿って

$$P + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \quad (9.8)$$

は一定値を取る.

その値は, 流線ごとに異なる.

9.3 一般化された Bernoulli の定理

流体の運動が渦無し ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$) であるとする. このとき速度場 \mathbf{v} はスカラー関数 Φ の勾配として書くことができる:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi. \quad (9.9)$$

すなわち速度ポテンシャル Φ が存在する. このとき (9.5) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi &= -\nabla \left(P + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right) + \mathbf{F}, \\ \mathbf{F} &= \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

となる. (9.10) は「外力 \mathbf{F} はポテンシャルから導かれる」, もしくは「順圧流体の運動が渦無しであるためには, 外力は保存力でなければならない」ことを意味している. そこで

^{*1} 外力 \mathbf{F} がポテンシャル U から導かれるような場合, すなわち, $\mathbf{F} = -\nabla U$ である

外力 \mathbf{F} がポテンシャル U から導かれるとすると,*²

$$\nabla \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + P + U \right) = 0. \quad (9.11)$$

(9.11) 式は, 積分できて

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + P + U = f(t). \quad (9.12)$$

ここで $f(t)$ は積分定数に相当し, 時間に関する任意関数である. さらに, $\Phi'(t) \equiv \Phi(t) - \int^t f(t') dt'$ とすると (9.12) は

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + P + U = 0. \quad (9.13)$$

と書ける. (9.12) と (9.13) を見比べると, $f(t)$ はゼロとおけることがわかる. (9.12) もしくは (9.13) は圧力方程式または一般化された **Bernoulli** の定理 (generalized Bernoulli's theorem) と呼ばれる.

演習問題

1. (9.4) を証明しなさい.*³

*² 重力場中ではこの状況である. $U = gz$.

第 10 章

流体力学の基礎方程式の応用 (1) : 静力学平衡

6 章までに提示された流体力学の基礎方程式を用いて幾つかの現象を考察してみる。先ずは、重力場中で静止した流体の性質について考察する。

キーワード： 静水力平衡, 浮力, Archimedes の原理

10.1 大気の鉛直構造

本節では、流体力学に基づいて地球大気の鉛直構造について考察してみる。

10.1.1 問題設定

以下のような問題設定を行う：

1. 物理量は水平方向には一様、定常であり (x, y, t には依存しない) , 鉛直 1 次元問題で考える。
2. 地球大気を非粘性流体とみなす。
3. 地球大気に働く外力は重力のみであると仮定する。
4. 鉛直方向には静止した (もしくは、鉛直速度が極めて小さく無視でき、さらに鉛直方向の加速度が、運動方程式の鉛直成分の各項に比べて小さく無視できる) 状態を考える。
5. 地球大気は理想気体の状態方程式に従うと仮定する。

仮定 3 より地球大気に働く外力 \mathbf{F} は $\mathbf{F} = -g\mathbf{k}$ である。ここで、 g は定数でなく高度

依存性があってもよい. そのような g の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2} = g_0 \frac{a^2}{(a+z)^2}. \quad (10.1)$$

ここで, G は万有引力定数, M は地球の質量, a は地球の平均半径, z は平均海水面からの高度, g_0 は地表 $z = 0$ における重力加速度である.

10.1.2 大気圧の解釈

仮定 2, 3, 4 より, 運動方程式 (5.12) の z 成分は,

静水圧平衡の式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (10.2)$$

と書ける. この式は, 静水圧平衡の式もしくは静力学平衡の式と呼ばれる. この式は気象学や地球流体力学における最も基本的なバランスの式の一つである.*1

ρ, g 共に正の量である事から, (10.2) が成り立つためには, $\partial p / \partial z < 0$ でなければいけない. すなわち, 重力場中では圧力 (気圧) は高度と共に減少していく.

さらに仮定 1 より, (10.2) は

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (10.3)$$

となる.

(10.3) を高度 z から無限大まで積分する. ここで, $z \rightarrow \infty$ では大気は存在しない, すなわち $z \rightarrow \infty$ で $p = 0$ とすると,

$$p(z) = \int_z^\infty \rho g dz \quad (10.4)$$

が得られる. (10.4) は高度 z における大気圧は底面積 1 m^2 , 高さが $z \sim \infty$ の気柱の中にある空気の重さに等しいことを言い表している.

10.1.3 気圧の鉛直プロファイル

簡単化のために, さらに

*1 このバランスは鉛直方向に関するものである. 水平方向のバランスとして気象学や地球流体力学において基本的なものは, Coriolis 力と水平方向の気圧傾度力がバランスした地衡流平衡 (geostrophic balance) である.

1. 重力加速度は高さに依存しない定数 $g_0 (= \frac{GM}{a^2})$ *2
2. 大気は等温 (温度 T_0) である

と仮定する. このとき, 静水圧平衡の式 (10.3) と理想気体の状態方程式 (7.1) から

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{RT_0} dz$$

が得られ, この式を高度 $0 \sim z$ まで積分して整理すると, 気圧の鉛直プロファイルを与える式

$$p(z) = p(0) e^{-z/H} \quad (10.5)$$

が得られる. ここで,

$$H \equiv \frac{RT_0}{g_0} \quad (10.6)$$

である. (10.5) は, 気圧は高度と共に指数関数的に減少していくことを示している.

図 10.1 と図 10.2 にそれぞれ 2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学 自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧と気温の鉛直プロファイルを示す. 上の考察を支持するように気圧は鉛直方向に指数関数的に減少していくことがわかる. 実際の気温は鉛直方向には等温ではないが, 気圧の鉛直変化は指数関数的であり, 気圧の変化に比べると気温のそれは穏やかなので, 近似的に等温とみなすことができ, 考察の仮定が満足されているのである. また, (10.5) が成り立つ仮定である静水圧平衡は, 実際の大気では必ずしも満足されているわけではないが, 大気の状態は静水圧平衡から導かれる結果ともよく一致していることもわかる.

H はスケールハイト (scale height) と呼ばれ, 気圧が e^{-1} になる高度であり, 大雑把に言うと大気の厚さを表す. 地球を温度 255K *3 の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である.

スケールハイトは鉛直方向の大気の質量分布の重心の位置と解釈することもできる. 等温大気の場合には, 気圧の鉛直分布 (10.5) と同様に, 密度も

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-z/H} \quad (10.7)$$

という鉛直プロファイルを持つ. 鉛直方向の質量分布の重心 z_G は

$$z_G \equiv \frac{\int_0^\infty z \rho(z) dz}{\int_0^\infty \rho(z) dz} \quad (10.8)$$

*2 我々が日常の経験する大気現象は高度約 15km よりも下層の対流圏で起こっている. 地上の重力加速度に比べて, 高度 15km 上空における重力加速度は小さくなるが, その量は非常に僅かで 0.2% ほどである. そこで, ここでは重力加速度を定数として扱うことにする.

*3 放射平衡温度と呼ばれる. 太陽からの入射エネルギーと地球から射出するエネルギーが等しいときの地球の表面温度である.

で計算される. 実際に (10.8) に (10.7) を代入すると

$$z_G = H \quad (10.9)$$

が得られる.

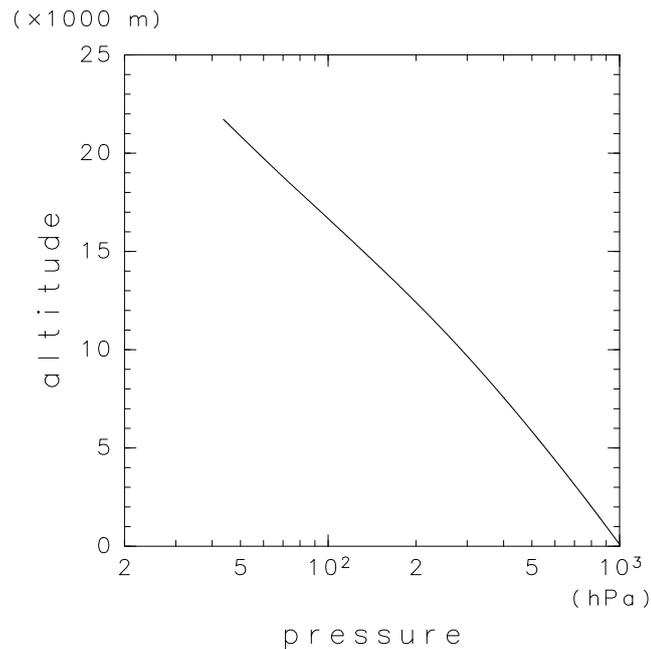


図 10.1 2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧の鉛直プロファイル.

10.2 浮力と Archimedes の原理

水に物体を沈めると, 物体が浮いたり物体の重さが水に沈める前よりも軽くなることが日常経験から知られており, これは浮力の効果によると言われている. 理化学辞典*4によると浮力 (buoyancy) とは,

Archimedes(アルキメデス) の原理

地球上 (一様な重力場中) では, 流体内にある物体にはその表面に作用する流体の圧力のため, 全体として上向きの力を受ける. これを浮力という. 浮力の大きさと作用点とは, 物体の押し退けた流体の重さと重心とに一致する.

とある. 実は, 浮力は鉛直方向の圧力傾度力であり, Archimedes の原理は静水圧平衡の

*4 第 4 版, 1987 年, 岩波書店

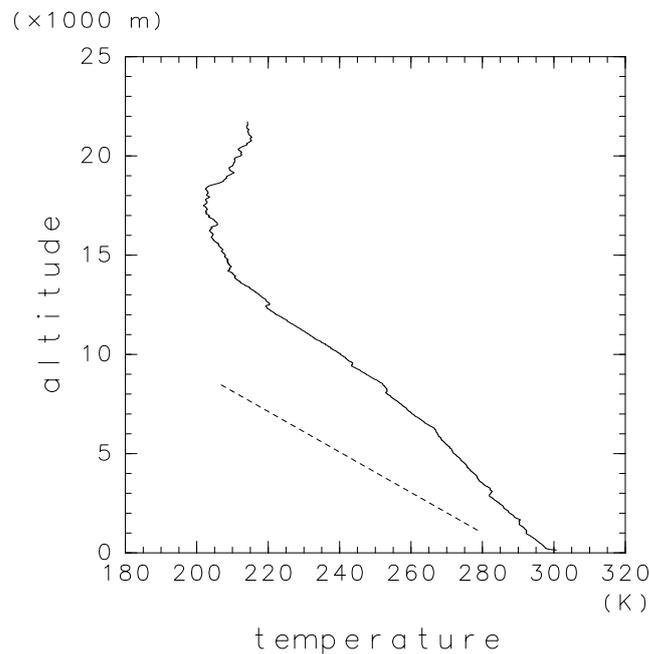


図 10.2 図 10.1 と同様. ただし, 気温のプロファイル. 点線は乾燥断熱減率に従う気温の変化を示している.

言い換えであることが以下のように示せる.

一様な重力場中 (重力加速度 g が一定値 g_0) で一様な密度 ρ_0 を持つ流体の静止状態を考える. 図 10.3 で表される状況で, 注目する物体 (底面積 dS , 厚さ dz) に働く力を考える. 物体の上面には鉛直下向きに圧力 $p(z + dz)$, 物体の下面には鉛直上向きに圧力 $p(z)$ が働いている. したがって, 物体に働く圧力に伴う正味の力は鉛直上向きを正として

$$\{p(z) - p(z + dz)\} dS \quad (10.10)$$

の力が働いている. 静止した流体中では圧力は高度と共に減少するので, $p(z) > p(z + dz)$, したがって (10.10) は正の量である. (10.10) が上の文章で言うところの浮力である. さらに静水圧平衡の式 (10.3) を積分することにより

$$\begin{aligned} dS \int_z^{z+dz} \frac{dp}{dz} dz &= -dS \int_z^{z+dz} \rho_0 g_0 dz, \\ \{p(z) - p(z + dz)\} dS &= \rho_0 g_0 dz dS \end{aligned} \quad (10.11)$$

である. 浮力の大きさ (左辺) は物体が押しのけた流体の重さ (右辺) に等しいことがわかる. さらに, 右辺は体積力なのでその作用点は力が働いている物体の重心である. つまり Archimedes の原理とは静力学平衡の式の言い換えであることがわかる.

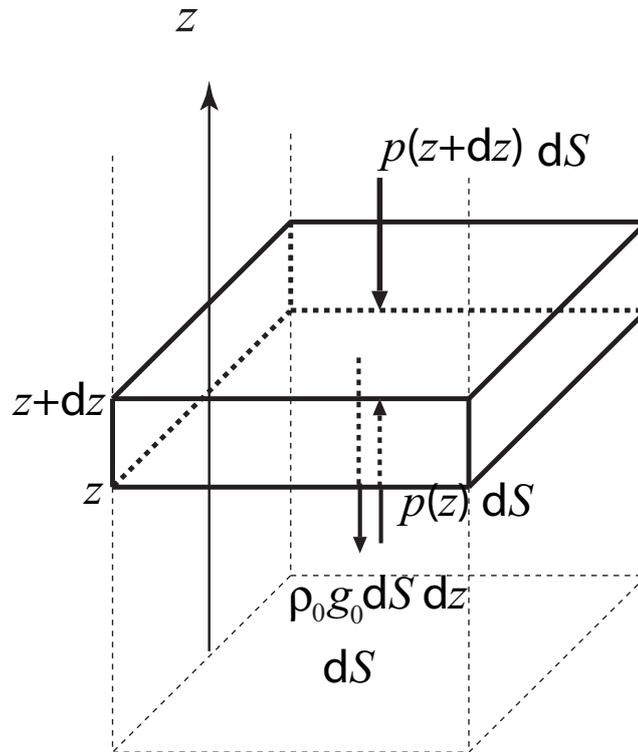


図 10.3 一様な重力場中において静止した流体中にある底面積 dS , 高度 z と $z + dz$ の間にある密度 ρ_0 の物体に働く力.

1. 地上気圧が 1000 hPa のとき, 1 m^2 の上空にある空気の質量を求めなさい. ただし, 重力加速度は高度に依存せず一定値 $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ とする.
2. g, T が高さに依存性しないと仮定し, (10.3) から, (10.5) を導きなさい.
3. 重力加速度 g を定数と仮定する. 気温が高さとともに

$$T(z) = T_0 - \Gamma z \quad (10.12)$$

と一定の減率で減少するとき, 静水圧平衡の式, 理想気体の状態方程式を用いて気圧と高度との間の関係

$$p(z) = p(0) \left(1 - \frac{\Gamma}{T_0} z \right)^{g/(R\Gamma)} \quad (10.13)$$

を求めなさい. さらに, このような温度分布を持つ大気は有限の高さで終わる (有限の高さで気圧が 0 になる) ことを証明しなさい.

第 11 章

流体力学の基礎方程式の応用 (2): 音波

本章では流体力学の基礎方程式の解として、音波が含まれていることを示す。まずその準備として、非線形の方程式である流体力学の基礎方程式を線形化（線形近似）する。次に線形化された方程式を変形することにより、それはよく知られた波動方程式の形にかけられることを示す。この波動方程式の解は、音速で伝播する縦波であることも示される。即ち、この波動の正体は音波である。さらに縦波・横波と圧縮条件との関係や流体力学の基礎方程式に含まれる平面波解の種類についても言及する。

キーワード：線形化, 線形近似, 波動方程式, 音波, 流体中の波動

11.1 問題設定

本章では、以下のような設定で問題を考察する：

1. 流体は非粘性流体とする。
2. 静止状態では流体の持つ、温度、圧力、密度は定常で空間的に一様であり、それぞれ T_0 , p_0 , ρ_0 と表す。この状態を基本状態もしくは基本場と呼ぶ。基本状態の物理量に添え字 0 を付けて表す。
3. 流体に外力は働いていない。
4. 流体は理想気体の状態方程式に従う。
5. 基本状態からの断熱的な揺らぎを考察する。

11.2 線形近似

流体力学の基礎方程式系は非線形偏微分方程式系なので、数学的な取り扱いは困難である。^{*1} 数学的な取り扱いを簡単にするため、流体力学の基礎方程式を線形化する。基本状態からの揺らぎが小さい場合には、このような線形化という手続きは妥当なものである。速度場 \mathbf{v} 、圧力 p 、温度 T 、密度 ρ を基本状態とそれからの揺らぎとして表現する：

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v}_0}_{=0 (\because \text{基本場は静止状態})} + \mathbf{v}', \quad (11.1)$$

$$p = p_0 + p', \quad (11.2)$$

$$T = T_0 + T', \quad (11.3)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'. \quad (11.4)$$

基本場は既知の状態で、揺らぎが未知の量で x, y, z, t の関数である。

運動方程式は今の状況設定では

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla (p_0 + p') \quad (11.5)$$

である。^{*2} 基本状態に比べて、揺らぎの量の大きさはきわめて小さいと仮定する：

$$\left| \frac{p'}{p_0} \right| \ll 1, \quad (11.6)$$

$$\left| \frac{T'}{T_0} \right| \ll 1, \quad (11.7)$$

$$\left| \frac{\rho'}{\rho_0} \right| \ll 1. \quad (11.8)$$

したがって、揺らぎの 2 次の量は無視することにする。^{*3} このとき (11.5) は

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad (11.9)$$

^{*1} 任意の初期条件、問題に適切な境界条件を与えて流体力学の基礎方程式系を解析的に解いて解を求めることは基本的に不可能である。

^{*2} (11.5) において、プライム記号についた量の 2 次以上の項が非線形項である。線形、非線形の判定の仕方は、惑星学基礎 III でやったので思い出してください。

^{*3} 運動方程式の非線形項が無視出来るためには、 $\frac{|\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}'|}{|\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}|} \ll 1$ である必要がある。もしくは基本状態として定常的で一様な流速 $\mathbf{v}_0 \neq 0$ を仮定し、 $|\mathbf{v}'|/|\mathbf{v}_0| \ll 1$ を仮定する。

と書ける. ここで, p_0 は定数であること, さらに

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla p' &= \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{-1} \nabla p' \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \nabla p' \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \nabla p'\end{aligned}$$

という近似を用いた. 同様に, 連続の式は

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho_0 + \rho') \mathbf{v}'\} = 0$$

から

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (11.10)$$

と近似される. 次に熱力学の方程式は, 断熱状態のときに

$$C_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

と書けるが, 理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \quad (11.11)$$

を用いて,

$$\frac{C_v}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{C_p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (11.12)$$

の形に書き直しておくとも便利である. この場合, 線形化した式は

$$\frac{C_v}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{C_p}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \quad (11.13)$$

となる. *4

*4 圧力の揺らぎ p' と密度の揺らぎ ρ' の間の関係式の別の導出としては, 以下の様なものも考えられる.

圧力を密度とエントロピーの関数 $p = p(\rho, S)$ と考え, 断熱状態の下, 基本状態のまわりでこの式を展開し, 揺らぎの 1 次項のみを残す. このとき,

$$p' = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S \rho' \quad (11.14)$$

が, さらにこの式の両辺を時間で偏微分して,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (11.15)$$

を得る.

(11.9), (11.10), (11.13) (もしくは, (11.15)) は未知変数 \mathbf{v}' , p' , ρ' に関する線形方程式であることに注意して欲しい. 即ち, プライムの付いた揺らぎの成分を表す物理量が小さいという要請から, 非線形である流体力学の基礎方程式系が線形方程式系に帰着された. このような一連の手続きを線形化といい, 物理学において現象を解析するときにしばしば使われる方法である.

11.3 波動方程式

先の節で導出した方程式系が, 波動方程式の形に書き表せることを示す. まず, 運動方程式 (11.9) の発散をとる:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p'. \quad (11.16)$$

連続の式 (11.10) を用いて (11.16) の速度の発散を消去すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho' = \nabla^2 p' \quad (11.17)$$

を得る. さらに (11.13) を用いて密度の時間微分を消去すると最終的に

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p' = \frac{C_p}{C_v} \frac{p_0}{\rho_0} \nabla^2 p' \quad (11.18)$$

が得られる. ^{*5}

(11.18) はまさに位相速度 c をもつ波動 ψ' が従う方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi' = c^2 \nabla^2 \psi' \quad (11.21)$$

の形をしており, 波の位相速度が

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma R T_0} \equiv c_s \quad (11.22)$$

となっている. ここで γ は比熱比で $\gamma \equiv C_p/C_v$ である.

^{*5} (11.13) のかわりに, (11.14) を (11.17) に代入すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho' = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_S \nabla^2 \rho' \quad (11.19)$$

となる. この式も波動方程式であり, 波の位相速度は

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_S} \quad (11.20)$$

で与えられる.

具体的な値を代入して、この波の位相速度の大きさを見積もってみる。温度は室温程度として $T_0 = 300$ [K], R は空気の気体定数 $R = 287$ [J K⁻¹ kg⁻¹] (第7章参照), 比熱比は2原子分子の比熱比 $\gamma \equiv C_p/C_v = (\frac{7}{2}R)/(\frac{5}{2}R) = 7/5$ を用いる。このとき, $c_s = 347$ [m/s] となる。

11.4 分散関係式

平面波解 (等位相線が平面となる波)

$$GGp' = \Re \{ \hat{p} \exp \{ i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \} \}, \quad (11.23)$$

$$\rho' = \Re \{ \hat{\rho} \exp \{ i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \} \}, \quad (11.24)$$

$$\mathbf{v}' = \Re \{ \hat{\mathbf{v}} \exp \{ i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \} \}, \quad (11.25)$$

を仮定すると*6, (11.16), (11.17) から 圧力の振幅 \hat{p} と 速度の振幅 $\hat{\mathbf{v}}$ との関係, \hat{p} と密度の振幅 $\hat{\rho}$ との間の関係が決まる。ここで, \mathbf{k} は波数ベクトルで, 波の位相の伝播方向を表すベクトルである。その x, y, z 成分をそれぞれ, k, l, m とする。波の x, y, z 方向の波長はそれぞれ $2\pi/k, 2\pi/l, 2\pi/m$ で与えられる。また, \mathbf{r} は位置ベクトルである。実際に代入することにより,

$$\omega \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho_0} (k^2 + l^2 + m^2) \hat{p}, \quad (11.26)$$

$$c_s^2 \hat{\rho} = \hat{p}, \quad (11.27)$$

$$\omega^2 = c_s^2 (k^2 + l^2 + m^2) \quad (11.28)$$

が得られる。

(11.26), (11.27) は圧力の振幅が分かると, 速度や密度の振幅が分かり, 偏波関係式 (polarization relation) と呼ばれている。(11.28) のように, 波動の振動数と波数との間の関係式は分散関係式 (dispersion relation) と呼ばれ, 波動を特徴付ける重要な関係式である。一般に波動の振動数を波数で割った量 (位相速度) は波数に依存する。そこで, 初期に任意の波形を与えた場合, 任意の波形は様々な波数を持った波動の重ね合わせとして表現でき,*7 各波数の波動はそれぞれ異なる位相速度で進行するので, 初期の波形は時間とともに形が変わっていく。すなわち分散していく。しかしながら, 振動数が波数に比例する波の場合には, 位相速度は波数に依存せず, すべての波が同じ位相速度で伝搬する。従って, 初期に与えた波形は時間がたっても変化しない。このような波動は非分散性波動と呼ばれる。音波は非分散性波動の代表的な例である。

*6 $\hat{\cdot}$ のついた量は複素振幅である。 $\Re [\bullet]$ は括弧の中の実部を取ることを意味する。

*7 Fourier 級数/変換を思い出して欲しい。

11.5 縦波・横波と圧縮条件の関係

流体粒子の変位の方向と波の伝播する方向が同じであるとき、そのような波は縦波と呼ばれる。一方、それらの方向が垂直のときそのような波は横波と呼ばれる。流体粒子の変位の方向は速度ベクトルの揺らぎ \mathbf{v}' (または $\hat{\mathbf{v}}$) の方向と一致しており、*⁸ また波の伝播方向は波数ベクトル \mathbf{k} に平行である。したがって、縦波では $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}} \neq 0$ 、であり、横波では $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0$ となる。上で求めた波動解は、(11.26) より縦波であることがわかる。*⁹

一方、もし非圧縮性流体を考察の対象とした場合、非圧縮条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

なので、これに再び平面波解 (11.25) を代入すると、

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0 \quad (11.29)$$

を得る。(11.29) は非圧縮条件を満足する平面波解は、横波であることを表している。

11.6 波動解の種類

11.3 節では波動方程式を導く際に、変数を次々に消去して、 p' だけの方程式に帰着させた。ここでは、別の方法を用いて波動解を議論する。

まず、(11.13) を (11.10) を用いて、

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (11.30)$$

の形に書き直しておく。(11.9), (11.10), (11.30) に平面波解 (11.23) ~ (11.25) を代入すると、以下の代数方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 0 & 0 & i\frac{\rho_0}{\rho_0}k & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & i\frac{\rho_0}{\rho_0}l & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & i\frac{\rho_0}{\rho_0}m & 0 \\ i\gamma k & i\gamma l & i\gamma m & -i\omega & 0 \\ ik & il & im & 0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \frac{\hat{p}}{\rho_0} \\ \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \end{pmatrix} = 0. \quad (11.31)$$

$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \frac{\hat{p}}{\rho_0}, \frac{\hat{\rho}}{\rho_0})^T$ が自明でない解を持つためには、(11.31) の係数行列の逆行列が存在してはいけない。即ち、(11.31) の係数行列の行列式がゼロである必要がある。この条件

*⁸ 流体粒子の変位を \mathbf{x}' と表すと、線形近似のもとでは $\mathbf{v}' = \partial_t \mathbf{x}'$ である。そこで、 \mathbf{v}' と \mathbf{x}' は平行である。

*⁹ (11.26) で $\hat{p} \neq 0$ である。 $\hat{p} = 0$ のとき、 $p' = \rho' = 0$, $\mathbf{v}' = 0$ なのでそのような解は自明な解である。

は、以下の様な ω に関する 5 次方程式になる:

$$\omega^3 \left\{ \omega^2 - \frac{p_0}{\rho_0} \gamma (k^2 + l^2 + m^2) \right\} = 0. \quad (11.32)$$

上の式の解は

$$\begin{aligned} \omega &= 0, \\ \omega^2 &= \gamma \frac{p_0}{\rho_0} (k^2 + l^2 + m^2) \end{aligned}$$

である。5 次方程式の解は全部で 5 個あるが、今考察している状況設定ではそのうちの 3 つが $\omega = 0$ に縮退している。残りの 2 つが互いに逆向きに伝播する音波である。

上の解析からわかるように、流体力学方程式には 5 種類の平面波解が存在することになる。そのうちの 2 つが音波であり、安定な密度成層の効果を考慮すると、 $\omega = 0$ の縮退が一部解けて、浮力を復元力とする波動が 2 つ（音波の場合と同様に、互いに逆向きに伝播する）出てくる。これは重力波と呼ばれるものである。また、地球上の流体運動のように座標系の回転の効果を考慮すると最後のひとつの波動解もゼロでない振動数をもつ。なお、音波や重力波では互いに逆向きに進む 2 つの波で構成されているのに対して、この最後の波動解は一方向にしか伝播しないという特徴を持つ。

演習問題

- (11.12) から (11.13) を導出しなさい。
- (11.9), (11.10), (11.13) は線形の方程式系であることを確かめなさい。（方程式系を満足する 2 つの解 (v'_1, p'_1, ρ'_1) と (v'_2, p'_2, ρ'_2) があつたとき、これらの重ね合わせも方程式系の解であることを確かめる。）
- (11.20) や (11.22) に従って、気温 300 K の空気中を伝播する音波の速度を計算してみよう。空気は 2 原子分子理想気体とする。
 - $\sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$ が速度の次元を持つことを確かめなさい。
 - $C_v = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$, $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ のとき、 c_s の値を求めなさい。
 - 理化学辞典によると、音速は

$$c_s = 331.5 + 0.61t,$$

で表されると書かれている。ここで、 t は摂氏温度である。実際に、前設問で求めた c_s の温度依存性の式を用いてこの公式を導きなさい。（ヒント：絶対温度 T と摂氏温度 t との関係は、 $T = T_0 + t$ である。ここで、 $T_0 = 273.15 \text{ K}$ である。また日常生活で体験する温度は $t/T_0 \ll 1$ である。そこで、 $\sqrt{T_0 + t} \simeq \sqrt{T_0} \left(1 + \frac{t}{2T_0} \right)$ と近似できる。完全に係数の数値は一致し

ないので注意. しかし極めて近い値になる.)

4. (11.26)~(11.27) を導出しなさい.
5. (11.31) において非圧縮条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を課すと, 音波が除去される (音速で伝播する解は存在しない) ことを示しなさい.

第 12 章

流体力学の基礎方程式の応用 (3): 浅水系

浅い水 (浅水系) の表面にできる波を流体力学にしたがって考察する。流体力学の重要な応用である気象学や海洋学では、ここで議論する浅水系は大気・海洋の大規模な運動を記述・理解するための重要な枠組みで、研究の現場でも頻繁に用いられている。地球に固定された座標系で大気や海洋の運動を眺め、記述することが理論的考察と観測とを比較をするうえで便利である。しかしながら、そのような座標系は慣性系ではない。^{*1} ここでは、座標系 (地球) の自転の効果は無視した議論を行うことにする。浅水系の波動は津波のモデルの一つである。

キーワード: 浅水系, 浅水方程式系, 重力波, 津波

12.1 はじめに : 問題設定

地球の大気や海洋は水平方向の広がり比べてとても薄いことが知られている。地球は大円が 4 万 km の球であり、太平洋は 1 万 km ほどの幅を持つ。しかしながら、天気現象が起こる対流圏は地表からせいぜい高度 10km までの高度の領域であり^{*2}、太平洋の平均の深さも約 4km ほどである。このように幾何学的に薄い流体層では、鉛直運動が起きにくくなる。そこで、大気や海洋の大規模運動では、鉛直方向には静水圧平衡がよい近似で成り立つ。

^{*1} 地球のように一定の速さで回転する座標系における運動方程式には、座標系の回転に伴い、コリオリの力と遠心力が更なる力を付け加える必要がある。

^{*2} 対流圏の上に存在する成層圏・中間圏にも特異な興味深い大気現象が存在し気象学の研究対象になっているが、中間圏の上部まで含めても気象学が対象とする高度領域はせいぜい 100 km である。

そこで、この節では以下の問題設定のもとでの流体運動を考察する。

1. 一様な密度 ($\rho = \text{const}$) を持つ非粘性流体を考察する。
2. 流体は水平方向に無限遠方まで広がっており、鉛直方向には図 12.1 に示すように、固体境界の上に存在し、静止状態の平均の深さを H 、自由表面変位の変動を $\eta(x, y, t)$ 、下端境界の高さを $h(x, y)$ で表す。鉛直方向の座標系 z の原点は下端境界の平均にとる。そこで、自由表面の高度は、 $H + \eta$ であり、流体の厚さは $H + \eta - h$ である。
3. 考察の対象とする流体の上部には質量がゼロの別の流体が存在するとする。そこで、 $z = H + \eta$ における圧力はゼロである。
4. 外力は重力のみで重力加速度 g は一定とする。
5. 鉛直方向には静水圧平衡が成り立っている。

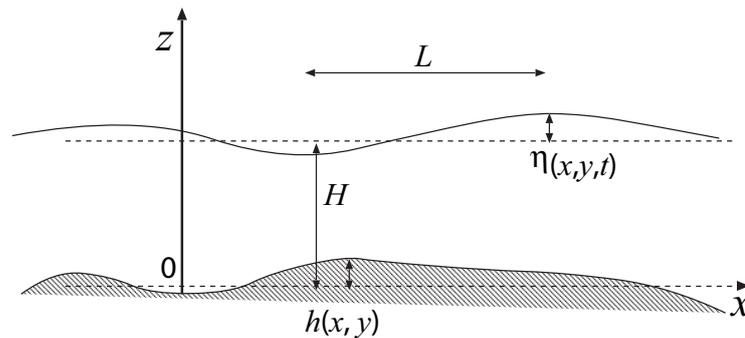


図 12.1 浅水系の概念図. 鉛直方向に z 軸, 水平方向 x, y 軸をとる. 流体が静止しているとき, 自由表面の高さを $z = H$ ととる. 下端境界の高さを h , 自由表面変位を η ととることとする.

12.2 浅水方程式系

前節で述べた問題設定のもと、現象を記述する支配方程式系を導く。

12.2.1 運動方程式

問題設定より、鉛直方向の運動方程式として静水圧平衡の式を議論の出発点とする:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (12.1)$$

(12.1) を z に関して, z から上端 $z = H + \eta$ まで積分する. このとき問題設定より, ρ は定数であることに注意すると,

$$p(x, y, H + \eta, t) - p(x, y, z, t) = -\rho g(H + \eta - z) \quad (12.2)$$

を得る. ここで, 自由表面における圧力は問題設定よりゼロ ($p(x, y, H + \eta, t) = 0$) なので, したがって, 任意の高度の圧力は

$$p(x, y, z, t) = \rho g(H + \eta - z) \quad (12.3)$$

と表現できる.

2次元水平面内 (xy 平面内) の速度を \mathbf{u} , 3次元空間の速度を \mathbf{v} と表すと一様重力場のもとでの非粘性流体の運動方程式 (Euler 方程式) の水平成分は

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_2 p, \quad (12.4)$$

である. ここで, ∇_2 は2次元水平面内の勾配演算子 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$ である. (12.3) を代入すると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = -g \nabla_2 \eta, \quad (12.5)$$

を得る. (12.5) の右辺の圧力傾度力は鉛直座標 z に依存しないことに注意する. そこで, もし水平速度場が z に依存しない初期条件から始まるならば, その後の速度場も z に依存しない. したがって, \mathbf{u} は x, y, t のみの関数で (12.5) は

——— 浅水系の運動方程式 ———

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_2 \mathbf{u} = -g \nabla_2 \eta, \quad (12.6)$$

となる. (12.6) は浅水系の運動方程式である.

12.2.2 連続の式

非圧縮性流体の連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (12.7)$$

もしくは,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12.8)$$

である. (12.8) を z に関して, 流体の下端 $z = h$ から上端 $z = H + \eta$ まで積分する. この時, \mathbf{u} は z 座標に依存しないことに注意すると,

$$\int_h^{H+\eta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dz + \int_h^{H+\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0,$$

$$(\eta + H - h) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + w(x, y, H + \eta, t) - w(x, y, h, t) = 0 \quad (12.9)$$

を得る. ここで, $w(x, y, H + \eta)$ は自由表面にある流体粒子の鉛直速度なので, それは流体粒子の z 座標を Lagrange 微分したものに等しい:

$$w(x, y, H + \eta, t) = \frac{D(H + \eta)}{Dt}$$

$$= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_2 \eta. \quad (12.10)$$

同様に,

$$w(x, y, h, t) = \frac{Dh}{Dt}$$

$$= \mathbf{u} \cdot \nabla_2 h. \quad (12.11)$$

(12.10), (12.11) を (12.9) に代入すると,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_2 (\eta - h) + (\eta + H - h) \nabla_2 \cdot \mathbf{u} = 0,$$

もしくは

——— 浅水系の連続の式 ———

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_2 \cdot \{(\eta + H - h)\mathbf{u}\} = 0, \quad (12.12)$$

を得る. (12.12) が今の問題設定での連続の式となる.

(12.6), (12.12) は未知変数 \mathbf{u} , η に対する方程式で, 未知変数が 3 個なのに対し, 方程式が 3 本あり, 閉じた方程式系になっている. これらの方程式系は, 浅水方程式系と呼ばれるものである. 以下では, 勾配演算子の添え字 2 は省略することにする.

12.3 重力波

自由表面が静止状態から乱されたとき, その乱れが波動となって位相速度 $c = \sqrt{gH}$ で伝播することを示す.

12.3.1 線形化

浅水方程式 (12.6), (12.12) は非線型方程式なので, そのままでは理論的な解析は困難である. そこで, 音波を議論したときと同様に支配方程式系を線形化することにする.

下端境界は平坦 ($h = 0$) で, 静止状態を基本状態とする. 静止状態からの乱れを考察することにする. 乱れは十分に小さく, 未知変数の 2 次以上の項は無視することにする. このとき, 浅水方程式 (12.6), (12.12) はそれぞれ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g\nabla\eta, \quad (12.13)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (12.14)$$

となる.

12.3.2 波動方程式

(12.13), (12.14) から波動方程式を導く. (12.14) を時間で偏微分する:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + H\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (12.15)$$

(12.15) の速度の時間微分を (12.13) を使って消去し, η のみの式に書き下すと,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH\nabla^2 \eta \quad (12.16)$$

を得る. これは, 位相速度 $c = \sqrt{gH}$ を持つ波動が従う波動方程式である. 即ち, 浅水方程式系には, 表面を位相速度 $c = \sqrt{gH}$ で伝播する波動が存在することになる. このような波動は重力を復元力として伝播する波動なので, **重力波 (gravity wave)** と呼ばれている. 音波と同様に浅水系の表面重力波は非分散性の波動である.

ここで議論した地球回転の効果が無視でき, しかも水平の現象の規模が水深に比べて非常に大きい浅水近似がよく成り立つ現象は津波である. 水深 $H = 1,000$ m のとき, 位相速度は 360 km/h, 水深 $H = 4,000$ m で $c = 710$ km/h である. そこで, 平均水深 4000 m の太平洋 (幅約 10,000km) を横断するのはわずか 14 時間ほどになる.*3

演習問題

1. (12.13), (12.14) を導きなさい.

*3 実際に起こったチリ地震 (1960 年) の津波は, 日本の太平洋沿岸に達するのに約 1 日であったので, 上記の理論的見積もりよりは倍の時間がかかっていることになるが, 現象の予測の桁はあっているといえる.

第 13 章

渦

コーヒーをかき混ぜてミルクをいれたときの渦巻模様や、竜巻、鳴門海峡の渦潮、気象衛星から見る雲のパターン (特に低気圧や台風に伴う渦巻状の雲のパターン) など、我々は日常生活で「渦」や「渦巻」というものを頻繁に目にする。本章では「渦」を明確に数学的に定義 (渦度やその積分形の循環なる量を定義) し、その性質について議論をする。

「渦」は「波」と並んで、流体力学 (地球流体力学) において現象を分析する重要な概念、素過程である。非粘性流体の渦のない流体運動は、ほぼ完全に解かれていて、この分野は完成している (終っている) と言っても過言ではない。いっぽう、100 年来の研究の歴史にもかかわらず、まだ解決できていない多くの難問を抱えた乱流現象は、渦運動に満ちている。すなわち、流体力学は渦が存在するがゆえに、難しくまた興味深い学問となり、多くの研究者の興味を引き付けているのである。

この章では、非粘性流体を考察する。外力場に粘性項が含まれると考えれば本章の議論を粘性流体の場合に拡張することができる。

13.1 渦度

13.1.1 定義

渦度 (vorticity) は速度場 \boldsymbol{v} の回転

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} \quad (13.1)$$

によって定義される。 $\boldsymbol{\omega} = 0$ なる運動を渦無し運動 (irrotational motion) と呼び、 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ なる運動を渦運動 (rotational motion) と呼ぶ。 Helmholtz の基本定理を解説した際に述べたように、渦度は流体の局所的な回転角速度の 2 倍である。

渦度はどのような時間発展方程式に従うかを導く前に、まず運動方程式*1を書き換えておく。運動方程式の非線形項は

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (13.2)$$

と書き換えられる。以下の議論ではこのような書き換えを行っておいた方が便利である。

そこで運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \quad (13.3)$$

である。

13.2 渦度方程式

本節では、渦度の時間発展を記述する式、渦度方程式、を導出する。

(13.3) の回転をとると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{F} \quad (13.4)$$

となる。ベクトル解析の公式より、任意のベクトル場 \mathbf{A} , \mathbf{B} について

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}), \quad (13.5)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (13.6)$$

が成り立つ。そこで

$$\nabla \times \{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}\} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (13.7)$$

となり、(13.4) は

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = -\boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{F} \quad (13.8)$$

と書き換えられる。連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (13.9)$$

と変形できるので、(13.9) を (13.8) に代入して、整理すると

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p + \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{\rho} \quad (13.10)$$

を得る。(13.4), (13.8), もしくは (13.10) は渦度方程式 (vorticity equation) と呼ばれる。(13.8) の右辺第1項は引き伸ばし項、第2項は傾斜項、第3項はソレノイド項と呼ばれる。

*1 この章の問題設定では Euler 方程式である。

13.3 Lagrange の渦定理 (渦の不生不滅の定理)

ここで渦度に関する重要な定理を述べておく。

— Lagrange の渦定理 —

「保存力場中の非粘性順圧流体では、渦は発生することもなく、消滅することもない。」

順圧流体*2では、等圧面と等密度面は平行である。そこで、(13.10) の右辺第 2 項はゼロである。*3 また保存力場*4は、 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ なので、(13.10) の右辺第 3 項もゼロである。

いま $t = 0$ で $\boldsymbol{\omega} = 0$ であったとする。このとき $t = \Delta t$ における $\rho^{-1} \boldsymbol{\omega}$ の値は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=\Delta t} &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=0} + \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\right]_{t=0} \Delta t \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=0} + \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v}\right)_{t=0} \Delta t \\ &= 0. \end{aligned} \tag{13.11}$$

したがって任意の時刻 $t = n \Delta t$ (ここで n は自然数) における $\rho^{-1} \boldsymbol{\omega}$ の値もゼロ (すなわち $\boldsymbol{\omega} = 0$) である。したがって、渦は不生である。

また、非粘性流体は可逆な方程式に従うので、時刻 $t = 0$ において $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ で、ある時刻 $t = n \Delta t$ に $\boldsymbol{\omega} = 0$ になったと仮定すると、 $t = n \Delta t$ を初期条件として、時間発展を逆にたどり、 $t = n \Delta t - n \Delta t = 0$ における渦度の値は前の議論を用いて求めることができ、 $\boldsymbol{\omega} = 0$ になる。これは $t = 0$ において $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ という仮定と矛盾する。したがって、時刻 $t = 0$ において $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ であれば、時刻 $t = n \Delta t$ においても $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ でなければならない。すなわち渦は不滅である。

■注意: この定理は渦度 $\boldsymbol{\omega}$ 、もしくは $\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}$ が Lagrange 的に、又は Euler 的に保存することを言い表しているのではないことに注意すべきである。最初、渦度がゼロであれば、以後もそれはゼロであり、渦度の値が保存されているように見える。しかし、初期に渦度が non-zero であったときには、以後の時刻でゼロになることはない、と言っているだけである。 $\boldsymbol{\omega}$ が初期にゼロでないならば増えても減ってもよい、という点で保存則にはなっていない。

*2 密度が圧力のみ関数で、状態方程式が $\rho = f(p)$ の形で書ける。7.2 節参照。

*3 $-\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p = \nabla \alpha \times \nabla p$, ここで $\alpha \equiv \frac{1}{\rho}$ は比容、は傾圧流体の時にゼロでないベクトルなので、傾圧項もしくは、傾圧ベクトルという。

*4 力 \mathbf{F} があるスカラーポテンシャル U の勾配、 $\mathbf{F} = -\nabla U$, で表現できるような場のこと。

■補足: 上で考察したように, 順圧流体でなおかつ重力などの保存力以外の外力が働いていない状況で, 3次元空間中の渦度は保存しないが, 水平2次元(重力のかかっている方向に対して垂直な平面内に束縛された)の非圧縮, 順圧流体では渦度の鉛直成分 ($\omega = \omega \mathbf{k}$) が保存する:

$$\frac{D\omega_a}{Dt} = 0 \quad (13.12)$$

さらに渦度 ω に関する任意関数 $f(\omega)$ も保存する, 即ち無限個の保存量が存在する.*5無限個の保存量の存在は, 2次元流体の運動に大きな束縛を与え, 2次元流体の運動が3次元流体のそれとは異なった特異な性質を持つ要因となっている.

13.4 循環

13.4.1 定義

流体中に任意の閉曲線 C を考える. C に沿っての速度 \mathbf{v} の線積分

$$\Gamma(C) \equiv \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.13)$$

を, C に沿っての循環 (circulation) と定義する.

13.4.2 循環と渦度の関係

Stokes の定理により, 閉曲線 C に沿った線積分は, C を縁とする任意の閉曲面 S における面積積分に書き換えることができる:

$$\begin{aligned} \Gamma(C) &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (13.14)$$

(13.14) は, 循環は渦度の積分形, もしくは, 渦度は循環の微分形であることを述べている.*6

*5 渦度 ω の2乗空間積分 (の半分) $Z \equiv \frac{1}{2} \int_D \omega^2 dx dy$ はエンストロフィー ('enstrophy') と呼ばれ, 特に重要な保存量とみられている. 'en' はギリシャ語の冠詞で英語の 'the' に相当するもの, 'strophy' はギリシャ語で回転を意味する言葉らしい.

*6 循環や次節の Kelvin の循環定理の物理的意味を説明するには, 渦線という概念が必要である. 渦線は, 流れ場における流線に相当した渦度のグラフィック表示である. 本稿では流線を解説していないので, 渦線の解説も割愛した. しかしながら, 渦度の物理的意味を解説し, 循環は渦度の積分形であるという説明で十分であろう. また, Kelvin の循環定理の微分形は次々節で解説する.

13.5 循環定理

ここでは循環に関する重要な定理、循環定理 (circulation theorem), を述べておく. 先ず流れとともに流される閉曲線 C に沿った循環の発展方程式を求める. 即ち, 循環の Lagrange 微分を計算する:

$$\begin{aligned}\frac{D\Gamma(C)}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) \\ &= \oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{r})}{Dt}.\end{aligned}\quad (13.15)$$

ここで, 最後の表式の第 1 項に運動方程式を, 第 2 項に

$$\frac{D(d\mathbf{r})}{Dt} = d \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = d\mathbf{v}.\quad (13.16)$$

用いると,

$$\begin{aligned}\frac{D\Gamma(C)}{Dt} &= - \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_C d \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \\ &= - \oint_C \frac{1}{\rho} dp + \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}\quad (13.17)$$

となる.

保存力場 ($\mathbf{F} = -\nabla U$) 中の順圧流体 ($dP \equiv dp/\rho$) では, (13.17) は

$$\begin{aligned}\frac{D\Gamma(C)}{Dt} &= - \oint_C dP - \oint_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \oint_C dP - \oint_C dU = 0\end{aligned}\quad (13.18)$$

となる. つまり,

— Kelvin の循環定理 —

「保存力場中の非粘性順圧流体では, 流体粒子と共に動く閉曲線 C に沿っての循環 $\Gamma(C)$ は保存される。」

これは, **Kelvin** の循環定理と呼ばれる.

■注意 1: この定理の適用条件は, 13.3 の Lagrange の渦定理と同じである. 共に保存力場中の非粘性順圧流体が考察の対象になっている. Lagrange の渦定理は, 保存性を述べるものではなかったが, Kelvin の循環定理は循環 $\Gamma(C)$ の保存を言い表しているという点で, Lagrange の渦定理よりも重要である.*7

*7 Lagrange の渦定理は, Kelvin の循環定理から導くことができる.

■注意 2: この節で述べた種々の定理は、慣性座標系における循環に対するものであり、回転系に相対的な速度を用いて定義された循環にたいしては、このようにエレガントな形にかきくだすことはできない。

13.6 渦位の保存則

前節では、保存力場中の非粘性順圧流体では流れに沿って循環が保存されることを述べた。いっぽう 13.4.2 節で、循環は渦度の積分形 (または、渦度は循環の微分形) であることを述べたが、渦度は、(13.8), (13.10) にあるように、Kelvin の循環定理と同様の条件のもとで渦度は流れに沿って保存しない。それでは、循環の保存則に対応する微分形の保存則 (渦度に関する Lagrange 的保存則) は何であろうか? それが本節で述べる渦位 (potential vorticity) の保存である。^{*8}

渦位保存則は地球流体力学における最も基本的な保存則の一つである。ここでは渦度方程式 (13.10) を出発点とした議論を行うことにする。さらに、流れに沿って保存されるあるスカラー量 θ を考える:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0. \quad (13.19)$$

(13.19) の勾配を計算すると

$$\begin{aligned} \nabla \frac{D\theta}{Dt} &= \frac{D\nabla\theta}{Dt} + (\nabla\mathbf{v}) \cdot (\nabla\theta) = 0, \\ \frac{D\nabla\theta}{Dt} &= -(\nabla\mathbf{v}) \cdot (\nabla\theta) \end{aligned} \quad (13.20)$$

を得る。ここで $(\nabla\mathbf{v}) \cdot (\nabla\theta) = e_i(\partial_i v_j)\partial_j\theta$ であることに注意する。(13.10) $\cdot \nabla\theta +$ (13.20) $\cdot \omega/\rho$ を求めると、

$$\frac{D}{Dt} \left\{ \frac{\omega \cdot \nabla\theta}{\rho} \right\} = \frac{\nabla\theta \cdot (\nabla\rho \times \nabla p)}{\rho^3} + \frac{\nabla\theta \cdot (\nabla \times \mathbf{F})}{\rho} \quad (13.21)$$

となる。 $(\omega \cdot \nabla\theta)/\rho$ は渦位 (potential vorticity) と呼ばれ、気象学・海洋学ではしばしば q という記号で表される。(13.21) の右辺がゼロ、即ち、渦位 q が流れに沿って保存される、即ち、

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 \quad (13.22)$$

の形に書けるのは、

^{*8} 渦位に関する記述は、何故か通常の流体力学のテキストでお目にかかったことがない。

1. 保存力場中の非粘性順圧流体のとき.

順圧流体では等圧面と等密度面は平行であるから, $\nabla\rho \times \nabla p = 0$. 保存力場 $\mathbf{F} = -\nabla U$ では $\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla U = 0$ である. これは, Kelvin の循環定理が成り立つときと同じ条件である. そこで渦位 q の保存が Kelvin の循環定理の微分形に対応することがわかるであろう.

上記の条件以外のもとでも, すなわち傾圧流体でもある条件下では渦位は保存される. それが以下の場合である.*9

2. θ が熱力学的関数のとき.

θ が熱力学的関数ならば

$$\theta = \theta(p, \rho) \quad (13.23)$$

と θ を密度 ρ と圧力 p の関数として書くことができる. そこで

$$\nabla\theta = \frac{\partial\theta}{\partial p}\nabla p + \frac{\partial\theta}{\partial\rho}\nabla\rho. \quad (13.24)$$

$\nabla p, \nabla\rho$ はそれぞれ $\nabla\rho \times \nabla p$ と直交するので $\nabla\theta \cdot (\nabla p \times \nabla\rho) = 0$.

特に (13.19) を満足する熱力学関数として重要な過程は, 断熱過程である. この時エントロピー S は Lagrange 的保存量である: $DS/Dt = 0$.

渦位保存則は受動的 (passive) に渦位が流されるような形式

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla q}_{\text{渦の移流}} = 0 \quad (13.25)$$

になっているが,*10 渦位の分布は渦度を通じて流れ場と結び付いており, 渦位が流されてその分布が変わると流れ場にも影響を及ぼし, 渦位の移流の仕方を変えていく. 即ち, q は能動的な量である.

演習問題

1. (13.12) を導きなさい.

*9 全く同じ条件のもとで Kelvin の循環定理も成り立つ. 即ち, Kelvin の循環定理の微分形が渦位保存則である.

*10 受動的に流されるようなスカラー量を passive scalar と呼ぶ.

付録 A

運動学と構成方程式

前章で出てきた Newton 流体の応力と流れとの関係 (5.8) を議論する. その準備として, 流れの運動学*1である Helmholtz の基本定理について述べる. 次に, 流れ場の基本的な要素と応力との関係である構成則 (constitutive law), もしくはその数学的表現である構成方程式 (constitutive equation) について述べる.

A.1 Helmholtz の基本定理

流れの場が基本的な 4 つの運動に分解できることを主張する Helmholtz の基本定理について紹介する. なおこの節では和の規約を用いないことにする. 流体中のある点を原点 O にとり, O の近傍 P (P の位置ベクトルを \mathbf{r} とし, そのデカルト座標表示を $\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ と表す) における流体の速度を $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ (デカルト座標表示で $\sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i$) とする. このとき $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ を O の周りで Taylor 展開して x_i , の 1 次までの項を取ると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}(0) + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right)_O x_i, \\ &= \mathbf{v}(0) + (D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + D_{13}x_3) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (D_{21}x_1 + D_{22}x_2 + D_{23}x_3) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (D_{31}x_1 + D_{32}x_2 + D_{33}x_3) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{A.1}$$

*1 力学 (mechanics) は一般に物体の位置や運動の変化を研究する物理学の分野である. さらに次の 3 つの分野に分けることができる:

1. 運動学 (kinematics): 運動方程式に言及せずに運動の性質を議論する学問.
2. 静力学 (statics): 静止している物体に現れる性質, 力のつり合いについて研究する学問.
3. 動力学 (dynamics): 物体の運動の物理的原因について研究する学問.

を得る. ここで添字 O は原点で値を見積もることを表し, $\mathbf{v}(0)$ は原点における流速である. また

$$D_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_O \quad (\text{A.2})$$

と定義した. (A.2) は 2 つの添え字を持つので, 2 階のテンソルであり, 速度勾配テンソルと呼ばれる. 一般に行列が対称行列と反対称行列に分解されるように, 2 階のテンソルも対称テンソルと反対称テンソルに分解できる:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_O + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_O \\ &= e_{ij} - \frac{1}{2}\omega_k, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_O, \quad (\text{A.4})$$

$$\omega_k \equiv \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_O. \quad (\text{A.5})$$

ここで, (i, j, k) はこの順番に $(1, 2, 3)$ の偶置換である. e_{ij} は対称テンソルで歪速度テンソル, ω_k は反対称テンソルで速度場の回転の k 成分である. さらに

$$\epsilon_i \equiv D_{ii} \quad (\text{A.6})$$

と定義する. これらを用いると, $i \neq j$ の場合に,

$$\begin{aligned} D_{ij}x_j\mathbf{e}_i + D_{ji}x_i\mathbf{e}_j &= \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji})(x_i\mathbf{e}_j + x_j\mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} (D_{ji} - D_{ij})(x_i\mathbf{e}_j - x_j\mathbf{e}_i) \\ &= e_{ij}(x_i\mathbf{e}_j + x_j\mathbf{e}_i) + \frac{1}{2}\omega_k(x_i\mathbf{e}_j - x_j\mathbf{e}_i), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

と書けるので, (A.1) 式は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}(0) + \frac{1}{2}\omega_1(x_2\mathbf{e}_3 - x_3\mathbf{e}_2) + \epsilon_1x_1\mathbf{e}_1 + e_{23}(x_2\mathbf{e}_3 + x_3\mathbf{e}_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega_2(x_3\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_3) + \epsilon_2x_2\mathbf{e}_2 + e_{31}(x_3\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_3) \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega_3(x_1\mathbf{e}_2 - x_2\mathbf{e}_1) + \underbrace{\epsilon_3x_3\mathbf{e}_3}_{\text{(III)}} + \underbrace{e_{12}(x_1\mathbf{e}_2 + x_2\mathbf{e}_1)}_{\text{(IV)}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

(I) $\underbrace{\hspace{10em}}_{=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \text{(II)}}$

各項は

(I) 並進運動

(II) 角速度 $\frac{1}{2}\omega$ の回転運動

(III) 各軸方向への一様な伸び ($\epsilon_i > 0$), 縮み ($\epsilon_i < 0$)

(IV) ずれ運動

を表している (図 A.1 参照). 流体は上記の 4 つの運動を同時に行っている. これが Helmholtz の基本定理である.

なお, 速度場の回転は渦度と呼ばれ, (A.5) に示されているように, 渦度は流体の局所的な回転角速度の 2 倍に等しいことがわかる.

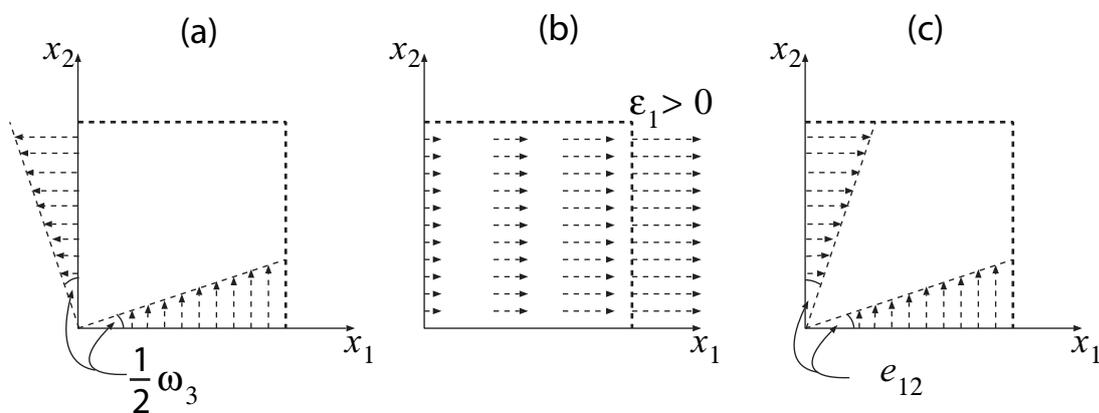


図 A.1 Helmholtz の基本定理における x_3 軸の周りの剛体回転 (a), x_1 軸方向への伸び (b), ずれ運動の模式図 (c). 矢印は速度ベクトルを表す.

A.2 構成方程式

流体の微小部分に注目し, それが外界から刺激 (応力) を受けて応答 (流動) する状況を考える. ただし, 応力が与えられた時にどのような流動が生じるかは物質 (流体の種類) に依存するだろう. 与えられた応力に対する応答を数式で表現したものは, その物質の構成方程式と呼ばれ, 特に応力に対する歪速度の関係を記述する式は, 物質の力学的特性を表すので力学的構成方程式と呼ばれる. この節では, 実在の流体の多くで成立する, 応力と歪速度との関係が線形である線形構成方程式について述べる. この節では記述の簡便さから和の規約を用いることにする.

応力が歪速度の関数, 即ち

$$\tau_{ij} = f_{ij}(e_{kl}) \quad (\text{A.9})$$

とする. 実在の多くの流体では次の 2 つの仮定がよく成り立つ.

1. 歪速度が微小で応力は歪速度の 1 次関数として書ける.

2. 流体は等方的（性質が特定の方向に依存しない）である。

1 の仮定から, (A.9) を e_{kl} に関して Taylor 展開し, 1 次の項まで残す:

$$\tau_{ij} = f_{ij}(0) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{kl}} e_{kl}. \quad (\text{A.10})$$

(A.10) の第 1 項は歪速度が存在しないときの応力で, 流体の定義によりこれは圧力に等しい. また圧力は働く面の向きに依存しないので, したがって

$$f_{ij}(0) = -p\delta_{ij} \quad (\text{A.11})$$

である. また, (A.10) の第 2 項の係数 $\frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{kl}}$ は 4 つの添え字を持つので 4 階のテンソルであるが, 2 の仮定よりこれは 4 階の等方テンソルである. 一般に 4 階の等方テンソルは 2 階の等方テンソルである Kronecker のデルタの積を用いて

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{kl}} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (\text{A.12})$$

と表現できる.*2 ここで, A, B, C は定数である. (A.11), (A.12) を (A.10) に代入し整理すると,

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + (A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}) e_{kl} \\ &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + Be_{ij} + Ce_{ji} \\ &= (-p + Ae_{kk})\delta_{ij} + (B + C)e_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

となる. ここで, 第 2 式から第 3 式への変形には, 歪速度テンソルが対称テンソルであること ($e_{ij} = e_{ji}$) を用いた. A, B, C は物質の物性定数に関係しており, 通常 $A = \lambda, B + C = 2\mu$ と書き, (A.13) は

————— Newton 流体の構成方程式 —————

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (\text{A.14})$$

と表現される. μ は粘性率, λ は第 2 粘性率と呼ばれる. (A.14) のように応力が歪速度の 1 次式で与えられる流体を **Newton 流体** (Newtonian fluid) という. そうでないものを非 Newton 流体 (non-Newtonian fluid) と呼ぶ. *3

*2 木田重雄: 『なっとくする流体力学』(講談社, 2003) の p.181, p.196–197 にこのことの丁寧な解説があるのでそれを参考にしてほしい.

*3 youtube で非 Newton 流体の面白い画像が見られるので興味のある方はぜひ見てください.

<http://www.youtube.com/watch?v=f2XQ97XHjVw>

<http://www.youtube.com/watch?feature=fvwp&v=3zoTKXXNQUI&NR=1>

■ 静水圧と動圧 運動する流体中での法線応力（圧力）は、静止しているときの圧力と異なる。前者を動圧、後者を静水圧と呼ぶ。ここではその違いに触れておく。法線応力の平均値 $\bar{p} = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$ は、(A.14) より

$$\begin{aligned}\tau_{ii} &= (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ii} + 2\mu e_{ii} \\ &= -3p + (3\lambda + 2\mu)e_{ii}, \\ \therefore \bar{p} &= p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)e_{ii}\end{aligned}\tag{A.15}$$

を得る。(A.15) は運動状態の平均の圧力は、静水圧 p よりも (A.15) の第 2 項の分だけ異なることを意味している。 e_{ii} は速度の発散で体積の変化の速度であり、その係数 $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積粘性率と呼ばれる。^{*4}

^{*4} 静圧と動圧が異なることは起こりそうもないと考えて、Stokes は $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ が成り立つものと仮定した。この関係は、Stokes の関係と呼ばれている。この関係の確実な理論的証拠はないそうである。(今井功：『流体力学 (前編)』, (裳華房, 1973), p. 275)

付録 B

波の運動学

波に関する基本的な知識について整理しておく。まずは空間 1 次元の場合を考え、次にその概念を高次元に拡張するために、空間 2 次元の場合を考える。それ以上の次元については 2 次元の場合の自然な拡張を行えばよいので、2 次元の場合を解説しておけば十分であろう。^{*1}

B.1 空間 1 次元の場合

B.1.1 基本的な用語

波を表す関数形は三角関数であることは容易に想像がつくであろう。波の場を $\psi(x, t)$ とする。このとき三角関数としては

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t), \quad (\text{B.1})$$

$$\psi(x, t) = B \sin(kx - \omega t), \quad (\text{B.2})$$

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t), \quad (\text{B.3})$$

$$\psi(x, t) = \Re \left\{ \hat{A} e^{i(kx - \omega t)} \right\}, \quad (\text{B.4})$$

等が考えられるだろう。一般性を失うことなく、

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \theta_0), \quad (\text{B.5})$$

とにおいて議論をする。^{*2} ここで、 A は振幅 (**amplitude**)、 k は波数 (**wavenumber**)、 ω は振動数 (**frequency**) と呼ばれ、これらと θ_0 は全て x, t に依存しない定数である。また、

$$\theta \equiv kx - \omega t + \theta_0 \quad (\text{B.6})$$

^{*1} 本章ではデカルト座標系の単位ベクトルは $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ などと書くことにする。

^{*2} θ_0 の値を適切に選べば、(B.5) は (B.1)~(B.4) の全てを表現することができる。

は位相 (**phase**) と呼ばれる.

$\psi(x, t) = \psi(x + \lambda, t)$ となる正で最小の λ は波長 (**wave length**) と呼ばれる. 余弦関数は 2π 周期的*³であるから, 波長と波数は, $k\lambda = 2\pi$, もしくは

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{B.7})$$

の関係にある. 時間を固定したとき, 波長は波の場が一回振動する (例えば, 山から谷になってまた山に戻る) までの距離である. いっぽう, 波数は時間を固定したときに 2π の距離の間に波の場が振動する回数である (図 B.1 参照).

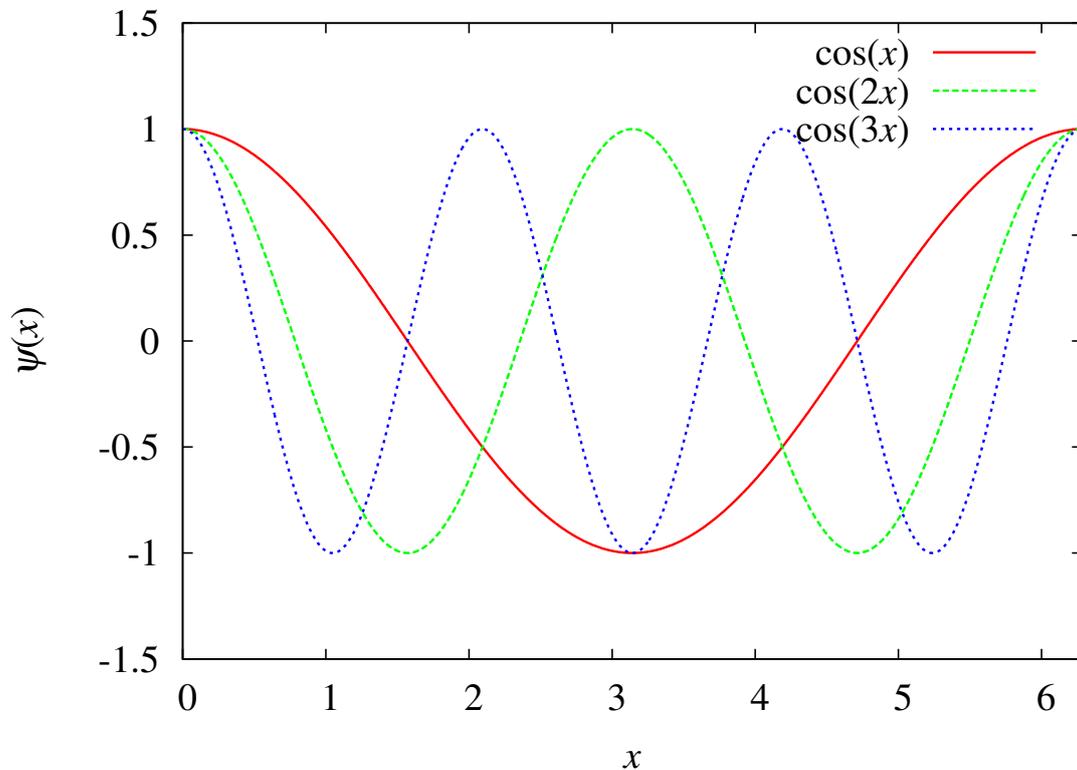


図 B.1 波長が 2π , π , $2\pi/3$ の余弦関数 (それぞれ赤実線, 緑破線, 青点線 で表されている). これらはそれぞれ波数 1, 2, 3 を持ち, 図に示されているように 2π の距離の間にそれぞれ 1, 2, 3 回振動している.

先の議論は時間を固定したときの空間の周期性に関するものであった. 同様に空間を固定したときに時間に関する周期性の議論をすることができる. $\psi(x, t) = \psi(x, t + T)$ となる正で最小の T は周期 (**period**) と呼ばれる. 余弦関数は 2π 周期的であるから, 周期と

*³ $\cos \theta = \cos(\theta + 2\pi)$ のこと.

振動数は、 $\omega T = 2\pi$, もしくは

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{B.8})$$

の関係にある。空間を固定したとき (場所を固定して場を時間的に観測したとき), 周期は波の場が一回振動するまでの時間である。いっぽう, 振動数は空間を固定したときに 2π の時間の間に波の場が振動する回数である。

B.1.2 位相速度

位相の進む速さを求めてみる。ある時刻 t_1 に x_1 における位相を $\theta_1 \equiv kx_1 - \omega t_1 + \theta_0$ とする。時刻 $t_1 + \delta t$ に θ_1 という位相は $x_1 + \delta x$ に移動したとする。このとき,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= kx_1 - \omega t_1 + \theta_0 \\ &= k(x_1 + \delta x) - \omega(t_1 + \delta t) + \theta_0 \end{aligned}$$

より, $k\delta x - \omega\delta t = 0$ を得る。したがって, 位相の進む速さ c_p は

$$c_p \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\omega}{k} \quad (\text{B.9})$$

である。 c_p は位相速度 (**phase speed**) と呼ばれる。

B.1.3 群速度

波数と振動数がそれぞれ k と ω から 僅かに異なる 2 つの波を重ね合わせることを考える。このとき

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \cos \{(k + \delta k)x - (\omega + \delta \omega)t + \theta_0\} + A \cos \{(k - \delta k)x - (\omega - \delta \omega)t + \theta_0\} \\ &= 2A \cos(\delta k x - \delta \omega t) \cos(kx - \omega t + \theta_0) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

となる。(B.10) は振幅が時間と空間に依存してゆっくりと変動する波数が k , 振動数が ω の波と解釈することができる (図 B.2 参照)。もとの波がときどき強め合って振幅が 2 倍になることがある。これは音の場合は「うなり」として知られているものである。

ゆっくりと変動する振幅が移動する速度を考えてみよう。振幅は波の形をしておりその位相の速さ (山, 谷, もしくは節の移動する速さ) は以前と同じ議論により, $\delta\omega/\delta k$ で与えられる。そこで, 振幅の移動速度 c_g は, $\delta k \rightarrow 0$ の極限をとって,

$$c_g \equiv \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{B.11})$$

で与えられる。この速度は波群もしくは波束の移動速度であるので群速度 (**group velocity**) と呼ばれる。

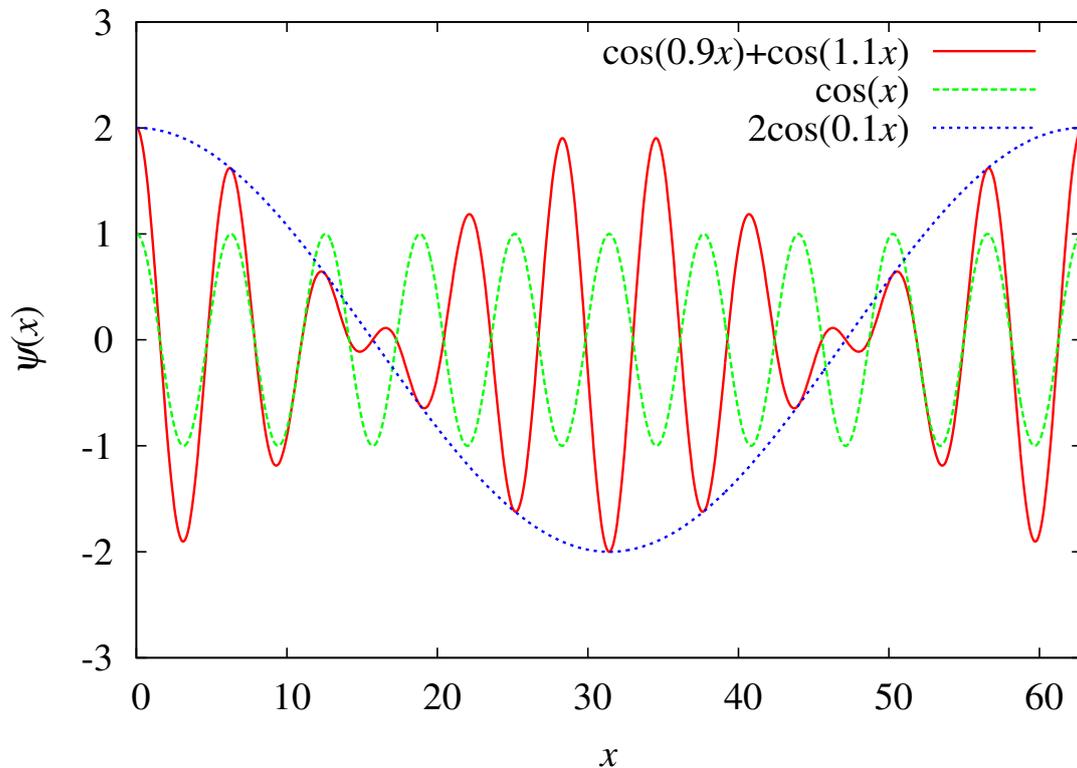


図 B.2 波数がわずかに異なる 2 つの波, $\cos(0.9x)$ と $\cos(1.1x)$, を重ね合わせた結果 (赤実線). 2 つの波を重ね合わせた結果は $\cos(x)$ の波 (緑破線) の振幅が $2\cos(0.1x)$ (青点線) のようにゆっくりと変動したものと解釈することができる.

B.2 空間 2 次元の場合

B.2.1 基本的な用語

空間が 2 次元の場合, 波を表す関数形を一般性を失うことなく

$$\psi(x, y, t) = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t + \theta_0), \quad (\text{B.12})$$

とついて議論をする. ここで, A は振幅, k_x, k_y はそれぞれ x, y 方向の波数, ω は振動数と呼ばれ, これらと θ_0 は全て x, y, t に依存しない定数である. また,

$$\theta \equiv k_x x + k_y y - \omega t + \theta_0 \quad (\text{B.13})$$

は位相と呼ばれる.

$\psi(x, y, t) = \psi(x + \lambda_x, y, t)$ となる正で最小の λ_x は x 方向の波長, $\psi(x, y, t) = \psi(x, y + \lambda_y, t)$ となる正で最小の λ_y は y 方向の波長, と呼ばれる. 余弦関数は 2π 周期

的であるから、各方向の波長とそれに対応する波数は、 $k_x \lambda_x = 2\pi$, $k_y \lambda_y = 2\pi$, もしくは

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}, \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \quad (\text{B.14})$$

の関係にある。時間を固定したとき、 $x(y)$ 方向の波長は $x(y)$ 軸に沿って波の場が一回振動するまでの距離である。いっぽう、波数は時間を固定したときに 2π の距離の間に波の場が振動する回数である。

先の議論は時間を固定したときの空間の周期性に関するものであった。同様に空間を固定したときに時間に関する周期性の議論をすることができる。 $\psi(x, y, t) = \psi(x, y, t + T)$ となる正で最小の T は周期と呼ばれる。余弦関数は 2π 周期的であるから、周期と振動数は、 $\omega T = 2\pi$, もしくは

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{B.15})$$

の関係にある。空間を固定したとき（場所を固定して場を時間的に観測したとき）、周期は波の場が一回振動するまでの時間である。いっぽう、振動数は空間を固定したときに 2π の時間の中に波の場が振動する回数である。

(B.12) で表される波の位相の等しいところを連ねると直線になる。実際に (B.13) を y について解くと、

$$y = -\frac{k_x}{k_y}x + \frac{\omega}{k_y}t + \frac{(\theta - \theta_0)}{k_y} \quad (\text{B.16})$$

を得る。つまり、ある瞬間に位相の等しい線（等位相線と呼ばれる）は (x, y) 平面内で傾きが $-k_x/k_y$ の直線である（図 B.3 参照）。

$k_y > 0$, $\omega > 0$ として考える。位相が大きくなると、 y 切片が増大する。同様に時間が経過すると傾きは変わらず y 切片は増大していく。そこで、位相は等位相線に垂直な方向に移動していくことになる。等位相線の傾きは $(-k_y, k_x)$ で表されるベクトルであるので、これと垂直なベクトルは (k_x, k_y) である。 (k_x, k_y) と成分表示されるベクトル $\mathbf{k} \equiv k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$ は波数ベクトル (wavenumber vector) と呼ばれ、位相の進行方向に一致する。

B.2.2 位相速度

位相の進む速さを求めてみる。波数ベクトルの方向に x 軸を取り直すと、前節の空間 1 次元の問題に帰着するので、位相の進む速さ、位相速度、は

$$c_p = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (\text{B.17})$$

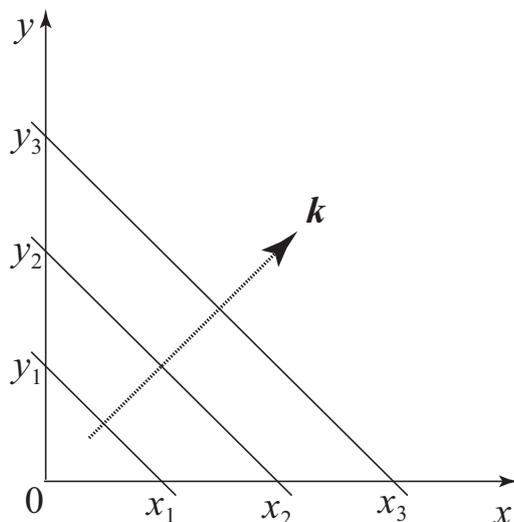


図 B.3 2次元平面内の波の位相線, 波数ベクトルの概念図. $(x_i, 0)$, $(0, y_i)$ を結ぶ直線は等位相線を表す. ここで $i = 1, 2, 3$ である. \mathbf{k} が記されている矢印は波数ベクトルである. $\psi(x, y, t) = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t + \theta_0)$ で k_x, k_y, ω が全て正の場合, 位相は左下から右上に向かって大きくなり, 波の位相は \mathbf{k} の方向に向かって伝播する.

である. ここで波数ベクトルに沿った波数の大きさは, $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ であることに注意する.

いっぽう, x 軸に沿って位相の進む速さ, x 軸方向の位相速度, を求めてみる. $y = 0$ において x 軸上で議論する. この場合も前節の空間 1 次元の場合の問題に帰着するので, x 軸方向の位相速度 $c_p^{(x)}$ は

$$c_p^{(x)} = \frac{\omega}{k_x} \quad (\text{B.18})$$

である. 同様にして, y 軸方向の位相速度は

$$c_p^{(y)} = \frac{\omega}{k_y} \quad (\text{B.19})$$

となる. (B.15), (B.18), (B.19) の結果は

$$c_p \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \neq c_p^{(x)} \mathbf{e}_x + c_p^{(y)} \mathbf{e}_y \quad (\text{B.20})$$

であることから, 位相速度はベクトルではないことがわかる.*4 なお, 速度は速さの度合い

*4 図 B.3 を参照して幾何学的に説明してみる. 単位時間に波の位相が $(x_1, 0)$, $(0, y_1)$ を結ぶ線から, $(x_2, 0)$, $(0, y_2)$ を結ぶ線へ移動したとする. このとき x 方向の位相速度は $x_2 - x_1$, y 方向の位相速度は $y_2 - y_1$ である. 一方, \mathbf{k} 方向の位相線の間隔は $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ よりも短い. このことから \mathbf{k} 方向の位相速度の大きさは, x 方向の位相速度と y 方向の位相速度のベクトル和ではないことがわかる.

なのに対して、速度の逆数はゆっくりさの度合いを表すことになり、位相速度の逆数、位相の進行のゆっくりさを表す量*5はベクトル量になる。

B.2.3 群速度

波数ベクトルと振動数がそれぞれ \mathbf{k} と ω から 僅かに異なる 2 つの波を重ね合わせることを考える。このとき

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= A \cos \{ (k_x + \delta k_x)x + (k_y + \delta k_y)y - (\omega + \delta\omega)t + \theta_0 \} \\ &\quad + A \cos \{ (k_x - \delta k_x)x + (k_y - \delta k_y)y - (\omega - \delta\omega)t + \theta_0 \} \\ &= 2A \cos(\delta k_x x + \delta k_y y - \delta\omega t) \cos(k_x x + k_y y - \omega t + \theta_0)\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

となる。(B.21) は振幅が時間と空間に依存してゆっくりと変動する x, y 方向の波数がそれぞれ k_x, k_y , 振動数が ω の波と解釈することができる。

ゆっくりと変動する振幅が x 軸に沿って移動する速度を考えてみよう。振幅は波の形をしておりその位相の速さは以前と同じ議論により、 $\delta\omega/\delta k_x$ で与えられる。そこで、振幅の x 軸方向の移動速度、 x 軸方向の群速度 $c_g^{(x)}$ は、 $\delta k_x \rightarrow 0$ の極限をとって、

$$c_g^{(x)} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_x} \quad (\text{B.22})$$

で与えられる。同様の議論により、 y 軸方向の群速度 $c_g^{(y)}$ は

$$c_g^{(y)} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_y}, \quad (\text{B.23})$$

波数ベクトル \mathbf{k} の方向の群速度は

$$c_g \equiv \frac{\partial\omega}{\partial |\mathbf{k}|}, \quad (\text{B.24})$$

である。そこで波数空間内の勾配演算子

$$\nabla_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial k_y} \quad (\text{B.25})$$

を導入すると、群速度はベクトル量であることがわかる。即ち、

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega. \quad (\text{B.26})$$

強調しておく、波の進行速度には位相速度と群速度の 2 種類が存在すること、位相速度はベクトル量ではないが、群速度はベクトル量であること、である。なお、位相の進行方

*5 slowness と呼ばれるらしい。

向は波数ベクトルの方向であるが、群速度は波数ベクトルの方向を向くとは限らないことを注意しておく。

演習問題

1. θ_0 の値を適切に選べば、(B.5) は (B.1)~(B.4) の全てを表現することができることを示しなさい。
2. 空間が 2 次元の波の場で x, y 方向の位相速度がそれぞれ $c_p^{(x)} = \omega/k_x$, $c_p^{(y)} = \omega/k_y$ であり、 \mathbf{k} 方向の位相速度が $c_p = \omega/|\mathbf{k}|$ のとき、slowness はベクトル量となること、即ち

$$c_p^{-1} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = c_p^{(x)-1} \mathbf{e}_x + c_p^{(y)-1} \mathbf{e}_y \quad (\text{B.27})$$

を確かめなさい。