第 8 章

成層流体の特性

重力場中では, 軽い流体が重い流体の上に積み重なった成層状態が実現する. このような成層流体の性質について簡単な考察を行う. まずはじめに, 温位という量を導入する. これは温度の次元をもち, 異なる圧力環境下にある流体の軽重を, その値の大小によって議論することができ, さらに断熱過程においては保存する便利な物理量である. 次に, 成層流体中の振動運動について議論する.

キーワード：温位, 大気の静的安定性, 乾燥断熱減率, 浮力振動, Brunt–Väisälä 振動数

8.1　温位

熱力学の第一法則, 理想気体の状態方程式を用いると, 断熱過程において Poisson の関係式 (4.12) が成り立つ. Poisson の関係式は, 通常, 圧力と体積（もしくは密度）との間の関係式で表現されるが, 理想気体の状態方程式 (4.1) を用いて, 圧力と温度の関係に書き直すことができる:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{8.1a}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa}. \tag{8.1b}$$

ここで, $\gamma/(\gamma-1) = 1/\kappa = C_\mathrm{p}/R$, T_0 は p_0 における温度である. (第 4 章, 演習問題 3 参照.)

(8.1b) は熱力学においては

$$pT^{1/\kappa} = \mathrm{const} \tag{8.2}$$

などと表現される場合が多く, T_0, p_0 という量は定数に埋没させてしまい, それらに注目

することはないが, 地球流体力学では, T_0 は温位 (potential temperature) と呼ばれ, 以下に述べるように, 極めて重要な役割を果たす物理量である.

鉛直方向にある温度プロファイルを持った大気を考え, ある高度 z において気圧 $p(z)$, 温度 $T(z)$ を持った空気塊を気圧が p_0 を持つ高度まで (通常 $p_0 = 1000$ h Pa が用いられる) 断熱的に移動させたと仮定したとき, 空気塊が持つ温度 T_0 は (8.1b) から計算され, T_0 を高度 z にある空気塊が持つ温位と定義する.

通常, 温位は θ という記号で表される. 即ち, 温度 T, 気圧 p を持つ空気塊の温位は

$$\theta \equiv T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa}, \quad p_0 = 1000\,\mathrm{hPa} \tag{8.3}$$

で定義される. 次章で紹介するように, 温位の鉛直分布 $\theta(z)$ により, 鉛直方向の大気の安定度を見積もることが出来る.

さらに温位はエントロピー S との間に

$$S = C_\mathrm{p} \ln\theta + \mathrm{const} \tag{8.4}$$

の関係がある. したがって, エントロピーが断熱過程で保存するように, 温位も断熱過程において保存する物理量である. 地球流体力学ではエントロピーよりもむしろ温位を使って現象を表現することが通例である.

温位を導入する意義

地球大気の様な重力場中で，それぞれ異なる高度にある空気塊の温度を比べ，どちらの空気塊が暖かいか，もしくは冷たいか，という問いを発したとしよう．このとき，単純にそれぞれの空気塊の温度を比べるだけで判断するのは間違いである．なぜならば，一般に重力場中では鉛直方向に気圧は変化しており，異なる（圧力）環境におかれた空気塊の温度を比べて，大小関係を論じることは妥当でないからである．ものを比べるときには，同じ条件 (環境) のもとで比べないといけない．そこで考えられるひとつの方法は，異なる高度にある空気塊をそれが持つ性質が変化しないようにある基準となる環境に仮想的に変位させて, それぞれの空気塊の温度を比べることである．つまり, 基準気圧面（$p_0 = 1000$hPa）まで仮想的に空気塊を断熱的に変位させ, そのとき空気塊が持つ温度 T_0 を比較に使うことである．上で述べたように，この温度がまさしく温位 θ である．したがって，温位を使えば異なる高度にある 2 つの空気塊の寒暖を，単純に温位を比べることによって評価することができる．

さらに理想気体の状態方程式を参照すると，同じ圧力場中 p_0 では，気体の密度は温度に反比例する（$\rho = p_0/RT$）．従って，気体の密度は温位に反比例することになる．つまり，単位体積あたりで比較すると，温位の高い気体は軽く，温位の低い気体は重いことになる．

8.2　乾燥大気の静的安定性

5.1.3 節では, 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式から気圧の鉛直プロファイル（鉛直分布）を導いた．気温の鉛直プロファイルは, 太陽からの太陽放射や地球から射出する赤外線を中心とした地球放射が大気にどのように吸収されるか, といった議論により導かれる．このような議論は大気放射学として知られており, 「地球および惑星大気科学」のテーマである．本節では, 放射の議論は抜きにして, 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式から導かれる, 気温の鉛直プロファイルについて議論する．

8.2.1　パーセル法

パーセル法は流体をパーセル（流体の微小部分）とその外界とに分離し, パーセルが運動しても外界はその影響を受けないと仮定する考え方である．

5.1.1 節と同じ状況設定で, 初期に高度 z にあるパーセルを $z+\Delta z$ まで変位させたときの運動についてを考える．ここではパーセルに関して以下の仮定をおく．

1. パーセルは乾燥している（水蒸気は含まない）[*1]
2. パーセルの変位は微小量
3. パーセルの変位は断熱過程
4. パーセルの持つ圧力と, その外界の圧力とは常に等しい
5. 外界は静水圧平衡の状態にある

仮定 3 より, このときパーセルの持つ温位は変位の前後で一定に保たれる．なぜならば, 温位はエントロピー S と (8.4) の関係で結ばれ, エントロピーは断熱過程において一定に保たれるからである．なお, 温位 θ は状態方程式 (4.1) を用いて圧力と密度で表現すると,

$$\theta = \frac{p_0}{R\rho}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}, \tag{8.5}$$

と表現できる．

パーセルの持つ物理量を添え字 p であらわし, 一方, パーセルの外界の物理量を添え字

[*1] 水蒸気を含む場合, 気圧や気温の変化によって水蒸気が凝結し潜熱の解放が起こるので, ここの議論のように断熱という仮定が成り立たなくなる．

env であらわすことにする．パーセルの運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}^2\Delta z}{\mathrm{D}t^2} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}(z+\Delta z)}\left(\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_{z+\Delta z} - g$$
$$= \frac{\rho_{\mathrm{env}}(z+\Delta z) - \rho_{\mathrm{p}}(z+\Delta z)}{\rho_{\mathrm{p}}(z+\Delta z)}g \tag{8.6}$$

と書ける．ここで添え字 $(\bullet)_{z+\Delta z}$ は $z+\Delta z$ においてカッコ内の物理量を見積もることを表している．第 1 式から第 2 式への変形は, 外界が静水圧平衡の状態（仮定 5）にあることを用いた．

(8.6) の右辺は浮力を表している．パーセルを z から $z+\Delta z$ の高さに変位させたとき,

- パーセルの持つ密度 ρ_{p} が外界の持つ密度 ρ_{env} よりも小さい場合 $(\rho_{\mathrm{env}} - \rho_{\mathrm{p}} > 0)$, 即ち, パーセルが外界に比べて軽い場合には, 右辺は正, 即ちパーセルは重力に抗して上向きの力を受ける．
- パーセルの持つ密度 ρ_{p} が外界の持つ密度 ρ_{env} よりも大きい場合 $(\rho_{\mathrm{env}} - \rho_{\mathrm{p}} < 0)$, 即ち, パーセルが外界に比べて重い場合には, 右辺は負, 即ちパーセルは下向きの力を受ける．

次に温位を用いて (8.6) の右辺を書き換える．高度 $z+\Delta z$ における外界の密度, およびパーセルの密度を求める．外界の密度は $\mathcal{O}(\Delta z)$ の範囲内で

$$\rho_{\mathrm{env}}(z+\Delta z) = \rho_{\mathrm{env}}(z) + \left(\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z \Delta z \tag{8.7}$$

である．同様に, パーセルの密度は

$$\rho_{\mathrm{p}}(z+\Delta z) = \rho_{\mathrm{p}}(z) + \left(\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}z}\right)_z \Delta z$$

である．ここで, 密度の鉛直微分は (8.5) を用いて,

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{p_0}{R\theta_{\mathrm{p}}}\left(\frac{p_{\mathrm{p}}}{p_0}\right)^{1/\gamma}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma}\frac{p_0}{R\theta_{\mathrm{p}}}\left(\frac{p_{\mathrm{p}}}{p_0}\right)^{1/\gamma}\frac{1}{p_{\mathrm{p}}}\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}z}$$
$$= \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\ln p_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}z}, \tag{8.8}$$

と書ける．さらにパーセルの初期位置 z ではパーセル内の物理量と外界の物理量は等しい

ので*2, $\rho_{\mathrm{p}}(z) = \rho_{\mathrm{env}}(z)$ である．また仮定 4 より, $p_{\mathrm{p}} = p_{\mathrm{env}}$ である．これらを用いて,

$$\rho_{\mathrm{p}}(z+\Delta z) = \rho_{\mathrm{env}}(z) + \left(\frac{\rho_{\mathrm{env}}}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\ln p_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z \Delta z, \tag{8.9}$$

(8.9), (8.7) を用いると, パーセルの運動方程式は $\mathcal{O}(\Delta z)$ の範囲内で

$$\frac{\mathrm{D}^2\Delta z}{\mathrm{D}t^2} = g\left(\frac{\mathrm{d}\ln\rho_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\ln p_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z \Delta z.$$

(8.5) を用いると上式は

$$\frac{\mathrm{D}^2\Delta z}{\mathrm{D}t^2} = -g\left(\frac{\mathrm{d}\ln\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z \Delta z \tag{8.10}$$

と表される．

この方程式は, パーセルの外界の温位の鉛直プロファイルに依存して, パーセルの運動の形態が異なることを示している．定数係数の 2 階の微分方程式の知識から,

- $\left(\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z > 0$ であれば, パーセルは変位に伴って復元力を受け, 高度 z を中心とした振動運動を起こす．
- $\left(\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z < 0$ であればパーセルの変位は時間とともに指数関数的に増大してしまう．

ことがわかる．即ち, $\left(\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z < 0$ のような環境場は不安定である．したがって, 微小擾乱に対して鉛直方向に大気が安定であるためには, $\left(\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z > 0$ でなければいけない．$\left(\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}\right)_z = 0$ が安定と不安定の境となる．

図 8.1 に実際に観測された 図 5.1, 5.2 に対応する温位を示した．温位は高さとともに増大し, 特に高度 15 km よりも上空では温位の増大は著しい．この高度領域は下部成層圏である．

8.2.2　乾燥断熱減率

水蒸気を含まない大気について, 鉛直方向の安定性の境となる温度プロファイルを求めてみる．先の温位の鉛直プロファイルを温度で表現すると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa}\right\}\\ &= \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - \frac{\kappa T}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right).\end{aligned}$$

*2 なぜならパーセルと外界の区別はないから．

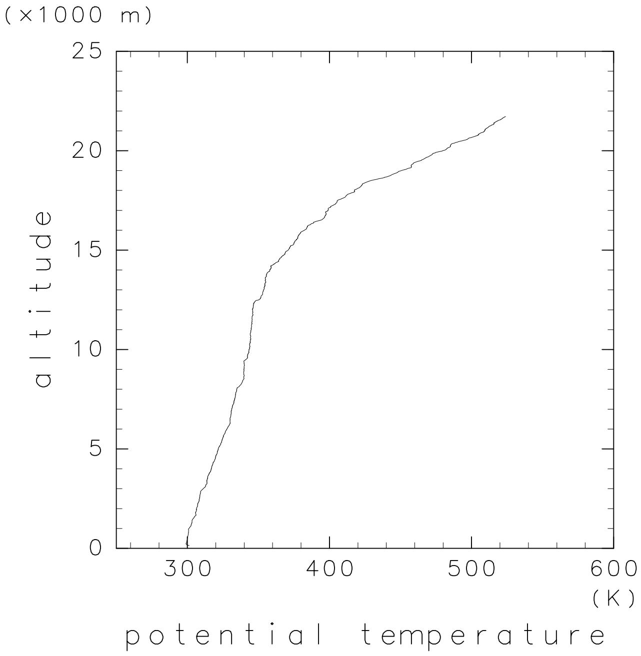

図 8.1　図 5.1 と同様. ただし, 温位のプロファイル.

安定性の境は $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = 0$ であり, また静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると, 上式から

$$\Gamma_{\mathrm{d}} \equiv -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{g}{C_{\mathrm{p}}} \tag{8.11}$$

が得られる. Γ_{d} は乾燥断熱減率と呼ばれ, 地球大気の場合, $\Gamma_{\mathrm{d}} = 9.8\,\mathrm{K/km}$ の値をとる.

8.2.3　Brunt–Väisälä 振動数

(8.10) の形の微分方程式は $\frac{\mathrm{d}\ln\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z} > 0$ の時,

$$\Delta z = C_+ e^{iNt} + C_- e^{-iNt} \tag{8.12}$$

$$N \equiv \sqrt{g\frac{\mathrm{d}\ln\theta_{\mathrm{env}}}{\mathrm{d}z}} \tag{8.13}$$

のような振動数 N で振動する解をもつ. このような振動数は Brunt–Väisälä 振動数と呼ばれるものである. (この振動は浮力が復元力となって起こるので, 振動現象を浮力振動, 振動数を浮力振動数とも呼ぶ.)

観測によると Brunt–Väisälä 振動数は地球の対流圏で $N = \mathcal{O}(10^{-2})\ \mathrm{s}^{-1}$ である.

演習問題

1. エントロピー S と温位 θ の関係式, (8.4) を導出しなさい.
2. 状態方程式を用いて, 温位の定義式 (8.3) から, (8.5) を導出しなさい.