

## 第7章

# 流体力学の基礎方程式の応用 (3): 浅水系

浅い水 (浅水系) の表面にできる波を流体力学にしたがって記述する。流体力学の重要な応用である気象学や海洋学では、ここで議論する浅水系は大気・海洋の大規模な運動を記述・理解するための重要な枠組みで、研究の現場でも頻繁に用いられる。地球に固定された座標系で大気や海洋の運動を眺め、記述することが理論的考察と観測とを比較をするうえで便利である。しかしながら、そのような座標系は慣性系ではない。<sup>\*1</sup> ここでは、座標系 (地球) の自転の効果は無視した議論を行うことにする。浅水流体系の波動は津波のモデルである。

キーワード: 浅水系, 浅水方程式系, 重力波, 津波

### 7.1 はじめに : 問題設定

地球の大気や海洋は水平方向の広がり比べてとても薄いことが知られている。地球は大円が 4 万 km の球であり、太平洋は 1 万 km ほどの幅を持つ。しかしながら、天気現象が起こる対流圏は地表からせいぜい高度 10km までの高度の領域であり<sup>\*2</sup>、太平洋の平均の深さも約 4km ほどである。このように幾何学的に薄い流体層では、鉛直運動が起きにくくなる。そこで、大気や海洋の大規模運動では、鉛直方向には静水圧平衡がよい近似で成り立つ。

---

<sup>\*1</sup> 地球のように一定の速さで回転する座標系における運動方程式には、座標系の回転に伴い、コリオリの力と遠心力が更なる力を付け加える必要がある。

<sup>\*2</sup> 対流圏の上に存在する成層圏・中間圏にも特異な興味深い大気現象が存在し気象学の研究対象になっているが、中間圏の上部まで含めても気象学が対象とする高度領域はせいぜい 100 km である。

そこで、この節では以下の問題設定のもとでの流体運動を考察する。

1. 一様な密度 ( $\rho = \text{const}$ ) を持つ非粘性流体を考察する。
2. 流体は水平方向に無限遠方まで広がっており、鉛直方向には図 7.1 で示すように、固体境界の上に存在し、静止状態の平均の深さを  $H$ 、自由表面変位の変動を  $\eta(x, y, t)$ 、下端境界の高さを  $h(x, y)$  で表す。鉛直方向の座標系  $z$  の原点は下端境界の平均にとる。そこで、自由表面の高度は、 $H + \eta$  であり、流体の厚さは  $H + \eta - h$  である。
3. 考察の対象とする流体の上部には慣性がゼロの別の流体が存在するとする。そこで、 $z = H + \eta$  における圧力はゼロである。
4. 外力は重力のみで重力加速度  $g$  は一定とする。
5. 鉛直方向には静水圧平衡が成り立っている。

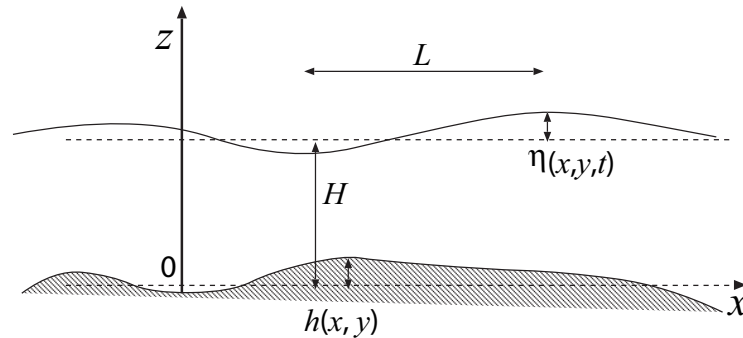


図 7.1 浅水系の概念図. 鉛直方向に  $z$  軸, 水平方向  $x, y$  軸をとる. 流体が静止しているとき, 自由表面の高さを  $z = H$  ととる. 下端境界の高さを  $h$ , 自由表面変位を  $\eta$  ととることとする.

## 7.2 浅水方程式系

前節で述べた問題設定のもと、現象を記述する支配方程式系を導く。

### 7.2.1 運動方程式

問題設定より、静水圧平衡の式を議論の出発点とする：

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (7.1)$$

(7.1) を  $z$  に関して、 $z$  から上端  $z = H + \eta$  まで積分する。この時、 $\rho$  は定数であることに注意すると、

$$p|_{z=H+\eta} - p|_z = -\rho g(H + \eta - z). \quad (7.2)$$

ここで、自由表面における圧力は問題設定よりゼロなので、したがって、任意の高度の圧力は

$$p(x, y, z, t) = \rho g(H + \eta(x, y, t) - z) \quad (7.3)$$

と表現できる。

2次元水平面内 ( $xy$  平面内) の速度を  $\mathbf{u}$ , 3次元空間の速度を  $\mathbf{v}$  と表すと運動方程式 (Euler 方程式) の水平成分は

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_2 p, \quad (7.4)$$

である。ここで、 $\nabla_2$  は2次元水平面内の勾配演算子である。(7.3) を代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = -g \nabla_2 \eta, \quad (7.5)$$

を得る。(7.5) の右辺の圧力傾度力は鉛直座標  $z$  に依存しないことに注意する。そこで、もし水平速度場が  $z$  に依存しない初期条件から始まるならば、その後の速度場も  $z$  に依存しない。したがって、 $\mathbf{u}$  は  $x, y, t$  のみの関数で (7.5) は

浅水系の運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_2 \mathbf{u} = -g \nabla_2 \eta, \quad (7.6)$$

となる。(7.6) は浅水系の運動方程式である。

### 7.2.2 連続の式

非圧縮性流体の連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.7)$$

もしくは、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.8)$$

とである。(7.8) を  $z$  に関して、流体の下端  $z = h$  から上端  $z = H + \eta$  まで積分する。この時、 $\mathbf{u}$  は  $z$  座標に依存しないことに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_h^{H+\eta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dz + \int_h^{H+\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz &= 0, \\ (\eta + H - h) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + w|_{z=H+\eta} - w|_{z=h} &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

を得る. ここで,  $w|_{z=H+\eta}$  は自由表面にある流体粒子の鉛直速度なので, その  $z$  座標を Lagrange 微分したものに等しい:

$$\begin{aligned} w|_{z=H+\eta} &= \frac{D(H+\eta)}{Dt} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_2 \eta. \end{aligned} \quad (7.10)$$

同様に,

$$\begin{aligned} w|_{z=h} &= \frac{Dh}{Dt} \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla_2 h. \end{aligned} \quad (7.11)$$

(7.10), (7.11) を (7.9) に代入すると,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_2 (\eta - h) + (\eta + H - h) \nabla_2 \cdot \mathbf{u} = 0,$$

もしくは

浅水系の連続の式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_2 \cdot \{(\eta + H - h)\mathbf{u}\} = 0, \quad (7.12)$$

を得る. (7.12) が今の問題設定での連続の式となる.

(7.6), (7.12) は未知変数  $\mathbf{u}$ ,  $\eta$  に対する方程式で, 未知変数が3個なのに対し, 方程式が3本あり, 閉じた方程式系になっている. これらの方程式系は, 浅水方程式系と呼ばれるものである. 以下では, 勾配演算子の添え字2は省略することにする.

## 7.3 重力波

自由表面が静止状態から乱されたとき, その乱れが波動となって位相速度  $c = \sqrt{gH}$  で伝播することを示す.

### 7.3.1 線形化

浅水方程式 (7.6), (7.12) は非線型方程式なので, そのままでは理論的な解析は困難である. そこで, 音波のときと同様に支配方程式系を線形化することにする.

下端境界は平坦 ( $h = 0$ ) で, 静止状態を基本状態とする. 静止状態からの乱れを考察することにする. 乱れは十分に小さく, 未知変数の2次以上の項は無視することにする. こ

のとき、浅水方程式 (7.6), (7.12) はそれぞれ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g\nabla\eta, \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7.14)$$

となる.

### 7.3.2 波動方程式

(7.13), (7.14) から波動方程式を導く. (7.14) を時間で偏微分する:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + H\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (7.15)$$

(7.15) の速度の時間微分を (7.13) を使って消去し,  $\eta$  のみの式に書き下すと,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH\nabla^2 \eta \quad (7.16)$$

を得る. これは, 波動方程式の形で, その位相速度は  $c = \sqrt{gH}$  である. 即ち, 浅水方程式系には, 表面を位相速度  $c = \sqrt{gH}$  で伝播する波動が存在することになる. このような波動は重力を復元力として伝播する波動なので, 表面重力波 (surface gravity wave) と呼ばれている. 音波と同様に浅水系の表面重力波は非分散性の波動である.

ここで議論した地球回転の効果が無視でき, しかも水平の現象の規模が水深に比べて非常に大きい浅水近似がよく成り立つ現象は津波である. 水深  $H = 1,000$  m のとき, 位相速度は 360 km/h, 水深  $H = 4,000$  m で  $c = 710$  km/h である. そこで, 平均水深 4000 m の太平洋 (幅約 10,000km) を横断するのはわずか 14 時間ほどになる.\*<sup>3</sup>

---

\*<sup>3</sup> 実際に起こったチリ地震 (1960 年) の津波は, 日本の太平洋沿岸に達するのに約 1 日であったので, 上記の理論的見積もりよりは倍の時間がかかっていることになるが, 現象の予測の桁はあっているといえる.