

第 2 章

運動学と構成方程式

流体の動力学を支配する運動方程式や流体運動のその他の支配方程式は次章で導出する。その前に、流れの運動学*¹である、流れの場は基本的な要素に分解することができることを主張する Helmholtz の基本定理について述べる。次に、流れ場の基本的な要素と応力との関係である構成則 (constitutive law), もしくはその数学的表現である構成方程式 (constitutive equation) について述べる。

キーワード: Helmholtz の基本定理, 構成則 (構成方程式), Newton 流体

2.1 Helmholtz の基本定理

流れの場が基本的な 4 つの運動に分解できることを主張する Helmholtz の基本定理について紹介する。なおこの節では和の規約を用いないことにする。流体中のある点を原点 O にとり, O の近傍 P (P の位置ベクトルを \mathbf{r} とし, そのデカルト座標表示を $\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ と表す) における流体の速度を $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ (デカルト座標表示で $\sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i$) とする。このとき

*¹ 力学 (mechanics) は一般に物体の位置や運動の変化を研究する物理学の分野である。さらに次の 3 つの分野に分けることができる:

1. 運動学 (kinematics): 運動方程式に言及せずに運動の性質を議論する学問.
2. 静力学 (statics): 静止している物体に現れる性質, 力のつり合いについて研究する学問.
3. 動力学 (dynamics): 物体の運動の物理的原因について研究する学問.

$\mathbf{v}(\mathbf{r})$ を \mathbf{O} の周りで Taylor 展開して x_i の 1 次までの項を取ると,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{O}} x_i, \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{0}) + (D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + D_{13}x_3) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (D_{21}x_1 + D_{22}x_2 + D_{23}x_3) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (D_{31}x_1 + D_{32}x_2 + D_{33}x_3) \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (2.1)$$

を得る. ここで添字 \mathbf{O} は原点で値を見積もることを表し, $\mathbf{v}(\mathbf{0})$ は原点における流速である. また

$$D_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{O}} \quad (2.2)$$

と定義した. (2.2) は 2 つの添え字を持つので, 2 階のテンソルであり, 速度勾配テンソルと呼ばれる. 一般に行列が対称行列と反対称行列に分解されるように, 2 階のテンソルも対称テンソルと反対称テンソルに分解できる:

$$\begin{aligned}D_{ij} &= \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{O}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{O}} \\ &= e_{ij} - \frac{1}{2}\omega_k,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{O}}, \quad (2.4)$$

$$\omega_k \equiv \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{O}}. \quad (2.5)$$

ここで, (i, j, k) はこの順番に $(1, 2, 3)$ の偶置換である. e_{ij} は対称テンソルで歪速度テンソル, ω_k は反対称テンソルで速度場の回転の k 成分である. さらに

$$\epsilon_i \equiv D_{ii} \quad (2.6)$$

と定義する. これらを用いると, $i \neq j$ の場合に,

$$\begin{aligned}D_{ij}x_j\mathbf{e}_i + D_{ji}x_i\mathbf{e}_j &= \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji}) (x_i\mathbf{e}_j + x_j\mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} (D_{ji} - D_{ij}) (x_i\mathbf{e}_j - x_j\mathbf{e}_i) \\ &= e_{ij} (x_i\mathbf{e}_j + x_j\mathbf{e}_i) + \frac{1}{2}\omega_k (x_i\mathbf{e}_j - x_j\mathbf{e}_i),\end{aligned}\quad (2.7)$$

と書けるので, (2.1) 式は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(0) &+ \frac{1}{2}\omega_1(x_2\mathbf{e}_3 - x_3\mathbf{e}_2) + \epsilon_1x_1\mathbf{e}_1 + e_{23}(x_2\mathbf{e}_3 + x_3\mathbf{e}_2) \\ &+ \frac{1}{2}\omega_2(x_3\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_3) + \epsilon_2x_2\mathbf{e}_2 + e_{31}(x_3\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_3) \\ &+ \frac{1}{2}\omega_3(x_1\mathbf{e}_2 - x_2\mathbf{e}_1) + \underbrace{\epsilon_3x_3\mathbf{e}_3}_{\text{(III)}} + \underbrace{e_{12}(x_1\mathbf{e}_2 + x_2\mathbf{e}_1)}_{\text{(IV)}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(I) = $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, (II) (IV)

各項は

(I) 並進運動

(II) 角速度 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$ の回転運動

(III) 各軸方向への一様な伸び ($\epsilon_i > 0$), 縮み ($\epsilon_i < 0$)

(IV) ずれ運動

を表している (図 2.1 参照). 流体は上記の 4 つの運動を同時に行っている. これが Helmholtz の基本定理である.

なお, 速度場の回転は渦度と呼ばれ, (2.5) に示されているように, 渦度は流体の局所的な回転角速度の 2 倍に等しいことがわかる.

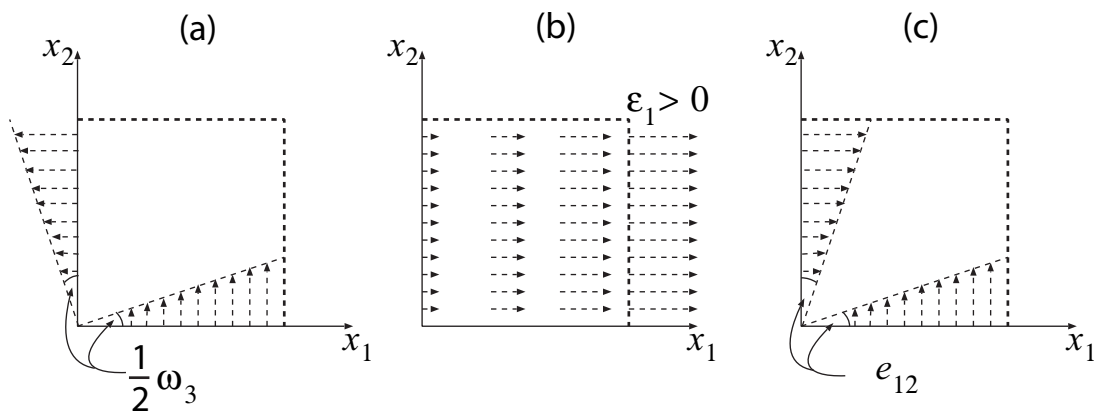


図 2.1 Helmholtz の基本定理における x_3 軸の周りの剛体回転 (a), x_1 軸方向への伸び (b), ずれ運動の模式図 (c). 矢印は速度ベクトルを表す.

2.2 Pascal の原理

法線応力 (圧力) に関して次の性質が証明できる:

“静止状態, 運動状態を問わず接線応力が常に 0 ならば, 法線応力は考える面の選び方によらない.”

—————[証明]—————

[問題設定:] ある点 P における圧力が P を通る平面の選び方に依存しないことを示す.

点 P を頂点とし, 微小な三角形 PAB を底面とする高さが 1 の三角柱を考える (図 2.2 参照). 三角柱が微小なので, 側面 PA, PB, AB に働く法線応力 (圧力) は各側面上でそれぞれ一様で p_1, p_2, p_3 , とする. また, $PA = l_1, PB = l_2, \angle A = \alpha_1, \angle B = \alpha_2$ とする.

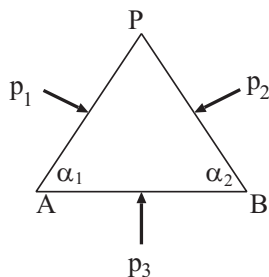


図 2.2 点 P を頂点とする単位高さの微小な三角柱に働く面積力.

- 静止状態で体積力が働いていない場合: 微小物体に働く圧力の AB 方向の成分は,

$$p_1 l_1 \sin \alpha_1 - p_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0, \quad (2.9)$$

である. 正弦定理

$$\frac{\sin \alpha_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_2}{l_1} \quad (2.10)$$

より, (2.9) から

$$p_1 = p_2, \quad (2.11)$$

が導ける. したがって圧力は P を通る平面の選び方に依存しない.

- 静止状態で体積力が働いている場合: 三角形の辺の長さの大きさを l とすると, 体積力は上記のような微小物体を考えたときに, $O(l^2)$ の大きさで, いっぽう面積力の大きさは $O(l)$ であるので, 体積力の大きさは面積力の大きさに比べて高次の微少量になる. したがって, l が非常に小さい場合には, 体積力の効果は面積力の効果に比べて無視できる. したがって, 体積力の働いていない先の議論が適用できる.
- 運動状態の場合: 質量と加速度の積を D'Alembert の原理によって慣性力として静力学 (静止状態) の問題に帰着させる. さらに慣性力は体積力であるから, l が小さいときには慣性力は無視することができ, 体積力の働いていない静止状態の議論が適用できる.

—————[証明終り]—————

特に, 静止状態における流体の圧力が, 圧力の働く面の向きに依存しないことは **Pascal** の原理として知られている.

2.3 構成方程式

流体の微小部分に注目し、それが外界から刺激（応力）を受けて応答（流動）する状況を考える。ただし、応力が与えられた時にどのような流動が生じるかは物質（流体の種類）に依存するだろう。与えられた応力に対する応答を数式で表現したものは、その物質の構成方程式と呼ばれ、特に応力に対する歪速度の関係を記述する式は、物質の力学的特性を表すので力学的構成方程式と呼ばれる。この節では、実在の流体の多くで成立する、応力と歪速度との関係が線形である線形構成方程式について述べる。この節では記述の簡便さから和の規約を用いることにする。

応力が歪速度の関数、即ち

$$\tau_{ij} = f_{ij}(e_{kl}) \quad (2.12)$$

とする。実在の多くの流体では次の2つの仮定がよく成り立つ。

1. 歪速度が微小で応力は歪速度の1次関数として書ける。
2. 流体は等方的（性質が特定の方向に依存しない）である。

1の仮定から、(2.12)を e_{kl} に関してTaylor展開し、1次の項まで残す：

$$\tau_{ij} = f_{ij}(0) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{kl}} e_{kl}. \quad (2.13)$$

(2.13)の第1項は歪速度が存在しないときの応力で、流体の定義によりこれは圧力に等しい。また圧力は働く面の向きに依存しないので、したがって

$$f_{ij}(0) = -p\delta_{ij} \quad (2.14)$$

である。また、(2.13)の第2項の係数 $\frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{kl}}$ は4つの添え字を持つので4階のテンソルであるが、2の仮定よりこれは4階の等方テンソルである。一般に4階の等方テンソルは2階の等方テンソルであるKroneckerのデルタの積を用いて

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{kl}} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (2.15)$$

と表現できる。ここで、 A, B, C は定数である。(2.14)、(2.15)を(2.13)に代入し整理すると、

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + (A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk})e_{kl} \\ &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + Be_{ij} + Ce_{ji} \\ &= (-p + Ae_{kk})\delta_{ij} + (B + C)e_{ij} \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。ここで、第2式から第3式への変形には、歪速度テンソルが対称テンソルであること ($e_{ij} = e_{ji}$) を用いた。 A, B, C は物質の物性定数に関係しており、通常 $A = \lambda, B + C = 2\mu$ と書き、(2.16) は

————— Newton 流体の構成方程式 —————

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.17)$$

と表現される。 μ は粘性率、 λ は第2粘性率と呼ばれる。(2.17) のように応力が歪速度の1次式で与えられる流体を **Newton 流体** (Newtonian fluid) という。そうでないものを非 Newton 流体 (non-Newtonian fluid) と呼ぶ。^{*2}

■静水圧と動圧 運動する流体中での法線応力(圧力)は、静止しているときの圧力と異なる。前者を動圧、後者を静水圧と呼ぶ。ここではその違いについて議論する。法線応力の平均値 $\bar{p} = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$ は、(2.17) より

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &= (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ii} + 2\mu e_{ii} \\ &= -3p + (3\lambda + 2\mu)e_{ii}, \\ \therefore \bar{p} &= p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)e_{ii} \end{aligned} \quad (2.18)$$

を得る。(2.18) は運動状態の平均の圧力は、静水圧 p よりも (2.18) の第2項の分だけ異なることを意味している。 e_{ii} は速度の発散で体積の変化の速度であり、その係数 $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積粘性率と呼ばれる。^{*3}

^{*2} youtube で非 Newton 流体の面白い画像が見られるので興味のある方はぜひ見てください。

<http://www.youtube.com/watch?v=f2XQ97XHjVw>

<http://www.youtube.com/watch?feature=fvwp&v=3zoTKXXNQUI&NR=1>

^{*3} 静圧と動圧が異なることは起こりそうもないと考えて、Stokes は $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ が成り立つものと仮定した。この関係は、Stokes の関係と呼ばれている。この関係の確実な理論的証拠はないようである。(今井功: 流体力学 (前編), 裳華房, 1973, p. 275)