第 1 章

序論

流体の運動を支配する物理法則（の一つ）は, 質点や剛体の力学でおなじみの Newton の運動の法則である. しかしながら, 質点や剛体は変形しないのに対して, 流体は変形することが本質である. そこで, 流体力学には今まで習ってきた力学と, ある部分では共通の概念を適用することができるが, また別の面では新たな概念が必要である. 本章では質点や剛体の力学と流体力学を対比しながら, 流体力学で登場する新たな概念を解説する

キーワード: 連続体, 応力, Lagrange 的記述と Euler 的記述

1.1 連続体

流体力学では**連続体**と呼ばれる物体を考察の対象とする. 連続体とは**物理量が, 空間・時間の連続関数として与えられる仮想的な物体**である. 実在の物質を連続体とみなす近似は**連続体近似**と呼ばれる. すべての物質は原子や分子などの粒子により構成されるので, 少なくとも物理量は空間の連続関数ではないが, 原子や分子といった微細構造に立ち入らず, 微細構造を平均化することによって実在の物体を連続体として取り扱う. 古典力学では, 物体を有限の質量を持つが大きさを持たない**質点**や有限の大きさと質量を持つが変形しない**剛体**と理想化して物理現象を記述する. 連続体近似という理想化は, このような古典力学における質点や剛体といった理想化に対応するものである.

連続体近似の方法

連続体近似は, 物体内部のある点 P における物理量の値を, P を含む微小体積 δV (ただし, 多数の原子や分子を含む) について, その物理量の平均値をもって定義することにより実現される. また, 時間についても多数の原子や分子の衝突が充分に行われるが, 微小な時間 δt に渡って物理量を平均する. このような操作を物体内のあらゆる点，あらゆる時刻で行うことにより, その物理量は空間・空間の連続関数, 即ち, 場の量となる.

1.2　流体粒子

流体力学ではしばしば**流体粒子** (fluid particle) または**パーセル** (fluid particle) という言葉が登場する．これは流体を構成している原子・分子などの粒子を言い表しているのではなく, 記述する現象の大きさに比べて（巨視的には）極めて小さく点とみなせるが, 無数の原子・分子が含まれるくらい（微視的には）大きな体積要素のことである．前節で述べた δV 程度の大きさをもった流体の微小な塊のことである．このような流体粒子に対する様々な保存則を数式で表現したものが流体力学の基礎方程式となる．流体力学ではそれらの式を適当な初期条件, 境界条件の下で解くことにより, 流体の運動を考察する.

1.3　応力

質点や剛体の力学では, Newton の第二法則（考察する物体に働く力の総和はその物体の運動量の時間変化率に等しい）よりそれらの運動方程式をたてる．流体力学でも同様に"流体粒子に働く力の総和が, 流体粒子の運動量の時間変化率に等しい" として流体粒子に関する運動方程式を立る. ここでは流体に限らず広く連続体[*1]に働く力について考えてみる.

1.3.1　体積力, 面積力

連続体に働く力には次の二種類がある.

- **体積力** (body force)：その大きさが物質の質量や体積に比例する力．重力, 遠心力, Coliois 力などがその例であり, 質点の力学でもおなじみのものである.
- **面積力** (surface force)：**連続体特有の力**．面を通して作用し, その大きさが面の大きさに比例する力．この力は, 連続体を変形させる作用をもつ.

単位面積あたりに働く面積力を**応力** (stress) と呼ぶ．これは MKS 単位系では Nm^{-2} の次元を持つ．"力" という言葉がついているが, その次元は力の次元 N ではないことに注意して欲しい.

[*1] 流体以外の連続体の代表的なものは弾性体である．連続体と流体の区別はのちの章で述べる.

1.3.2　応力の定義

連続体中の点 P における応力は, 点 P を通る平面 S を選び, S 上の P を含む単位面積を通して平面 S の法線 $\boldsymbol{n}$ の正の側から負の側へ及ぼす力で定義する．応力は, S の選び方, すなわち法線 $\boldsymbol{n}$ に依存する．また, 力はベクトル量であるから大きさと方向を持つ．したがって応力は 2 つの方向 (法線の方向と力の方向) と 1 つの大きさ（力の大きさ）に依存する量である．これは, 数学的には 2 階の**テンソル** (tensor) と呼ばれ, 9 個の成分, $\tau_{ij}, (i, j = x, y, z$ もしくは $1, 2, 3)$, で表される量である.[*2] τ_{ij} は**応力テンソル**と呼ばれる．τ_{ij} の表記の定義は以下のとおりである:

応力テンソル τ_{ij} の定義

> x_j 軸に垂直な平面を通して, x_j 軸の大きい側から小さい側へ作用する x_i 方向の応力を τ_{ij} と定義する.

例えば, x 軸に垂直な平面を通して, x の大きい側から小さい側へと作用する y 方向の応力は τ_{yx} または τ_{21} と書かれる．作用・反作用の法則を考えると,

$$\tau_{i(-j)} = -\tau_{ij} \tag{1.1}$$

の関係がある.

応力を面の接線方向の成分と法線方向の成分に分解し, それぞれを**接線応力** (tangential stress) または**せん断応力** (shear stress), **法線応力** (normal stress) と呼ぶ．法線応力は, 面の両側が押しあう場合は**圧力** (pressure), 引っ張りあう場合は**張力** (tension) となる．即ち, τ_{ij}, $(i \neq j)$ は接線応力, τ_{ij}, $(i = j)$ は法線応力を表す.

1.3.3　応力を用いた流体の定義

先に, 気体と液体を一括して流体と呼ぶと述べたが, 本節で定義した応力の概念を用いると, 流体は以下のように定義できる:

流体の定義

> 静止状態では接線応力が現れず, かつ法線応力が圧力である連続体を流体と定義する.

ここで, 「静止状態では」という断りが重要である．なぜなら, もし接線応力が現れたら, 僅かの力で変形するという性質のために, 流体は静止状態にあり得ない．また, 法線応力が張力の場合には, その面から流体は裂けてしまうからである.

[*2] 添え字 1, 2, 3 はそれぞれデカルト座標系の x, y, z 成分を表す.

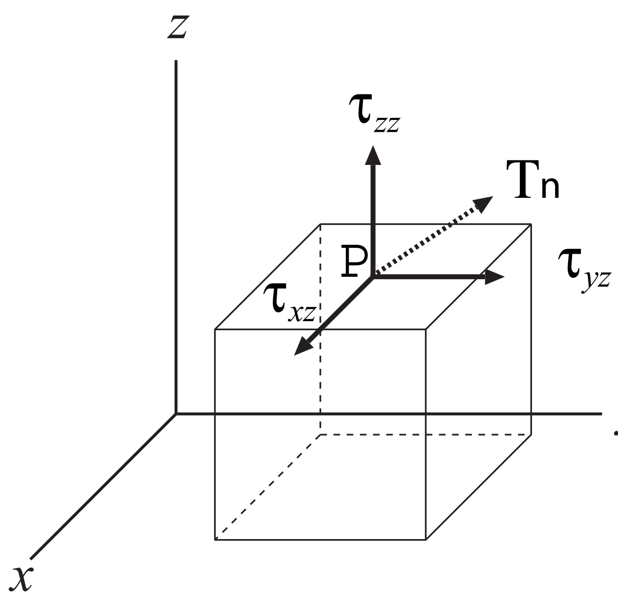

図 1.1　点 P を通る z 軸に垂直な平面を考える．このとき, P に働く応力 $\boldsymbol{T_n}$ は平面に水平な成分 τ_{xz}, τ_{yz} と垂直な成分 τ_{zz} に分解できる．

1.3.4　応力の表記：和の規約

ベクトルやテンソルの表記には, しばしば和の規約（もしくは総和規則）と呼ばれる表記法が使われる．これは, デカルト座標系の x, y, z 成分をそれぞれ添え字 1, 2, 3 で表し, 一つの項の中に同じアルファベットの添え字が 2 度繰り返し用いられているときには, その添え字について 1 から 3 までの和をとる, という規則である.*3

1.4　流れの記述

流体力学では流体を連続体とみなすので, 物理量は時間と空間の連続関数, 即ち, 場の量, として表現される．場の量としての記述には二通りの記述方法があり, それぞれの方法に時間微分が定義できる．ここではこれら二つの記述方法と二つの時間微分について解説する．

*3 より詳しくは, 地球惑星科学基礎 III のノートを参照してください．

1.4.1　Lagrange 的記述

この記述方法では, 流体を無数の流体粒子の集団と見なし, 各粒子の運動を追跡することにより流体の運動を記述する．この記述方法は質点系の力学における質点系の記述方法を連続体に対して適用したものである．そこで質点系の記述方法と非常によい対応関係がある．たとえば N 個の質点系の運動を考えたときに, 質点系の力学では i 番目 $(i=1,2,\dots N)$ の質点の任意の時刻 t における位置 $\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$ を問題にする.*4 ここで i は質点の "名前" である．一方, 流体粒子の "名前" には, ある時刻における流体粒子の位置座標を用いる．ある時刻における空間の一点に存在する流体粒子は唯一であるために, 位置座標で流体粒子を識別することができる．通常は初期時刻 ($t=0$) の位置が "名前" に用いられる．$t=0$ において位置座標 $\boldsymbol{a}\equiv(a,\,b,\,c)$ に存在していた流体粒子の "名前" を $\boldsymbol{a}$ もしくは $(a,\,b,\,c)$ と名付ける．$\boldsymbol{a}$ や (a,b,c) は**物質座標**（material coorinates）と呼ばれる.

質点系と流体の大きな違いは次の 2 点である.

- 質点の名前 i は離散的量（整数）であるが, 流体粒子の名前 $\boldsymbol{a}$ は連続的量（$\boldsymbol{a}$ の成分は実数）である.
- 質点系の場合には各質点はバラバラに運動をする．一方流体の運動では, 流体は連続体であるから隣り合う流体粒子 (近い名前の流体粒子) は互いに似た運動をする.

Lagrange 微分

各流体粒子に付随した物理量の時間的変化率, 時間微分, を **Lagrange 微分**（または物質微分, material differentiation）と呼び

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$$

で表す.*5 Lagrange の方法では, 物理量 $F(\boldsymbol{a},t)$ ($\boldsymbol{a}$ という名前の流体粒子が時刻 t において持っている物理量) の Lagrange 微分は

$$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{a}} \tag{1.2}$$

と表せる．これは質点系の力学の $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ に対応するものである.*6

以上をまとめると, 表 1.1 のようになる.

*4 この授業では特に断りのない限り, デカルト座標系で流体現象を記述する.

*5 教科書によっては, Lagrange 微分を $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と表しているものもある.

*6 質点系の力学における時間微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ は, 名前 i を固定して微分していることに注意.

	流体力学 (Lagrange 的記述)	古典力学 (質点系)
粒子の識別子	物質座標 $\boldsymbol{a} \equiv (a, b, c)$: 連続的量	i : 離散的量
物理量, 例えば速度	$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t)$	$\boldsymbol{v}_i(t)$
時間微分	$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{a}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

表 1.1　流体力学における Lagrange 的記述と質点系の力学との対応関係.

例

流体粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の Lagrange 微分は, その流体粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ である. 即ち, $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{r}}{\mathrm{D}t}$ となる. また, 速度の時間変化率 $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}$ は加速度である.

1.4.2　Euler 的記述

Lagrange 的記述は質点系の力学とよい対応関係にあるので, 質点系の力学の知識を利用できるという利点がある. しかしながら, この記述方法は実用的ではない. Lagrange の方法が与えるのは, ある時刻に適当な場所にあった流体粒子が, のちの時刻にどこに行き, どのような性質（温度, 圧力, 速さ) をもつか, である.[*7] 一方, 我々が興味のあるものは, 例えば, 大気現象を想像してみると, ある時刻における, ある場所の気温であったり気圧や風向・風速であろう. このような観測する時間と場所における物理量の記述に用いられるより実用的な記述法が Euler 的記述である.

この記述方法では任意の時刻 t において, 空間の各点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で物理量の値を指定することによって流体の運動を記述する. すなわち, 電磁気学における物理量の記述と同じものである. そこで, 電磁気学と流体力学ではしばしば同じ形の方程式が登場する. 歴史的には電磁気学よりも先に流体力学が学問的に体系化されており, 流体力学の学問体系を参考にして電磁気学が体系化されたといわれている.

Euler 的記述と Lagrange 的記述の大きく異なる点は, 変数 x, y, z が Lagrange 的記述では従属変数 (物質座標と時間に依存する変数) なのに対し, Euler 的記述では独立変数であることである.

Lagrange 微分の Euler 的表現

流体粒子に付随したある物理量 F の Euler 的記述は $F(x, y, z, t)$ である. この量の Lagrange 微分を導く. 即ち, F の Lagrange 微分を独立変数を x, y, z, t とした微分（Euler

[*7] 原子力発電所を発生源とした放射性物質が, いつ, どこに, どのくらいの濃度でやってくるか, といったことを問題にする場合には Lagrange 的記述が有効である.

微分と呼ぶことにするで表現する). ある時刻 t で $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$ にあった流体粒子が, 時刻 $t + \delta t$ において $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\delta t = (x + u\delta t,\, y + v\delta t,\, z + w\delta t)$ に移動したとする. このとき流体粒子に付随した F の変化 δF は,

$$\begin{aligned}\delta F &= F(x + u\delta t,\, y + v\delta t,\, z + w\delta t,\, t + \delta t) - F(x,\, y,\, z,\, t)\\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta t + \mathcal{O}\left((\delta t)^2\right),\end{aligned}$$

である. ここで $\mathcal{O}\left((\delta t)^2\right)$ は δt の二次以上の項を表す. そこで, F の Lagrange 微分の Euler 的表現は

$$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} = \lim_{t\to 0}\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z} \tag{1.3}$$

となる. F は任意であるから, Lagrange 微分の Euler 微分による表現として

Lagrange 微分の Euler 微分による表現

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} + w\,\frac{\partial}{\partial z}\\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\end{aligned} \tag{1.4}$$

を得る.

注意：　(1.4) の第 2 の表現に特に注意して欲しい. $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ は決して $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ とは等しくない！ ∇ は演算子であるから演算の順序を入れ換えては意味が違ってくる. 例年, 両者の区別ができない人が非常に多い. $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ は演算子で, 何か関数に食いついて初めて数値をとりえる (つまり $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ は**飢えている**) のに対し, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ はそれ自身で明確な数値を持ちえる.

以下に 2 つの記述を表にしてまとめておく.

	Langrange の方法	Euler の方法
立場	粒子的立場の記述	(電磁気学のような) 場の立場の記述
独立変数	$\boldsymbol{a} = (a, b, c), t$	$\boldsymbol{r} = (x, y, z), t$
従属変数	$\boldsymbol{r}; p, \rho, T, ...$	$\boldsymbol{v} = (u, v, w); p, \rho, T, ...$
Lagrange 微分, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{a}}$	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$

(1.4) の右辺第 1 項は Euler 微分項, $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ の項は**移流項** (advective term) や**対流項** (convective term) と呼ばれる. 以下の例題は, 移流という言葉の意味と移流項の作用を理解するのに適当であろう.

例題: ある観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3.0 K 気温が低いとする．もし $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の北風が吹いていて，空気塊の温度は変化しないものとする．このとき，観測所における気温の時間変化率は以下のように求められる．

温度 T の Lagrange 微分は Euler 的な微分によって，

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T$$

と表現できる．ここで，$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$ が空気塊の温度変化率であり，$\frac{\partial T}{\partial t}$ が観測地点における温度変化率である．いま，問題より $\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = 0$ なので，観測地点における温度変化率は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T$$

と温度移流で決まる．北向きを y 座標の正の向きとすると北風は $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{j}$，$v = -10\,\mathrm{m/s^2}$ と表現できる．一方，温度勾配は北に行くほど温度が下がるので，$\boldsymbol{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{j}$，$\frac{\partial T}{\partial y} = -3\,\mathrm{K}/50\,\mathrm{km}$ である．したがって

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T = -6.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{K/s} = -2.2\,\mathrm{K/h}$$

北半球に住んでいる我々にとって，一般に北に行くほど温度は下がっており，日常経験によると，「北風が吹くと冷たいもしくは寒い」，のであるが，上の例はそのような状況をまさに表現している．