第 3 章

流体力学の基礎方程式

本節では, 流体の運動を記述するために必要な方程式系, 即ち, 流体力学の基礎方程式, について述べる. 流体力学の基礎方程式は, 3 つの保存則, **質量保存則**, **運動量保存則**, **エネルギー保存則**を具体的に数式で書き表したものである.

キーワード: 流体力学の基礎方程式, 連続の式, 運動方程式 (Euler の方程式, Naviewr–Stokes 方程式), エネルギー方程式

3.1 連続の式

流体は不生不滅である（流体の質量が保存される）ことを具体的に書き表した数式が**連続の式** (equation of continuity) である. 先ず Lagrange 的立場から連続の式を導く. 続いて Euler 的立場からも同じ方程式が導けることを示す.

3.1.1 Lagrange 的立場からの導出

x, y, z 方向の各辺の長さが δx, δy, δz の微小体積要素 (体積 $\delta V = \delta x\, \delta y\, \delta z$) の流体を考える. Largange 的立場で現象を考えるので, 初期に微小体積要素を構成していた流体粒子を追跡していく. そこで, この微小体積要素は流れに流されつつ形を変えていくであろう. 流体の密度を ρ とすると物質は不生不滅であるから, 流れに伴って質量は変化しない, すなわち

$$\frac{\mathrm{D}(\rho\delta V)}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{3.1}$$

(3.1) を整理すると,

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\frac{\rho}{\delta V}\,\frac{\mathrm{D}\delta V}{\mathrm{D}t} \tag{3.2}$$

となる．右辺は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{D}\delta V}{\mathrm{D}t} &= \frac{1}{\delta x}\frac{\mathrm{D}\delta x}{\mathrm{D}t} + \frac{1}{\delta y}\frac{\mathrm{D}\delta y}{\mathrm{D}t} + \frac{1}{\delta z}\frac{\mathrm{D}\delta z}{\mathrm{D}t} \\ &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と変形できる．[*1] ここで, (u, v, w) は x, y, z 方向の流体の速度である．$\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$, $\delta z \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{\delta x\to 0,\, \delta y\to 0,\, \delta z\to 0} \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{D}\delta V}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{3.4}$$

(3.4) は**体積変化率が速度の発散で与えられる**ことを示している．以上より, 質量保存則 (3.1) は

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{3.5}$$

となる．Lagrange 微分の定義を用いて, (3.5) は以下のように書き直せる：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.6}$$

(3.5), もしくは (3.6) が連続の式, もしくは連続の方程式, である．(3.6) はしばしば **Euler の連続の式**と呼ばれる．[*2]

■ **非圧縮性流体の場合:**　このとき運動中に体積が変化しないので, (3.4) より

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{3.7}$$

となる．

3.1.2　Euler 的立場からの導出

連続の式 (3.6) は Euler 的立場からも以下に示すように導くことができる．Euler 的立場から考えるので, 空間に固定された形を変えない任意の閉曲面 S を考える．S に囲まれた領域を V とする．任意の時刻で V に含まれる質量は,

$$\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

[*1] $\delta x = x_2 - x_1$ として，$\frac{\mathrm{D}\delta x}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}x_2}{\mathrm{D}t} - \frac{\mathrm{D}x_2}{\mathrm{D}t} = u(x_2) - u(x_1) = \delta u$ となる．δy, δz の Lagrange 微分も同様の方法で計算できる．

[*2] (3.6) は Largange 的観点からの考察によって導かれたが, 独立変数を x, y, z, t とする場の変数の偏微分方程式になっているので, Euler 的観点の記述になっている．

である．そこで単位時間あたりの V の質量変化は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

と表せる.*3 いっぽう上記の質量変化は単位時間に V の表面 S を通って V 内に流れ込んだ流体の質量に等しい筈である．単位時間に微小面積 $\mathrm{d}S$ を通過する流体の質量は, 底面 $\mathrm{d}S$, 高さ v_n の円柱に含まれる流体の質量に等しい．ここで, v_n は流速 $\boldsymbol{v}$ の微小面積に垂直な成分で $v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ である (図 3.1 参照)．そこで, 単位時間に S を通って V 内に流れ込んだ流体の質量は

$$-\iint_{\mathrm{S}} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -\iiint_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\;\mathrm{d}V$$

である．ここで S の表面に立てられた法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外向きであるため, 流れ込む流体に対しては負符号が付くことに注意せよ．また右辺への変形に Gauss の発散定理を用いた．以上の考察から質量保存則は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}} \rho\,\mathrm{d}V = -\iiint_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\;\mathrm{d}V.$$

または,

$$\iiint_{\mathrm{V}} \left\{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right\}\mathrm{d}V = 0, \tag{3.8}$$

と表せる．(3.8) は積分形の質量保存則である．領域 V は任意なので, 上式が恒等的に成り立つためには被積分関数は 0 でなければならない．したがって, 質量保存則は微分形で

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{3.9}$$

となる．つまり, Euler 的立場からも Lagrange 的立場から得られたものと同じ方程式が導かれた．(3.9) の左辺第 2 項, $\rho\boldsymbol{v}$ は質量流束（質量フラックス）と呼ばれ, 単位時間・単位面積あたりを通過する質量を表す．(3.9) は, 質量が保存されるならば, ある点における密度の時間変化は, 質量フラックスの収束・発散に等しいことを表している．

3.2　運動方程式

“物体の運動量の時間変化率は, それに作用している力の総和に等しい”, という Newton の第二法則を流体に対して適用し, 具体的に書き表した数式がここで述べる運動方程式で

*3 $\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$ はもはや空間に対して積分を行い, 時間のみの関数になっているので, この量の時間微分は常微分で表される．

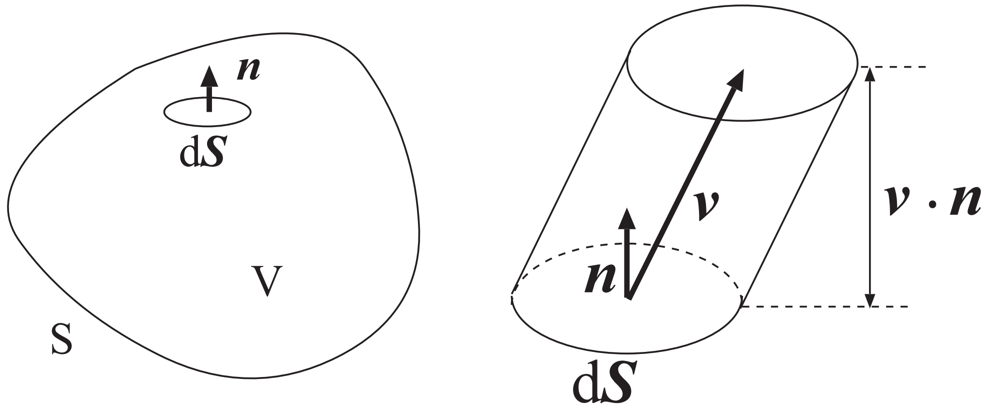

図 3.1　質量保存則を適用する任意の体積 V と単位時間あたり微小面積領域 dS を通過する流体の体積.

ある. 前章と同様に先ず Lagrange 的立場から運動方程式を導出する. つぎに Euler 的立場からも同じ方程式が導出できることを示す.

3.2.1　Lagrange 的立場からの導出

3.1.1 節と同様に, 流体中に各辺の長さが δx, δy, δz で体積 $\delta V = \delta x\delta y\delta z$ を持つ微小体積要素を考える. Newton の第二法則によれば, 微小体積要素の運動量の時間変化は, それに働く力の総和に等しい. ここで, 微小体積要素に働く力には面積力（応力）と体積力がある. 単位質量当たりの微小体積要素に働く体積力を $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$ とする.

応力に伴って微小体積要素に働く力は, 以下のように書ける. まず, x 方向に働く応力を考える. x 方向に働く応力は, x 軸に垂直な面に働く法線応力 τ_{xx} と y, z 軸に垂直な面に働く接線応力 τ_{xy}, τ_{xz} である. 今, 微小体積要素の中心を (x, y, z) とすると, x 軸に垂直な平面に働く法線応力に伴う力は,

$$\left\{\tau_{xx}(x + \frac{1}{2}\delta x, y, z) - \tau_{xx}(x - \frac{1}{2}\delta x, y, z)\right\}\delta y\delta z \tag{3.10}$$

である. $\delta y\delta z$ は x 軸に垂直な面の面積を表す. また $\{...\}$ 内の第 1, 2 項はそれぞれ面の中心が $(x + \frac{1}{2}\delta x, y, z)$, $(x - \frac{1}{2}\delta x, y, z)$ にある面に働く応力である. さらに $\{...\}$ 内の第 2 項の符号が逆符号なのは, 応力の定義より, 面の中心が $(x - \frac{1}{2}\delta x, y, z)$ に位置する面を通じて作用する応力は, 面の正の側から負の側に働く応力が $\tau_{xx}(x - \frac{1}{2}\delta x, y, z)$ に対し, 今は $(x,\ y,\ z)$ に中心がある微小体積要素に働く応力, 即ち, 面の負の側にある流体が正の側にある流体に及ぼす応力を考えるので, 作用反作用の法則 (1.1) により $-\tau_{xx}(x - \frac{1}{2}\delta x, y, z)$

となる．今, δx, δy, δz が微小であるとき, Taylor 展開により (3.10) は

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\delta x \delta y \delta z \tag{3.11}$$

となる．同様な考察により, y 軸に垂直な平面に働く x 方向の応力 τ_{xy} は

$$\left\{\tau_{xy}(x, y+\frac{1}{2}\delta y, z) - \tau_{xy}(x, y-\frac{1}{2}\delta y, z)\right\}\delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\delta x \delta y \delta z, \tag{3.12}$$

z 軸に垂直な平面に働く x 方向の応力 τ_{xz} は

$$\left\{\tau_{xz}(x, y, z+\frac{1}{2}\delta z) - \tau_{xz}(x, y, z-\frac{1}{2}\delta z)\right\}\delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\delta x \delta y \delta z \tag{3.13}$$

となる．以上をまとめると

$$\frac{\mathrm{D}(\rho \delta V u)}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)\delta V + \rho \delta V F_x. \tag{3.14}$$

質量保存則 (3.1) を考慮すると,

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) + F_x. \tag{3.15a}$$

同様に, y, z 方向の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) + F_y, \tag{3.15b}$$

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + F_z, \tag{3.15c}$$

と書ける．Lagrange 微分を Euler 微分で書き直し, さらに和の規約を使って表現すると

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i. \tag{3.16}$$

である．連続の式 (3.6) を考慮すると運動量密度 $\rho \boldsymbol{v}$ に関する式

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i. \tag{3.17}$$

に書き直せる．

(3.16) もしくは (3.17) が流体力学の運動方程式のもっとも一般的な形である．流体の種類により応力テンソルの表現が変わるので, 流体の種類（構成方程式）ごとに運動方程式は異なる．ここでは代表的な二つの流体の運動方程式を紹介する．

■ Newton 流体の場合：　応力テンソルが (2.17) で表される Newton 流体では, 運動方程式 (3.16) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda e_{jj}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu e_{ij}) + F_i, \tag{3.18}$$

となる. 温度や圧力によって μ や λ は変化するが, 変化が小さい場合にはそれらは定数と見なせて運動方程式 (3.18) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}(\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i, \tag{3.19a}$$

ベクトル形式では

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}(\mu+\lambda)\nabla\{(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\} + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}, \tag{3.19b}$$

と書ける. ここで $\nu = \mu/\rho$ は動粘性率もしくは動粘性係数 (coefficient of kinematic viscosity) と呼ばれる. (3.19) は **Navier-Stokes 方程式** (Navier-Stokes equation) と呼ばれ, 実在の多くの流体の運動を極めてよく記述する方程式である. さらに非圧縮性 (3.7) が満たされる場合には

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}, \tag{3.20}$$

となる. 連続の式 (3.6) を考慮すると

$$\frac{\partial \rho\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = -\nabla p + \rho\nu\Delta\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{F}, \tag{3.21}$$

となる.[*4]

(3.21) の各項の意味は以下のとおりである. ある固定された場所（点）での運動量の時間変化 ((3.21) の左辺第 1 項) は 4 つの作用によって起こる:

- もしくは運動量流速の収束・発散 ((3.21) の左辺第 2 項)
- 圧力傾度力 ((3.21) の右辺第 1 項): 流体に圧力が働いているだけでは, 流体は加速, 減速しない. 圧力に勾配 (空間的な差異) があって初めて実質的な力となる. 流体は圧力の下向き勾配 (down gradient) の方向 (圧力の高い方向から低い方向) に加速される.

[*4] (3.21) の左辺第 2 項はテンソル形式では, $\frac{\partial}{\partial x_j}\rho v_i v_j$ と表記される.

- 粘性力 ((3.21) の右辺第 2 項): 粘性の作用は速度に空間的なムラが存在したとき, それを拡散的に平均化する.*5
- 外力項 ((3.21) の右辺第 3 項)

■非粘性流体の場合: 流体の粘性 μ, λ がゼロである理想的な流体は, 非粘性流体と呼ばれる. このとき (3.16) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i, \tag{3.22}$$

と書ける. また, ベクトル形式では

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{F}, \tag{3.23}$$

である. 非粘性流体の運動方程式は **Euler の方程式**と呼ばれる.

3.2.2 Euler 的立場からの導出

ここでは表記に和の規約を用いる. 空間に固定された閉曲面 S を考える. S に囲まれた領域を V とする. V に含まれる流体が持つ i 方向の運動量は $\int_{\mathrm{V}} \rho\, v_i \,\mathrm{d}V$ である. したがって, 単位時間あたり V に含まれる流体の運動量の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}} \rho\, v_i \,\mathrm{d}V$$

である.

考える流体に作用する力は体積力と面積力である. i 方向に働く面積力は応力テンソル τ_{ij} を用いて,

$$\iint_{\mathrm{S}} \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S$$

と表せる. また単位質量あたりの微小体積要素に働く i 方向の体積力を F_i とすると V に働く i 方向の体積力は

$$\iiint_{\mathrm{V}} \rho F_i \,\mathrm{d}V$$

と表せる.

---

*5 もし, 移流項, 圧力傾度力項, 外力項がゼロであれば, (3.21) は速度 $\boldsymbol{v}$ の拡散方程式となることに注意. 拡散方程式については, 地球惑星科学基礎 III を参照のこと.

上記の効果以外に流体が運動量を携帯して S を通じて V 内に流入する効果がある．すなわち流体が “流れる” ことに起因した項がさらに付加される．これは Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により，

$$-\iint_{\mathrm{S}} (\rho v_i)\ v_j n_j \,\mathrm{d}S$$

と表せる.[*6]　以上の議論から V 内の運動量の時間変化は, V に働く体積力, S に作用する面積力と S を通じて V 内に流れ込む運動量との総和に等しい．したがって,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}} \rho\, v_i \,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathrm{V}} \rho F_i \,\mathrm{d}V + \iint_{\mathrm{S}} \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S - \iint_{\mathrm{S}} (\rho v_i)\ v_j n_j \,\mathrm{d}S. \quad (3.24)$$

上式右辺第二項と第三項を Gauss の定理を用いて変形する．このとき, これらは

$$\iint_{\mathrm{S}} \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S - \iint_{\mathrm{S}} (\rho v_i)\ v_j n_j \,\mathrm{d}S = \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij} - \rho v_i v_j\right) \mathrm{d}V$$

と書き換えられる．したがって (3.24) は

$$\iiint_{\mathrm{V}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) - \rho F_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) \right\} \mathrm{d}V = 0 \quad (3.25)$$

となる．ここで V が任意であることを考慮すると, 上式の被積分関数はゼロでなければならない．したがって, 微分形の運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.26)$$

が得られる．

さらにこの方程式を書き換える．(3.26) の左辺を展開する:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = v_i \frac{\partial}{\partial t}\rho + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j).$$

このうち第一式右辺第一項と第二式右辺第二項は連続の方程式 (3.9) より相殺される．そこで (3.26) は

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i,$$

となる．上式を密度 ρ で両辺を割ると (3.16) を得る．つまり, Euler 的な考察からも Lagrange 的考察からも同じ運動方程式を導くことができた．

[*6] 図 3.1 参照．連続の式の導出では, V の表面を通じて流入する流体の質量を考えたので, 微小体積 $v_n \mathrm{d}S$ に密度を乗じた．ここでは運動量保存則を考えるので, V の表面を通じて流入する流体の運動量は, 微小体積 $v_n \mathrm{d}S$ に運動量密度 $\rho\boldsymbol{v}$ を乗ずればよい．

3.3　エネルギー論

前節で導いた運動方程式から, 運動エネルギーに関する方程式を導出してみる. 前節と同様に和の規約を用いることにする. (3.16) に ρv_i を乗じると,

$$\rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i F_i,$$

上式左辺は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v_i v_j\right) - \frac{1}{2} v_i v_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}\right)}_{\text{連続の式よりゼロ}}$$

と表現できる. 次に右辺第一項は,

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial\left(\tau_{ij} v_i\right)}{\partial x_j} - \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial\left(\tau_{ij} v_i\right)}{\partial x_j} - \tau_{ij} e_{ij}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

上式の最後の表現には τ_{ij} が対称テンソルである $(\tau_{ij} = \tau_{ji})$ ことを用いた. したがって, 単位質量あたりの運動エネルギーを $\mathcal{T} = \frac{1}{2} v_i v_i$ とすると, その発展方程式は

$$\frac{\partial\left(\rho \mathcal{T}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho \mathcal{T} v_j\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\tau_{ij} v_i\right)}{\partial x_j} + \rho v_i F_i - \tau_{ij} e_{ij}, \tag{3.28}$$

となる.

質点系の力学では力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルとの和）が保存される. 一方, 流体力学では, たとえ微小体積要素に働く外力 $\boldsymbol{F}$ がゼロであっても (ポテンシャルからの寄与はこの項から生じる), 微小体積要素の力学的エネルギーは保存しないことに注意するべきである. 力学的エネルギーのみでは保存則は成立せず, 力学的エネルギーと内部エネルギーの和が保存するのである. (3.28) の右辺最終項が, 運動エネルギーと内部エネルギーとの間の変換を表す項になっている. このことは, 応力テンソル τ_{ij} を具体的に表現すると分かりやすい.

■ Newton 流体の場合：　構成方程式が (2.16) で与えられる Newton 流体では,

$$\begin{aligned} \tau_{ij} e_{ij} &= -p e_{ii} + \lambda e_{ii} e_{jj} + 2\mu e_{ij} e_{ij} \\ &= -p e_{ii} + \Phi \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\Phi \equiv \lambda e_{ii}^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij}, \tag{3.30}$$

を用いることによって, (3.28) は

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\rho\mathcal{T}+p-\lambda e_{ii})\,v_j-2\mu e_{ij}v_i\right\}=\rho v_iF_i+pe_{ii}-\Phi \tag{3.31}$$

と書ける. Φ は散逸関数 (dissipation function) と呼ばれ, 正の量である. これは粘性の効果による運動エネルギーの散逸を表している. この散逸された運動エネルギーは熱力学的エネルギーの方程式の加熱項になる. このことは熱力学的エネルギーの方程式の導出の際にもう一度振り返ることにする.

■ **非粘性流体の場合：**　非粘性流体の場合には, $\mu=\lambda=0$ なので, 散逸関数はゼロになり, したがって, (3.31) は

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\mathcal{T}+p)\,v_j}{\partial x_j}=\rho v_iF_i+pe_{ii}, \tag{3.32a}$$

もしくはベクトル形式で

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t}+\nabla\cdot\{(\rho\mathcal{T}+p)\,\boldsymbol{v}\}=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}+p\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{3.32b}$$

となる. (3.32b) の右辺最終項は圧力と体積の変化との積である. 熱力学によるとそれは系がされた（もしくは系がした）仕事である. 熱力学の第一法則は内部エネルギーの変化は系に加えられた熱量と系がされた（/された）仕事の和として書けるので, したがって, (3.32b) の右辺最終項を通じて運動エネルギーの式が内部エネルギーとつながることがわかる.

3.4　熱力学的エネルギーの方程式

"系の内部エネルギーと運動エネルギーとの和の時間変化率は, その系に流入する内部エネルギー, 運動エネルギー, 熱流の和, 系に働く力がする仕事, さらに系内の熱源による加熱に等しいという", というエネルギー保存則を具体的に書き表した数式がここで述べるエネルギー方程式である. Euler 的立場からの導出を行う.

空間に固定された閉曲面 S を考える. S に囲まれた領域を V とする. V に含まれる流体が持つ内部エネルギーと運動エネルギーの和 (全エネルギー) は $\int_V \rho\,(\mathcal{T}+\mathcal{U})\;\mathrm{d}V$ である. ここで, 単位質量あたりの運動エネルギーと内部エネルギーをそれぞれ $\mathcal{T},\mathcal{U}$ と表した. 単位時間あたり V に含まれる流体の全エネルギーの時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}}\rho\,(\mathcal{T}+\mathcal{U})\;\mathrm{d}V$$

である．考える流体に作用する力は体積力と面積力である．体積力と面積力が系 V にする仕事は, 単位時間当たり

$$\iiint_{\mathrm{V}} \rho v_i F_i \,\mathrm{d}V + \iint_S v_i \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S$$

と表せる.[*7]　S を通じて V 内に流入する全エネルギーは, Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により,

$$-\iint_S \{\rho\,(\mathcal{T}+\mathcal{U})\}\; v_j n_j \,\mathrm{d}S \tag{3.33}$$

と表せる．さらに, 流体内の温度が一様でないとき, 流体の運動とは無関係に熱の移動が起こる．これは**熱伝導** (thermal diffusivity) と呼ばれ, 流体を構成する原子・分子の熱的振動に伴って発生する現象である．熱伝導に伴う熱流 $\boldsymbol{\theta}$ は S を通じて V 内に流入する．この効果は

$$-\iint_S \theta_j n_j \,\mathrm{d}S \tag{3.34}$$

と表せる.[*8]

また, 単位質量あたりの流体の加熱率を J とする．このときエネルギー保存則より V 内のエネルギーの時間変化は, V に働く体積力がする仕事, S を通じて作用する面積力がする仕事, S を通じて V 内に流れ込む全エネルギーと熱伝導に伴う熱流, さらに系内の熱源による加熱率の総和に等しいので,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}} \rho\;(\mathcal{T}+\mathcal{U})\;\mathrm{d}V = &\iiint_{\mathrm{V}} \rho v_i F_i \,\mathrm{d}V + \iint_S v_i \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S \\ &-\iint_S \left[\{\rho\,(\mathcal{T}+\mathcal{U})\}\, v_j + \theta_j\right] n_j \,\mathrm{d}S \\ &+\iiint_{\mathrm{V}} \rho J \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{3.36}$$

上式右辺第二, 三項を Gauss の定理を用いて変形すると

$$-\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\mathcal{T} v_j + \rho\mathcal{U} v_j - v_i\tau_{ij} + \theta_j\right)\,\mathrm{d}V \tag{3.37}$$

[*7] 物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働いている時に, その物体を $\boldsymbol{r}$ だけ動かすのに要する仕事は, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ である.

[*8] 温度勾配があまり大きな値をとらない範囲では, 熱伝導は **Fourier の法則**によってよく記述できる．Fourier の法則は

$$\boldsymbol{\theta} = -\kappa\nabla T \tag{3.35}$$

と表せる．κ は**熱伝導率**と呼ばれる．Fourier の法則は, 隣り合った流体間の温度差に比例した量の熱流が流れることを意味している.

と書き換えられる．したがって V が任意であることを考慮すると, 微分形のエネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\mathcal{T}+\mathcal{U}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\rho\left(\mathcal{T}+\mathcal{U}\right)v_j\right\}=\frac{\partial\left(v_i\tau_{ij}\right)}{\partial x_j}-\frac{\partial\theta_j}{\partial x_j}+\rho v_iF_i+\rho J \quad (3.38)$$

となる．力学的エネルギーの方程式 (3.28) を (3.38) から引くと, 単位体積あたりの内部エネルギーに関する方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\mathcal{U}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\rho\mathcal{U}\right)v_j\right\}=\tau_{ij}e_{ij}-\frac{\partial\theta_j}{\partial x_j}+\rho J \quad (3.39)$$

が得られる．さらに連続の式を考慮すると, (3.39) は Lagrang 微分を用いて

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{U}}{\mathrm{D}t}=\frac{1}{\rho}\tau_{ij}e_{ij}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_j}{\partial x_j}+J \quad (3.40)$$

となる．

■ Newton 流体の場合：　Newton 流体の場合には, (3.40) の右辺第一項は (3.29) と連続の式から

$$e_{ii}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}$$

を用いることにより, (3.40) は

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{U}}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\Phi-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}+J \quad (3.41)$$

と書ける．熱流や粘性による運動エネルギーの散逸を含めて加熱項 J と見做すと (3.41) は, 熱力学の第一法則 $\delta U+p\delta(\frac{1}{\rho})=Q$ において, 熱力学的な状態の変化が単位時間に起こったと考えて δ の記号を **Lagrange** 微分 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ で置き換えたものと同じ形式になっている．

■ 非粘性流体の場合：　非粘性流体の場合には, 熱力学的エネルギー方程式は, (3.41) において $\Phi=0$ とした

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{U}}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}+J \quad (3.42)$$

となる．

3.5　まとめ

本章で導出した基礎方程式をまとめる．

3.5.1　最も一般的な基礎方程式系

連続の式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

ここで, ρ, $\boldsymbol{v}$ はそれぞれ密度と流速である.

運動方程式 (和の規約を用いた表現)：

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i.$$

ここで, τ_{ij} は応力テンソル, $\boldsymbol{F} = F_i \boldsymbol{e}_i$ は単位質量の流体に働く体積力である. 応力テンソルを速度などで表現する式は構成方程式と呼ばれ, 流体の種類によって異なる.

熱力学的エネルギー方程式 (和の規約を用いた表現)：

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{U}}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} e_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + J.$$

ここで, $\mathcal{U}$ は単位質量あたりの内部エネルギーで, $\boldsymbol{\theta} = \theta_i \boldsymbol{e}_i$ は熱流, e_{ij} はひずみ速度テンソル $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$, J は単位質量あたりの流体の加熱率である. 応力テンソルのように, 熱流 $\boldsymbol{\theta}$ の表現も流体の種類により異なる.

3.5.2　Newton 流体

応力テンソル τ_{ij} がひずみ速度テンソルで表現されるような Newoton 流体の場合の基礎方程式系は以下の通りである.

連続の式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

運動方程式 (和の規約を用いた表現)：

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} \underbrace{+ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{\text{移流項}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{圧力傾度力項}} \underbrace{+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda e_{jj}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu e_{ij})}_{\text{粘性力項}} \underbrace{+ F_i}_{\text{外力項}}.$$

ここで, p は圧力, μ , λ は粘性率である. μ, λ が定数と見なせる場合には, 上式は Navier–Stokes 方程式と呼ばれる. さらに非圧縮性が仮定される場合には, 粘性力項は速度の拡散 $\frac{\mu}{\rho} \Delta \boldsymbol{v}$ の形に書き下すことができる. 一方, 非粘性流体 ($\mu = \lambda = 0$) の運動方程式は Euler の方程式と呼ばれる.

熱力学的エネルギー方程式：

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{U}}{\mathrm{D}t} + p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\theta} + J.$$

ここで, $\Phi = \lambda e_{jj}^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij}$ は散逸関数であり, 粘性による運動エネルギーの散逸を表し, 熱力学的エネルギー方程式の加熱項としての役割を果たす.

演習問題

1. (3.5) は (3.6) と書けることを確かめなさい.
2. 和の規約を用いて, 連続の式 (3.9) を表現しなさい.
3. 体積 δV の微小な流体要素を考える. この微小体積のもつ物理量 A が Lagrange 的な保存則に従う $\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} = 0$ とする. このとき, A の単位質量あたりの量 $a \equiv \frac{A}{\rho\delta V}$ は Lagrange 的な保存則 $\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t} = 0$ に従い, 一方, 単位体積あたりの量 $\tilde{a} \equiv \frac{A}{\delta V}$ はフラックス形式の保存則 $\frac{\partial\tilde{a}}{\partial t} + \nabla\cdot(\tilde{a}\boldsymbol{v}) = 0$ に従うことを確かめなさい.