

エネルギー保存則に関するノート

岩山隆寛

2013 年 12 月 6 日配布

1 本稿の目的

テキストでは応力テンソルを含む一般的な支配方程式に関してエネルギー保存則を議論した。ここでは、数学的に最も簡単な非粘性流体の場合についてエネルギー保存則を議論し、流体力学の基礎方程式の一つである熱力学的エネルギー方程式の導出を行う。

2 予備知識と問題設定

2.1 基礎方程式系

質量保存則を具体的に書き下した連続の式,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \text{もしくは,} \quad \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right), \quad (1)$$

と非粘性流体の運動方程式 (Euler 方程式), ただし外力はポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ から導かれるものとする,*¹

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi, \quad (2)$$

を議論の出発点とする。

連続の式 (1) と運動方程式 (2) は未知変数が (3 次元空間では)5 個, $\rho, p, \mathbf{v}$ に対して, 方程式は 4 本しかなく数学的に閉じていない。そこで, これらの方程式とは独立な 1 つの方程式が流体力学の基礎方程式として必要である。その最後の一つがエネルギー保存則に対応した熱力学的エネルギー方程式である。

*¹ Φ は空間のみの関数で時間は含まない。

2.2 領域

ここでは流体の存在する領域は、単連結領域（領域の中に「島」がない）で流体は無限の領域に広がっている、もしくは固体壁で囲われているとする。

課題 1: 単連結領域, 多重連結領域について調べなさい。

3 力学的エネルギーの発展方程式

3.1 動機

質点系の力学の知識によると、ポテンシャル中を運動する質点の運動方程式に速度を乗じると力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルの和）の保存則が導かれる。流体力学において同様な操作を行うと力学的エネルギー保存則が得られるかどうか調べてみる。

3.2 具体的な計算

運動方程式 (2) に密度 ρ をかけ、さらに速度場との内積を取ると、

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi, \quad (3)$$

となる。ここで、連続の式 (1) を考慮すると、(3) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi, \quad (4)$$

となる。さらに Φ は時間を含まない量なので、 $\partial \Phi / \partial t = 0$ に注意し、再び連続の式を用いることにより、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right) \mathbf{v} \right\} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p, \quad (5)$$

を得る。さらに (5) の右辺を変形して整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \right\} = p \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (6)$$

を得る。(6) は力学的エネルギー密度（単位体積当たりの力学的エネルギー）の発展方程式である。

(6) を流体の存在する領域にわたって体積積分する。このとき、(6) の左辺第 2 項は Gauss の発散定理によって領域の境界面での面積積分に置き換えることができる：

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right) \right\} dV + \int_{\partial V} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \right\} \cdot d\mathbf{S} = \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \quad (7)$$

流体の存在する領域が無限の領域で、無限遠方で適当な減衰条件 $\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{v} = 0$ が課されている、もしくは流体が固体壁で囲まれている場合には、固体壁を通過する流れはないので固体壁に垂直な流れの成分はゼロ ($\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$) である。このような場合、(7) の左辺第 2 項はゼロとなり、(7) の左辺は運動エネルギーとポテンシャルの和の時間変化率になる：

$$\frac{d}{dt} \int_V \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right) \right\} dV = \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \quad (8)$$

課題 2: (4) から (5) を導出しなさい。

3.3 結論と考察

(8) の右辺は一般にゼロではない。そこで、流体の場合にはたとえ非粘性流体であっても*2力学的エネルギーは保存しない。

(8) の右辺の意味について考える。連続の式を Lagrange 的な観点から導出するときに

$$\lim_{\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt} \delta V = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (9)$$

が導かれた。この式は、速度の発散は流体の単位体積当たりの体積の変化率であることを示している。したがって、(8) の右辺第 2 項は、流体の体積変化率と圧力の積とみなせる。熱力学を思い出すと、圧力と体積変化の積は系にした（もしくは系がされた）仕事であり、その仕事によって系の内部エネルギーは変化する。そこで、(8) の右辺は内部エネルギーの変化率と結びつくことが推察される。(8) の右辺は運動方程式の圧力勾配力項から生じた項である。つまり流体の場合には圧力勾配力項の存在のために力学的エネルギーと内部エネルギーとの間で変換が起こるのである。

*2 粘性流体であれば粘性による力学的エネルギーの散逸が起こるはずなので力学的エネルギーが保存しないのは理解できるであろう。

4 熱力学的エネルギー方程式

熱力学の第 1 法則は系の内部エネルギーの変化 $\delta\mathcal{U}$ は系に加えられた熱量 δQ と系にされた仕事 δW に等しいことを主張する. 仕事 δW は

$$\delta W = -p\delta V \quad (10)$$

と表現できるので, したがって熱力学の第 1 法則, 即ち熱力学的エネルギーの式は

$$\delta\mathcal{U} = -p\delta V + \delta Q, \quad (11)$$

である. (9) から単位時間当たり, 単位体積の流体の体積の Lagrange 的变化率が $\nabla \cdot \mathbf{v}$ なので, これを (11) の δV にあたるとすると, $\delta\mathcal{U}$ は単位体積当たりの流体の内部エネルギーの Lagrange 的变化率と解釈することができる. そこでこれを,

$$\delta\mathcal{U} \rightarrow \rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt}, \quad (12)$$

と表す. ($\mathcal{U}$ を単位質量あたりの内部エネルギーとした.) さらに, δQ は単位体積あたりの流体に単位時間に加えられた熱量と解釈することができ, これを ρJ で表す. (J は単位質量あたりの流体の加熱率である.) 即ち,

$$\delta Q \rightarrow \rho J. \quad (13)$$

このように表すと, 熱力学的エネルギーの式 (11) は

$$\rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho J \quad (14)$$

となる.

5 全エネルギー保存則

(14) を (8) に代入して整理すると

$$\frac{d}{dt} \int_V \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi + \mathcal{U} \right) \right\} dV = \int_V \rho J dV \quad (15)$$

が得られる. もし, 流体の運動が断熱的に起こるのであれば $J = 0$ なので, (15) は,

$$\frac{d}{dt} \int_V \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi + \mathcal{U} \right) \right\} dV = 0, \quad (16)$$

即ち, 力学的エネルギーと内部エネルギーの和 (全エネルギー)

$$\int_V \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi + \mathcal{U} \right) \right\} dV, \quad (17)$$

は保存される.

課題 3: (8) に (14) を代入して (15) を導出しなさい.

6 再び熱力学的エネルギー方程式

熱力学的エネルギー方程式 (14) を密度 ρ で割り, 連続の式 (1) を用いて速度の発散を密度の Lagrange 微分で書き換えると, 単位質量あたりの流体の熱力学的エネルギー方程式

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} = J \quad (18)$$

を得る. 比容 (specific volume: 単位質量あたりの体積) $\alpha \equiv 1/\rho$ を導入すると, (18) は

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = J \quad (19)$$

と書くことができる. (19) はなじみの形式の熱力学的エネルギー方程式である. (熱力学における δ を D/Dt で置き換えた形式になっている.)

課題 4: (14) から (18) を導出しなさい.

7 まとめ

質量保存則, 運動量保存則を具体的に数式で書きあわすことにより, 流体力学の基礎方程式である連続の式, 運動方程式が導かれる. 本来であれば全エネルギーの保存則を具体的に数式で書き表すことにより, 流体力学の基礎方程式のエネルギー方程式 (熱力学的エネルギー方程式) を導出するべきである. しかし, 本稿では議論を逆にして, 運動エネルギーの式と連続の式, 熱力学の第 1 法則から流体力学における熱力学的エネルギー方程式 (14) を推察し, それが全エネルギー保存則と矛盾しないことを示した.

最後に非粘性流体における流体力学の基礎方程式をまとめておく:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F}, \quad (21)$$

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = J, \quad (22)$$

ここで, $\mathbf{F}$ は単位質量あたりの流体に働く外力である.

8 宿題

本文中にある課題 1~4 を****までにレポートにまとめて提出してください. 質問は遠慮なくしてください. 電子メール (iwayama@kobe-u.ac.jp 宛) で問い合わせるか, 直接居室 (自然科学総合研究棟 3 号館 502 号室) に訪ねてきてくれてもいいです.