

第 7 章

回転系上の運動方程式

基礎方程式のうち、地球の自転の効果によって変更を受けるのは運動方程式のみである。そこで、本章の議論は運動方程式のみに限定する。さらに話を簡単化するために、流体は非粘性とする。^{*1}

7.1 Coriolis の力

Newton の第一法則の状況を考える。^{*2} すなわち、単位質量の物体が慣性系 ($Oxyz$ 系, 単位ベクトル i, j, k) では何の力の影響も受けずに運動しているとする。すなわち、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0. \quad (7.1)$$

この現象を z 軸を回転軸として一定の角速度 Ω で回転している座標系 ($Ox'y'z'$ 系, 単位ベクトル i', j', k') から眺める。

位置ベクトル \mathbf{r} は 2 つの座標系で

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ &= x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (7.2)$$

^{*1} Newton 流体を考察する場合には、粘性力項は全て外力 \mathcal{K} に含まれていると考えれば、本節の議論は粘性流体にも適用できる。極座標系における粘性力項の表現は、例えば Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics. 2nd. Ed. Pergamon Press. 1987. p.48 - 49.* を参照のこと。 β 平面近似方程式における粘性力項の表現は、デカルト座標系における表現と一緒にある。

^{*2} Newton の第一法則とは慣性の法則とも呼ばれ、“すべての物体は力が働いていなければ静止状態、又は等速直線運動を保つ”ことを述べている。Newton の法則は絶対静止系での観測を仮定している。今ある座標系 $Oxyz$ で Newton の第一法則が成り立っているとする。このとき $Oxyz$ に対して等速で運動する座標系 $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ でも Newton の法則が成り立つ。このような座標系 $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ を慣性系という。

と表現できる. また2つの座標系における単位ベクトルの関係は図7.1より

$$\mathbf{i}' = \cos \Omega t \mathbf{i} + \sin \Omega t \mathbf{j}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{j}' = -\sin \Omega t \mathbf{i} + \cos \Omega t \mathbf{j}, \quad (7.4)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad (7.5)$$

である.

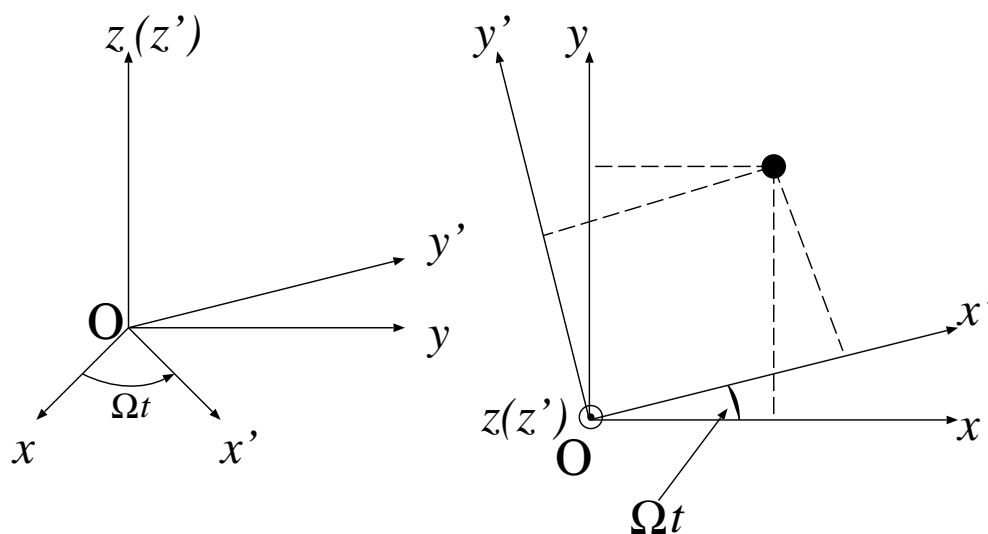


図7.1 Oxyz系とOx'y'z'系の関係. 左の図は, z軸の正の方向から座標系を眺めた場合の図.

位置ベクトル \mathbf{r} の時間微分は次式のように与えられる:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}, \\ &= \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

ベクトルの微分に関する極めて重要な注意: (7.6)の第一の表現は極めて自然であるように見える。「ベクトルの微分は, ベクトルの各成分に対して微分が作用し, 単位ベクトルには微分は作用しない」, とおそらく習ってきているのではないだろうか.

しかしながら微分の chain rule に従うならば, (7.6)の第一の表現において,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (7.7)$$

となるはずである. なぜ, 単位ベクトルの微分は現れないのか. それはデカルト座標系では単位ベクトルは大きさも向きも変化しない座標系であるからである. そこで(7.6)の第一の表現において, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} の時間微分はゼロである. しかしながら, 回転座標系の単位ベクトルは, 慣性系から眺めたときには時間と共にその向きを変化

させている。そこで、(7.6) の第 2 の表現では単位ベクトルの時間微分が残っているのである。

このことから、ベクトルを微分する場合にはどの座標系で眺めた微分なのかをきちんと区別しておく必要がある。ここでは微分に添え字をつけることによってどの座標系で現象を観測した場合の微分なのかを明示することにする。(7.6) の微分は慣性座標系の単位ベクトルの微分を伴わないものなので、慣性系の時間微分と解釈すべきである。そこでこれを

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (7.8)$$

と表す。一方、回転座標系で現象を眺めたときの時間微分は、回転座標系の単位ベクトルの時間微分を伴わない。そこで

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \quad (7.9)$$

である。

もし高校数学で教わっていたようにベクトル \mathbf{r} を (x, y, z) や (x', y', z') と表現していたならば、このように単位ベクトルを微分することに気づかない可能性がある。そこで、高校数学で習っていたようなベクトルの成分表示はできるだけやめて、ベクトルの単位ベクトルを用いた表現を使用したほうがよい。^{*3}

(7.6) の最後の表式の第 4~6 項は $Ox'y'z'$ 系が $Oxyz$ 系に対して回転しているために、 $Ox'y'z'$ 系の単位ベクトルの向きが変化することを表している。回転系の単位ベクトルの時間微分は (7.3), (7.4) より、

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_I = -\Omega \sin \Omega t \mathbf{i} + \Omega \cos \Omega t \mathbf{j} = \Omega \mathbf{j}', \quad (7.10)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_I = -\Omega \cos \Omega t \mathbf{i} - \Omega \sin \Omega t \mathbf{j} = -\Omega \mathbf{i}', \quad (7.11)$$

となる。したがって

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R + \Omega(x' \mathbf{j}' - y' \mathbf{i}')$$

を得る。角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ を導入すると上式は、ベクトル形式で

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (7.12)$$

^{*3} 単位ベクトルの微分は、座標系が回転している場合だけでなく、円柱座標系や極座標系のような曲線直交座標系で表現されたベクトル場の微分の際にも現れる。7.3 節や第 8 章参照。

と書き換えられる.

これまでは, 位置ベクトル r の慣性系での時間微分と回転系での時間微分の関係式を議論してきたが, 一般に, 任意のベクトルに対し慣性系における時間微分と慣性系に対して一定の回転角速度 Ω で回転する回転系における時間微分との間には

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_I = \left(\frac{d}{dt}\right)_R + \Omega \times \quad (7.13)$$

の関係が導ける.*4 (7.12) の左辺は慣性座標系における速度, 右辺第1項は回転座標系における速度 (回転座標系に相対的な速度) と解釈できる. そこで, これらをそれぞれ v, v' と表すことにする:

$$v = v' + \Omega \times r. \quad (7.14)$$

(7.13) を (7.14) のそれぞれの辺に作用させると, (ここで, Ω は定ベクトルであることに注意する)

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dt}\right)_I &= \left\{ \left(\frac{d}{dt}\right)_R + \Omega \times \right\} (v' + \Omega \times r), \\ &= \left(\frac{dv'}{dt}\right)_R + \Omega \times \underbrace{\left(\frac{dr}{dt}\right)_R}_{=v'} + \Omega \times v' + \Omega \times (\Omega \times r), \\ &= \left(\frac{dv'}{dt}\right)_R + 2\Omega \times v' + \Omega \times (\Omega \times r). \end{aligned} \quad (7.15)$$

したがって式 (7.1) は,

$$\left(\frac{dv'}{dt}\right)_R = -2\Omega \times v' - \Omega \times (\Omega \times r) \quad (7.16)$$

となる. すなわち慣性系では物体にはなんの力も作用していなかったが, 回転座標系での現象を眺めると, あたかも物体に力 (式 (7.16) の右辺の二つの項) が働いているように見える. このような力は見かけの力と呼ばれ, それは二つに分類できる. 式 (7.16) の右辺第一項, 第二項はそれぞれ Coriolis の力, 遠心力と呼ばれる.

Coriolis の力の特徴は,

- 回転軸および回転系に相対的な物体の速度に直交する方向に働く. したがってこの力は仕事をしない. (Coriolis 力を \mathcal{K}_{col} とすると, $\mathcal{K}_{col} \cdot dr = 0$.)
- 回転系に相対的な物体の速さに依存した大きさを持つ.

*4 回転軸を z 方向として議論したが, 回転軸が任意の方向のときでも, ベクトル形式で書かれたこの公式は成り立つ.

いっぽう、遠心力の特徴は、

- 回転軸から物体を結ぶ直線上で外向きに働く。
- 回転軸からの距離に依存する大きさを持つ。

7.2 回転系における運動方程式

7.1 節で述べたように、慣性系に対して一定の角速度 Ω で回転している座標系で質点の運動を観測すると、慣性系では存在していなかった見掛けの力（遠心力と Coriolis の力）が物体に働いているように見える。即ち、回転系上の質点の運動方程式を構築するには、慣性系上の質点の運動方程式の加速度 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_I$ を回転系に相対的な速度の回転系上での時間微分 $\left(\frac{dv'}{dt}\right)_R$ に置き換え、質点に働いている力に Coriolis 力と遠心力を付け加えればよい（(7.16) 式参照）。流体力学の場合には、質点の運動に関する時間微分 $\frac{d}{dt}$ に対応するものは Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}$ である。そこで回転系における Euler 的記述の運動方程式は速度 v の Lagrange 微分を次のように置き換えればよいことが分かる：

$$\frac{dv}{dt} \longrightarrow \frac{Dv}{Dt} + 2\Omega \times v + \Omega \times (\Omega \times r). \quad (7.17)$$

ここで 7.1 節で、慣性系で観測される速度と回転系に相対的な速度を区別するために導入した prime, および、慣性系での時間微分と回転系上での時間微分を区別するために導入した添字 R は省略した。したがって、回転系上の Euler 的記述の運動方程式は、Lagrange 微分を Euler 的表記に書き直して

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + 2\Omega \times v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathcal{K} - \Omega \times (\Omega \times r) \quad (7.18)$$

となる。しかしながら、重力と地球の形について考えると、(7.18) 式をもう少し簡単化することができる。

7.3 球座標系

本講義では今までデカルト座標系、即ち、直線座標系を用いて現象を記述してきたが、重力を考察する場合や地球が球である効果をデカルト座標系のような直線座標系の方程式に導入するために、本節と引き続くいくつかの節において曲線座標系を使うことにする。先ず、気象学においてよく用いられる曲線座標系として球座標系について説明する。

球座標系 (λ, ϕ, r) とは、3次元極座標系 (r, θ, ϕ) に類似するものであるが、子午線方向の測りかたを極軸からではなく赤道面から測った座標系である（図 7.2 参照）。ここ

極座標		球座標
r : 動径	\iff	r : 惑星中心からの距離
θ : 余緯度	\iff	ϕ : 緯度, $(\theta + \phi = \frac{\pi}{2})$
ϕ : 方位角	\iff	λ : 経度

表 7.1 極座標と球座標の対応関係

で, λ, ϕ, r はそれぞれ, 経度, 緯度, 動径である. λ, ϕ, r 方向の単位ベクトルはそれぞれ e_λ, e_ϕ, e_r とあらわす. 動径方向の距離は地球の中心からの距離 r の代わりに, 惑星を半径 a の球と仮定し, 地表からの幾何学的高度 $z = r - a$ を用いる場合もある. 特に地球の大気・海洋では実用的見地から動径方向には幾何学的高度を使った方が便利である.

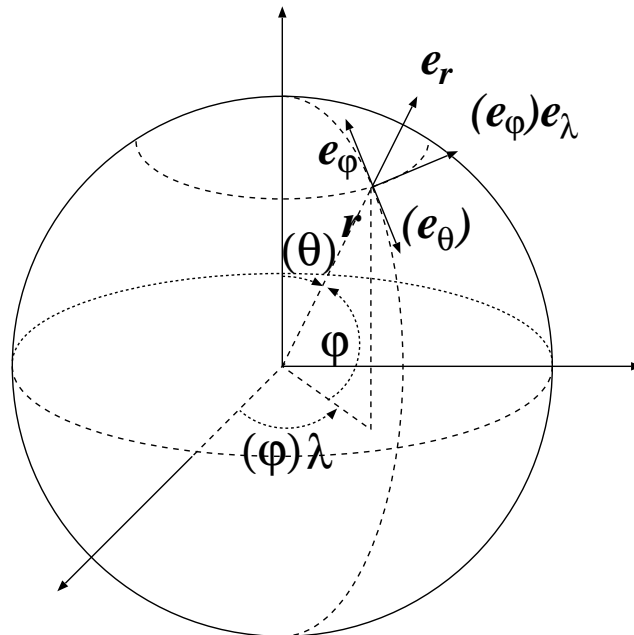


図 7.2 極座標と球座標の関係. 括弧付の量は極座標における量である.

7.4 実効重力

いま地球が半径 a , 一定の角速度 Ω で自転する密度が一様な質量 M の剛体球であると仮定する. 地球上のある緯度 ϕ , 高度 z に単位質量の質点が静止していたとする. このとき地球上で質点を観測すると質点に働く力は, 質点と地球との間に働く万有引力と遠心力である.*5 いまこの 2 つの力の合力を実効重力 (effective gravity) と呼び g で表そ

*5 Coriolis 力は回転系に相対的な速度に比例するので, 今考察している状況で現れて来ない.

う.*6 即ち

$$\mathbf{g} \equiv -\frac{a^2}{(a+z)^2} g^* \mathbf{e}_r + \Omega^2 (a+z) \cos \phi \mathbf{e}_\rho. \quad (7.19)$$

ここで \mathbf{e}_r は球座標系 (λ, ϕ, r) における動径方向の単位ベクトル, \mathbf{e}_ρ は円筒座標系 (ρ, θ, z) における動径方向の単位ベクトルを表す. 円筒座標系における動経方向の単位ベクトル \mathbf{e}_ϕ は球座標系における動径方向の単位ベクトル \mathbf{e}_r と緯度方向の単位ベクトル \mathbf{e}_ϕ とを用いて

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \quad (7.20)$$

と表せる (図 7.3 参照). また g^* は万有引力定数 G を用いて

$$g^* = \frac{GM}{a^2} \quad (7.21)$$

と表される.

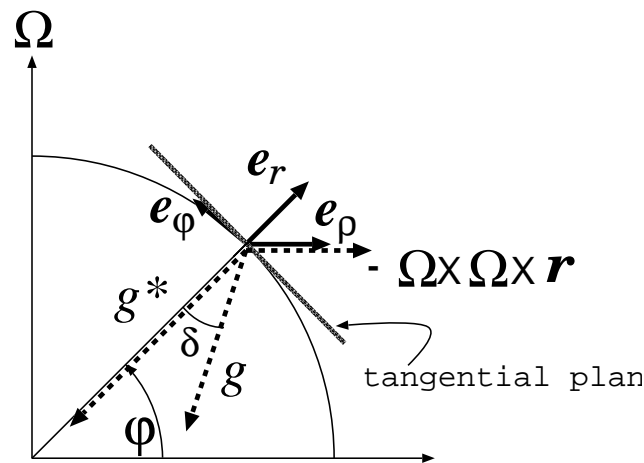


図 7.3 万有引力, 実効重力, 遠心力, 局所平面の関係.

図 7.3 からわかるように, 実効重力は遠心力があるために地球の中心の方向 $(-\mathbf{e}_r)$ を向かず, 緯度 ϕ , 経度 λ に張られた接平面 (局所的平面, \mathbf{e}_r を法線とする平面) にたいして垂直になっていない. どのくらい傾いているかここで見積もってみる. ある緯度 ϕ , 高度 $z = 0$ で議論をする. 万有引力の方向 \mathbf{e}_r と実効重力の方向との傾きを δ とするとそ

*6 万有引力による重力を英語では gravitational force と呼び, いっぽう, 万有引力と遠心力の合力を gravity force, もしくは gravity と呼んで区別している.

れは

$$\begin{aligned}\delta &= \cos^{-1} \frac{\mathbf{g} \cdot (-g^* \mathbf{e}_r)}{g^* |\mathbf{g}|}, \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi}{\sqrt{(g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi)^2 + (\Omega^2 a \cos \phi \sin \phi)^2}} \right) \quad (7.22)\end{aligned}$$

で与えられる。^{*7} いま $a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $g^* = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ として (7.22) を数値的に見積もってみると、その値は緯度 45 度で最大値 $\delta = 9.9 \times 10^{-2}$ 度 (約 6 分) となる。これは 1 km につき約 1.7 m 昇る、もしくは下る坂に等しい。つまり、地球を完全な球であるとする、その上に住んでいる我々が地面と思っている接平面は、重力に対して垂直でなく、地表が至るところ δ の角度を持った坂になっていることになる。

実際の地球は剛体ではなく力を受けると変形をする。遠心力のために回転軸から外向きに引っ張られて極半径よりも赤道半径が長くなっている。^{*8} そこであらためて地球の形を「至るところで実効重力と垂直になっている一続きの面の形」と定義しなおす。この面の表面は 回転球体の全表面を水で覆ったとき、その水面がとる形に等しい。地球の形をこのように定義すると、緯度 ϕ に張られた接平面では平面の法線方向と実効重力の方向が一致する。^{*9}

重力の値 $|\mathbf{g}|$ は (7.19) 式にあるように緯度・高度、さらには実際の地球内部の質量分布の非一様性のために経度にも依存する。^{*10} しかしながら地球の大気・海洋の場合、それが存在する領域 z は地球の半径 a に比べて極めて小さいのでこのような場合には $|\mathbf{g}|$ の高度依存性はほとんど無視してよい。^{*11} さらにその緯度・経度依存性も考慮せず、定数 ($g \simeq g_0 = 9.806 \text{ m s}^{-2}$) として扱う。

^{*7}

$$\begin{aligned}\mathbf{g} \cdot (-g^* \mathbf{e}_r) &= (-g^* \mathbf{e}_r + \Omega^2 a \cos \phi \mathbf{e}_\rho) \cdot (-g^* \mathbf{e}_r) \\ &= g^{*2} - \Omega^2 a \cos \phi (\cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi) \cdot g^* \mathbf{e}_r \\ &= g^{*2} - g^* \Omega^2 a \cos^2 \phi, \\ |\mathbf{g}| &= \sqrt{(g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi)^2 + (\Omega^2 a \cos \phi \sin \phi)^2}\end{aligned}$$

^{*8} 極半径 $6.356 \times 10^6 \text{ m}$, 赤道半径 $6.378 \times 10^6 \text{ m}$.

^{*9} 実際、我々は実効重力のかかっている方向を、鉛直と定めている。

^{*10} (7.19) から $|\mathbf{g}|$ を見積もると赤道と極との間で $3.4 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ の差がある。実際の観測された重力は赤道で 9.78 m s^{-2} , 極で 9.83 m s^{-2} である。(例えば, M.L. Salby, “*Fundamentals of Atmospheric Physics*”, (Academic Press, 1996) や坪井忠二, “重力 第2版”, (岩波全書, 岩波書店, 1979) を参照。

^{*11} 地球大気は、せいぜい $O(10^2) \text{ km}$ 程度領域にしか存在しない。海洋の最も深いところは $O(10) \text{ km}$ 程度である。それに対して、地球の半径は約 6400 km である。

7.5 球座標系での運動方程式

前節で議論したように、地球は完全な球ではない。しかしながら、地球の赤道半径と極半径との差は僅かであるため、地球流体力学では地球を完全な球とみなしても実用上差し支えない。また万有引力と遠心力との合力である実効重力が球と見做した地球の中心に向く(球の接平面と垂直に交わる)として、遠心力の項は万有引力の項に繰り込み、

$$\mathbf{g} = -\frac{a^2}{(a+z)^2} g_0 \mathbf{e}_r \quad (7.23)$$

とする。このとき地球(惑星)が回転している効果、もしくは座標系が回転している効果、は Coriolis 力項の有無のみに集約される。このような場合の Euler の運動方程式 (7.18) を球座標系の成分で書くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_\lambda v_r}{r} - \frac{v_\lambda v_\phi \tan \phi}{r}}_{*1} \\ - 2\Omega \sin \phi v_\phi + \underbrace{2\Omega \cos \phi v_r}_{\dagger 1} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{K}_\lambda, \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\lambda^2 \tan \phi}{r}}_{*2} \\ + 2\Omega \sin \phi v_\lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mathcal{K}_\phi, \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \underbrace{\frac{v_\phi^2 + v_\lambda^2}{r}}_{*3} \\ \underbrace{-2\Omega \cos \phi v_\lambda}_{\dagger 2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \mathcal{K}_r, \end{aligned} \quad (7.26)$$

となる。ここで $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{K}_\phi, \mathcal{K}_r)$ は前出の \mathcal{K} から重力を除いたものを改めて \mathcal{K} とした。*を付けた項は、座標が曲率 r で曲がっているという効果を表し、曲率項 (curvature term) と呼ばれる。^{*12}

^{*12} (7.24) ~ (7.26) の導出をここでは示さないが、極座標系における運動方程式を適当なテキストを参照し、球座標に変換することで確かめられる。また球座標系における運動方程式の heuristic な導出の仕方は J. R. Holton, "An Introduction to Dynamic Meteorology, 3rd Ed.", (Academic Press, 1992) の第 2 章に詳しく書かれている。キーポイントは 7.1 節では、単位ベクトルの時間微分が生じることに注意を喚起したが、極座標系、円柱座標系、球面座標系では単位ベクトルの空間微分が生じてくることである。単

スケール	記号	特徴的大きさ
水平スケール	L	10^6 m , (1000 km)
鉛直スケール	H	10^4 m, (10 km)
水平風速のスケール	U	10 m s ⁻¹
鉛直風速のスケール	W	10^{-2} m s ⁻¹
時間スケール	T	10^5 s, (1 day)
気圧の変動のスケール	δP	10^3 Pa
地表における密度	ρ	1 kg m ⁻³

表 7.2 地球大気の総観規模運動の代表的スケール

7.6 β 平面近似

球座標系における運動方程式は、デカルト座標系のような直線座標系の式に比べて複雑で理論的には取り扱いにくい。そこで、地球が回転する球であるという効果を残した直線座標系近似として、地球流体力学では β 平面近似がよく用いられる。これは緯度 ϕ_0 , 経度 λ_0 に張られた接平面上で流体の運動を記述するものである。^{*13} β 平面近似では、以下に示す手順にしたがって (7.24) ~ (7.26) を簡単化したものである。

ここでは注目する現象として、総観規模程度の現象を念頭に置く。この現象に付随した物理量の特徴的な大きさは表 7.2 のとおりである。

手順 1: 東西, 南北, 鉛直方向を, それぞれ x, y, z 方向, x, y, z 方向の速度成分をそれぞれ u, v, w と定義する。すなわち,

$$x = r \cos(\phi_0)(\lambda - \lambda_0), \quad y = r(\phi - \phi_0), \quad z = r - a, \quad (7.30)$$

$$u = v_\lambda, \quad v = v_\phi, \quad w = v_r. \quad (7.31)$$

位ベクトルの微分の結果だけを記しておくと,

$$\frac{D\mathbf{e}_\lambda}{Dt} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} (\sin \phi \mathbf{e}_\phi - \cos \phi \mathbf{e}_r) \quad (7.27)$$

$$\frac{D\mathbf{e}_\phi}{Dt} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\frac{v_\lambda \tan \phi}{r} \mathbf{e}_\lambda - \frac{v_\phi}{r} \mathbf{e}_r \quad (7.28)$$

$$\frac{D\mathbf{e}_r}{Dt} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \frac{v_\lambda}{r} \mathbf{e}_\lambda + \frac{v_\phi}{r} \mathbf{e}_\phi \quad (7.29)$$

である。

^{*13} 実際われわれは、この接平面を水平面と認識して生活している。

このとき微分作用素は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r \cos \phi_0} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad (7.32)$$

と表現される. この変数変換は, 近似ではなく正確な表現である. このとき, (7.24) ~ (7.26) は

$$\frac{Du}{Dt} - \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \phi} \right) (v \sin \phi - w \cos \phi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{K}_x, \quad (7.33)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{wv}{r} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \phi} \right) u \sin \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{K}_y, \quad (7.34)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \mathcal{K}_z, \quad (7.35)$$

となる. ここで,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.36)$$

である.

手順 2: 地球の大気や海洋のように, 惑星の半径に比べて流体の存在する領域が極めて薄い場合には, 球座標系で書かれた方程式 (7.33) ~ (7.35) に現れる $1/r$ の項は, よい近似で $1/a$ に置き換えられる.*¹⁴

手順 3: (7.33) の右辺第 2 項, (7.34) の左辺第 3 項において, 東西方向の風速は一般的に 100ms^{-1} よりも遅いので, 極付近 ($\phi = \pi/2$) を除いて,

$$\frac{u}{a \cos \phi} \ll \Omega \quad (7.37)$$

が成り立つ. また, 鉛直速度も水平速度に比べて非常に遅いので, 赤道を除いて

$$|w \cos \phi| \ll |v \sin \phi| \quad (7.38)$$

が成り立つ. したがって, (7.33) の右辺第 2 項, (7.34) の左辺第 3 項はそれぞれ

$$-2\Omega v \sin \phi, \quad (7.39)$$

$$-2\Omega u \sin \phi \quad (7.40)$$

と近似される. さらに, (7.34) の曲率項 wv/r も Coriolis 力項と比べると小さい. 即ち, 水平方向の運動方程式において, Coriolis 力は水平運動に対してのみ働き, 鉛直運動に対する Coriolis 力は小さいので無視する. さらに曲率項も小さいので無視する.

*¹⁴ 大気のある領域はせいぜい 100 km 程度なのに対し, 地球半径 a は $a \sim 6400\text{km}$ である.

手順4: このような近似を行った場合には, 近似前の方程式が保持していた基本的な保存則を近似後の方程式が保持するように注意しなければいけない. ここでは運動エネルギーに注目する. (7.24) に u , (7.25) に v , (7.26) に w をかけて全てを足してエネルギー方程式を作る. Coriolis 力項は見かけの力であるためにこのエネルギー方程式には陽には現れてこない. (7.35) の Coriolis 力項は (7.33) の $2\Omega w \cos \phi$ の項と相殺するが, 手順3でこの項は小さいとして無視したので, (7.26) の Coriolis 力項と相殺する項がなくなってしまった. 運動エネルギーの保存則が満足されるためには, 手順3で $2\Omega w \cos \phi$ を無視するのと同時に, 実は (7.26) の Coriolis 力項も無視する必要がある.

さらに, 曲率項も運動エネルギーに寄与しないので, (7.33), (7.34) に現れた曲率項を手順3で無視したことが運動エネルギーの保存則と抵触しないためには, (7.35) の曲率項も無視する必要がある.*¹⁵

手順5: Coriolis 力項に現れる $2\Omega \sin \phi$ は, Coriolis パラメーターと呼ばれ, 記号 f で表すのが慣例である. 接平面上の記述であることを考慮して, 緯度 ϕ_0 からの南北方向の変位が微小であるとして, f を ϕ_0 の周りに Taylor 展開して y の1次の項のみ残すという近似を行う.

$$f = 2\Omega \sin \phi \simeq 2\Omega \sin(\phi_0 + y/a) \simeq f_0 + \beta y, \quad (7.41)$$

$$f_0 \equiv 2\Omega \sin \phi_0, \quad (7.42)$$

$$\beta \equiv \frac{2\Omega \cos \phi_0}{a}. \quad (7.43)$$

なお, $\beta = 0$ とした記述は, f 平面近似と呼ばれる.*¹⁶

以上の考察により, 運動方程式は成分で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{K}_x, \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{K}_y, \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{K}_z - g, \quad (7.46)$$

ベクトル形式では,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathcal{K}, \quad (7.47)$$

*¹⁵ (7.26) の曲率項と Coriolis 力項の大まかな大きさを重力加速度と比べると, これら項が小さいことがわかる.

*¹⁶ f の展開の2次の項 $f = f_0 + \beta y - \frac{1}{2} \delta y^2$, $\delta = \frac{2\Omega \sin \phi_0}{a^2}$ までを残した近似は, δ 曲面近似と呼ばれる (Yang, H., *Wave Packets and Their Bifurcations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, 1990, 247pp.)

と書ける. ここで,

$$f = (f_0 + \beta y)k \quad (7.48)$$

である. (7.47), (7.48) は β 平面近似された運動方程式である.

以上をまとめると, 地球流体力学では運動方程式に座標系が回転している効果を取り入れ, なおかつ数学的に取り扱いやすい直線直交座標系の運動方程式として (7.47) を用いることがしばしばある. この式は地球が回転している効果は, 水平方向成分の式における Coriolis 力の有無によって表現されている. さらに, 地球が球であることを平面座標の記述に取り込むために, (7.47) の Coriolis パラメータ f の南北方向依存性を (7.48) で表現した式を用いている.

補足: 上記の手順 3~4 の簡単化に付いては, 注目したい現象に特徴的な時間・空間スケールから, 方程式の各項の大きさを見積もり, 記述する現象に寄与する項を残すという操作を行っている. これは, スケール解析といって, 流体力学的に厳密な方程式から, 注目する現象を記述する方程式を導出する時に用いられる常套手段である. スケール解析とは, 単なる方程式の数学的簡単化ではなく, 注目したい現象に適切な方程式を導出するための物理的考察である. 例えば, 流体力学的に厳密な方程式には音波のような地球流体現象を起こす素過程とはなりえない現象まで含まれている. スケール解析ではこのような現象を取り除き, 方程式を簡単化していくのである. ただし, スケール解析で重要な点は, 現象の観測がきちんと行われていて, 注目したい現象の時間空間スケールが既知である必要がある. 幸い, 地球の大気海洋現象は長年にわたり広範囲な観測が行われてきたので, スケール解析を行うだけの情報が既に揃っている. それに対して, 他惑星の大気を扱う場合には, 観測が十分に行われていないのでスケール解析を行うだけの情報がないのが現状である.

演習問題

1. 万有引力の方向と実効重力の方向の成す角 (7.22) の厳密な表式を, $\sin \phi \sim \cos \phi \sim O(10^{-1})$, $\Omega^2 a / g^* \ll 1$ であるとして近似すると, $\Omega^2 a \sin(2\phi) / (2g^*)$ となる. このことを確かめなさい. (Taylor 展開のいい演習問題である.)
2. 表 (7.2) を参考にしてスケール解析を行い, 地球大気の大規模運動に対しては, (7.33) において Coriolis 力項 $2\Omega \sin \phi v$ に比べて, 曲率項と $2\Omega \cos \phi w$ が小さい事を確かめよ. 同様に (7.34) において Coriolis 力項に比べて, 曲率項が小さい事を確かめなさい.