第 6 章

流体力学の基礎方程式の応用 (2): 音波

本章では流体力学の基礎方程式の解として, 音波が含まれていることを示す．まずその準備として, 非線形の方程式である流体力学の基礎方程式を線形化（線形近似）する．次に線形化された方程式を変形することにより, それはよく知られた波動方程式の形にかけることを示す．この波動方程式の解は, 音速で伝播する縦波であることも示される．即ち, この波動の正体は音波である．さらに縦波・横波と圧縮条件との関係や流体力学の基礎方程式に含まれる平面波解の種類について言及する．

6.1　状況設定

理想気体の状態方程式に従う流体を考える．静止したこの流体の持つ, 温度, 圧力, 密度をそれぞれ T_0, p_0, ρ_0 と表すことにする．この状態を基本状態 (もしくは基本場) とよび, これは空間的に均質な状態, 即ち T_0, p_0, ρ_0 は時間・空間に依存しないとする．さらに重力場の効果も無視する．つまり密度成層は考えないことにする．今, このような基本状態からの断熱的な揺らぎとして, 音速 $(\gamma R T_0)^{1/2}$ で伝わる縦波が流体力学方程式の解になっていることを示す．

6.2　線形近似

数学的な簡単化のため流体力学の基礎方程式を線形化する．基本状態からの揺らぎが小さい場合には, このような線形化という手続きは妥当なものである．速度場 $\boldsymbol{v}$, 圧力 p, 温

度 T, 密度 ρ を基本状態とそれからの揺らぎとして表現する：

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\boldsymbol{v}_0}_{=0} + \boldsymbol{v}', \tag{6.1}$$

$$p = p_0 + p', \tag{6.2}$$

$$T = T_0 + T', \tag{6.3}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'. \tag{6.4}$$

運動方程式は今の状況設定では

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \boldsymbol{\nabla} (p_0 + p') \tag{6.5}$$

である.*[1] 基本状態に比べて, 揺らぎの量の大きさはきわめて小さいと仮定する.

$$\frac{p'}{p_0} \ll 1, \tag{6.6}$$

$$\frac{T'}{T_0} \ll 1, \tag{6.7}$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1. \tag{6.8}$$

したがって, 揺らぎの 2 次の量は無視することにする.*[2] このとき (6.5) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} p' \tag{6.9}$$

とかける. ここで, p_0 は定数であること, さらに

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \boldsymbol{\nabla} p' &= \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{-1} \boldsymbol{\nabla} p' \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \boldsymbol{\nabla} p' \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} p' \end{aligned}$$

という近似を用いた. 同様に, 連続の式は

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \{(\rho_0 + \rho') \boldsymbol{v}'\} = 0$$

*[1] (6.5) において, プライム記号についた量の 2 次以上の項が非線形項である. 線形, 非線形の判定の仕方は, 地球惑星科学基礎 III でやったので思い出してください.

*[2] 運動方程式の非線形項が無視出来るためには, $\frac{|\boldsymbol{v}' \cdot \nabla \boldsymbol{v}'|}{|\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t}|} << 1$ である必要がある. もしくは基本状態として定常的で一様な流速 $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$ を仮定し, $|\boldsymbol{v}'|/|\boldsymbol{v}_0| \ll 1$ を仮定する.

から

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}' = 0 \tag{6.10}$$

と簡単化される．次に熱力学の方程式は, 断熱状態のときに

$$c_v \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} + p \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

と書けるが, 理想気体の状態方程式

$$p = \rho R T \tag{6.11}$$

を用いて,

$$\frac{c_v}{p}\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} - \frac{c_p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{6.12}$$

の形に書き直しておくと便利である．この場合, 線形化した式は

$$\frac{c_v}{p_0}\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{c_p}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \tag{6.13}$$

となる．*3

(6.9), (6.10), (6.13)(もしくは, (6.15)) は未知変数 $\boldsymbol{v}'$, p', ρ' に関する線形方程式であることに注意して欲しい．即ち, プライムの付いた揺らぎの成分を表す物理量が小さいという要請から, 非線形である流体力学の基礎方程式が線形方程式に帰着された．このような一連の手続きを線形化といい, 地球流体力学（のみならず多くの物理系の学問）において現象を解析するときにしばしば使われる方法である．

6.3　波動方程式

先の節で導出した方程式系が, 波動方程式の形に書き表せることを示す．

*3 圧力の揺らぎ p' と密度の揺らぎ ρ' の間の関係式の別の導出としては, 以下の様なものも考えられる．

圧力を密度とエントロピーの関数 $p = p(\rho, S)$ と考え, 断熱状態の下, 基本状態のまわりでこの式を展開し, 揺らぎの 1 次の項のみを残す．このとき,

$$p' = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S \rho' \tag{6.14}$$

が, さらにこの式の両辺を時間で偏微分して,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S \frac{\partial \rho'}{\partial t} \tag{6.15}$$

を得る．

まず, 運動方程式 (6.9) の発散をとる:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}' = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}^2 p'. \tag{6.16}$$

連続の式 (6.10) を用いて (6.16) の速度の発散を消去すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' = \boldsymbol{\nabla}^2 p' \tag{6.17}$$

を得る. さらに (6.13) を用いて密度の時間微分を消去すると最終的に

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}p' = \frac{c_p}{c_v}\frac{p_0}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}^2 p' \tag{6.18}$$

が得られる. *4

(6.18) はまさに位相速度 c をもつ波動が従う方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi' = c^2\boldsymbol{\nabla}^2\psi' \tag{6.20}$$

の形をしており, 波の位相速度が

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma R T_0} \tag{6.21}$$

となっている. (6.21) は 1.5.2 節の演習問題で導出した音波の速度と一致することに注意して欲しい.

6.4 分散関係式

平面波解（等位相線が平面となる波）

$$p' = \Re\left[\hat{p}\exp\left\{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\right)\right\}\right], \tag{6.22}$$

$$\rho' = \Re\left[\hat{\rho}\exp\left\{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\right)\right\}\right], \tag{6.23}$$

$$\boldsymbol{v}' = \Re\left[\hat{\boldsymbol{v}}\exp\left\{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\right)\right\}\right], \tag{6.24}$$

を仮定すると*5, (6.16), (6.17) から 圧力の振幅 $\hat{p}$ と 速度の振幅 $\hat{\boldsymbol{v}}$ との関係, $\hat{p}$ と密度の振幅 $\hat{\rho}$ との間の関係が決まる. ここで, $\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルで, 波の位相の伝播方向を表す

---

*4 (6.13) のかわりに, (6.14) を (6.17) に代入すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S \boldsymbol{\nabla}^2\rho' \tag{6.19}$$

となる. この式も波動方程式であり, 波の位相速度 $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S}$ は, この場合まさに 1.5.2 節の演習問題で述べた音波の速度に一致している.

*5 ^ のついた量は複素振幅である. $\Re\left[\bullet\right]$ は括弧の中の実部を取ることを意味する.

ベクトルである．その x, y, z 成分をそれぞれ, k, l, m とする．波の x, y, z 方向の波長はそれぞれ $2\pi/k, 2\pi/l, 2\pi/m$ で与えられる．また, $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルである．実際に代入することにより,

$$\omega \boldsymbol{k} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\rho_0}(k^2 + l^2 + m^2)\hat{p}, \tag{6.25}$$

$$\omega^2 = c_s^2(k^2 + l^2 + m^2) \tag{6.26}$$

$$c_s^2 \hat{\rho} = \hat{p}, \tag{6.27}$$

が得られる．

(6.26) のように, 波動の振動数と波数との間の関係式は分散関係式と呼ばれ, 波動を特徴付ける重要な関係式である．一般に波動の振動数を波数で割った量（位相速度）は波数に依存する．そこで, 初期に任意の波形を与えた場合, 任意の波形は様々な波数を持った波動の重ね合わせとして表現でき,[*6] 各波数の波動はそれぞれ異なる位相速度で進行するので, 初期の波形は時間とともに形が変わっていく．すなわち分散していく．しかしながら, 振動数が波数に比例する波の場合には, 位相速度は波数に依存せず, すべての波が同じ位相速度で伝搬する．従って, 初期に与えた波形は時間がたっても変化しない．このような波動は非分散性波動と呼ばれる．音波は非分散性波動の代表的な例である．

6.5　縦波・横波と圧縮条件の関係

流体粒子の変位の方向と波の伝播する方向が同じであるとき, そのような波は**縦波**と呼ばれる．一方, それらの方向が垂直のときそのような波は**横波**と呼ばれる．流体粒子の変位の方向は速度ベクトルの揺らぎ $\boldsymbol{v}'$ (または $\hat{\boldsymbol{v}}$) の方向と一致しており, また波の伝播方向は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に平行である．したがって, 縦波では $\boldsymbol{k} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} \neq 0$, であり, 横波では $\boldsymbol{k} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} = 0$ となる．上で求めた波動解は, (6.25) より縦波であることがわかる．[*7]

一方, もし非圧縮性流体を考察の対象とした場合, 非圧縮条件は $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$ なので, これと連続の式から

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

となる．これに再び平面波解 (6.24) を代入すると,

$$\boldsymbol{k} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{6.28}$$

を得る．(6.28) は非圧縮条件を満足する平面波解は, 横波であることを表している．

[*6] Fourier 級数/変換を思い出して欲しい．

[*7] (6.25) で $\hat{p} \neq 0$ である．$\hat{p} = 0$ のとき, $p' = \rho' = 0$, $\boldsymbol{v}' = 0$ なのでそのような解は自明な解である．

6.6 波動解の種類

6.3 節では波動方程式を導く際に, 変数を次々に消去して, p' だけの方程式に帰着させた. ここでは, 別の方法を用いて波動解を議論する.

まず, (6.13) を (6.10) を用いて,

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial p'}{\partial t}+\gamma\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}'=0 \tag{6.29}$$

の形に書き直しておく. (6.9), (6.10), (6.29) に平面波解 (6.22) 〜 (6.24) を代入すると, 以下の代数方程式が得られる.

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 0 & 0 & i\frac{p_0}{\rho_0}k & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & i\frac{p_0}{\rho_0}l & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & i\frac{p_0}{\rho_0}m & 0 \\ i\gamma k & i\gamma l & i\gamma m & -i\omega & 0 \\ ik & il & im & 0 & -i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \frac{\hat{p}}{p_0} \\ \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \end{pmatrix}=0. \tag{6.30}$$

$(\hat{u},\ \hat{v},\ \hat{w},\ \frac{\hat{p}}{p_0},\ \frac{\hat{\rho}}{\rho_0})^T$ が自明でない解を持つためには, (6.30) の係数行列の逆行列が存在してはいけない. 即ち, (6.30) の係数行列の行列式がゼロである必要がある. この条件は, 以下の様な ω に関する 5 次方程式になる:

$$\omega^3\left\{\omega^2-\frac{p_0}{\rho_0}\gamma\left(k^2+l^2+m^2\right)\right\}=0. \tag{6.31}$$

上の式の解は

$$\begin{aligned} \omega &= 0, \\ \omega^2 &= \gamma\frac{p_0}{\rho_0}(k^2+l^2+m^2) \end{aligned}$$

である. 5 次方程式の解は全部で 5 個あるが, 今考察している状況設定ではそのうちの 3 つが $\omega=0$ に縮退している. 残りの 2 つが互いに逆向きに伝播する音波である.

上の解析からわかるように, 流体力学方程式には 5 種類の平面波解が存在することになる. そのうちの 2 つが音波であり, 安定な密度成層の効果を考慮すると, $\omega=0$ の縮退が一部解けて, 前章で議論した Brunt − Väisällä 振動数に比例した波動が 2 つ（音波の場合と同様に, 互いに逆向きに伝播する）出てくる. これは重力波と呼ばれるものである. また, 地球上の流体運動のように座標系の回転の効果を考慮すると最後のひとつの波動解も zero でない振動数をもつ. なお, 音波や重力波では互いに逆向きに進む 2 つの波で構成されているのに対して, この最後の波動解は一方向にしか伝播しない.

演習問題

1. (6.12) から (6.13) を導出しなさい.
2. (6.9), (6.10), (6.13) は線形の方程式系であることを確かめなさい.（方程式系を満足する 2 つの解 $(\boldsymbol{v}'_1, p'_1, \rho'_1)$ と $(\boldsymbol{v}'_2, p'_2, \rho'_2)$ があったとき, これらの重ね合わせも方程式系の解であることを確かめる.）
3. (6.25)〜(6.27) を導出しなさい.
4. (6.30) において非圧縮条件 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を課すと, 音波が除去される (音速で伝播する解は存在しない) ことを示しなさい.