

第 1 章

序論

流体の運動を支配する物理法則は、質点や剛体の力学でおなじみの Newton の運動の法則である。しかしながら、質点や剛体は変形しないのに対して、流体は変形することが本質である。そこで、流体力学には今まで習ってきた力学と、ある部分では共通の概念を適用することができるが、また別の面では新たな概念が必要である。本章では質点や剛体の力学と流体力学を対比しながら、流体力学で登場する新たな概念について解説する。

1.1 連続体の概念

すべての物質は原子や分子などの粒子より構成されるが、そのような微細構造に立ち入らず、微細構造を平均化し物理量が、空間・時間の連続関数として与えられる仮想的な物体を取り扱うのが流体力学の立場である。このような仮想的な物体は、連続体とよばれ、実在の物質を連続体とみなす近似は連続体近似と呼ばれる。古典力学では物体を、有限の質量を持つが大きさを持たない質点や有限の大きさや質量を持つが変形しない剛体と理想化して物理現象を記述する。連続体近似という理想化は、このような古典力学における質点や剛体といった理想化に対応するものである。

連続体近似の方法 連続体近似は、流体内部のある点 P における物理量の値を、 P を含む微小体積 δV について、その物理量の平均値をもって定義することにより実現される。いま、質量 m の単原子もしくは単分子で構成されている気体を考え、 δV 内に含まれるそのような原子・分子の個数を N 、点 P の位置ベクトルを \mathbf{r} と表すと、点 P における密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{Nm}{\delta V} \quad (1.1)$$

で定義される。

一般に N は δV の大きさや t に依存して値が揺らぐために、 $\rho(\mathbf{r}, t)$ も値が揺らぐ。 $\rho(\mathbf{r}, t)$ が時間、空間の連続関数として与えられるためには以下の 2 つの条件が必要である。

- (考える現象の空間スケール L) \gg (δV)^{1/3} \gg (流体を構成している原子・分子の平均自由

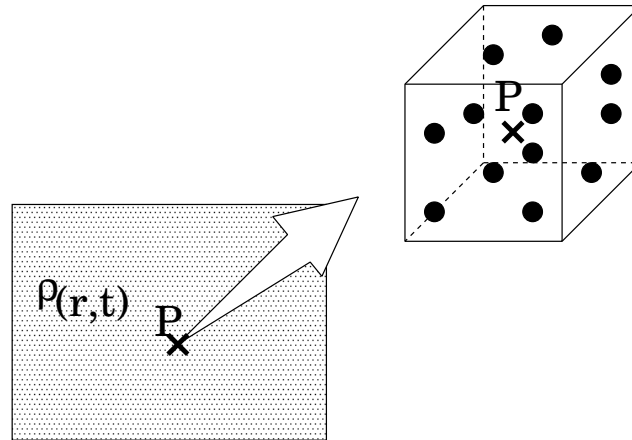


図 1.1 連続体では密度 ρ は時間空間の連続関数である. 点 P における密度は, P を中心とする微小な体積要素に含まれる原子・分子の質量の平均値で定義する.

行程^{*1} λ).

もしくは λ と L の比

$$K = \frac{\lambda}{L} \quad (1.2)$$

を定義し, $K \ll 1$ のときである. K は Knudsen 数と呼ばれる.

- (考える現象の時間スケール T) \gg (流体を構成している原子・分子の平均緩和時間^{*2} τ).

例: 以下によく知られた大気現象のもつ特徴的な空間・時間スケールを示す.

標準気圧, 0°C の空気	$\lambda \sim 10^{-7}$ m	$\tau \sim 10^{-10}$ s
海陸風	$L = 1 \sim 10$ km	$T \sim 12$ h
高低気圧 (総観規模現象)	$L \sim 10^3$ km	$T \sim 10$ day

このように大気現象の取り扱いには, 連続体近似が適用できることがわかる.

1.2 流体粒子

流体力学ではしばしば流体粒子 (fluid parcel または fluid particle) という言葉が登場する. これは, 流体を構成している原子・分子などの粒子を言い表しているのではなく, 前節で述べた δV 程度の大きさをもった流体の微小な塊のことである. すなわち, 流体粒子の中には無数の原子・分子が含まれているが, 流体粒子は考察の対象とする現象に比べて極めて小さく, 点とみなすことができるような流体の一部分のことである. 流体力学では, このような流体粒子に働く力を調べ, その運動を記述する運動方程式を立て, その解を調

^{*1} 原子・分子が他の原子・分子と衝突せずに運動できる平均的距離.

^{*2} 個々の原子・分子が持っている運動エネルギーに差異ができた時に, それを衝突によって一様化するのに必要な平均的時間.

べることにより、流体の運動を考察するのである。流体粒子は自由に変形するが常に同じ大きさの質量も持っているとは仮定する。

1.3 応力

古典力学では、Newton の第二法則より、“考察する物体に働く力の総和はその物体の運動量の時間変化率に等しい”，として運動方程式をたてる。さらに、その方程式を解くことにより物体の運動状態を調べることができる。流体力学でも同様に“流体粒子に働く力の総和が、流体粒子の運動量の時間変化率に等しい”として運動方程式を立て、それを適当な条件（境界条件、初期条件）のもとで解き、流体の運動を考察する。ここでは流体に限らず広く連続体^{*3}に働く力について考えてみる。

連続体に働く力には次の二種類がある。

- 体積力 (body force) : その大きさが物質の質量や体積に比例する力。重力、遠心力、Coliois 力などがその例であり、質点の力学でもおなじみのものである。
- 面積力 (surface force) : 面を通して作用し、その大きさが面の大きさに比例する力。この力は、物質を構成する原子の相互作用に由来するもので、力の及ぶ範囲は要素の表面の極く薄い層に限られる。これは連続体特有の力である。

単位面積あたりに働く面積力を応力 (stress) と呼ぶ。これは MKS 単位系では Nm^{-2} の次元を持つ。“力”という言葉がついているが、その次元は力の次元 N ではないことに注意して欲しい。

連続体中の点 P における応力は、点 P を通る平面 S を選び、S 上の P を含む単位面積を通して両側の連続体が及ぼしあう力（法線 n の正の側から負の側へ及ぼす力）で定義し、 T_n と表す。したがって T_n は S の選び方、すなわち法線 n に依存する。また、力はベクトル量であるから大きさを持つ。したがって T_n は 2 つの方向と 1 つの大きさによって定まる。これは、数学的には 2 階のテンソル (tensor) と呼ばれ、9 個の成分、 τ_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$), を持つ量である。 τ_{ij} は応力テンソルと呼ばれる。応力テンソルは、 x_j 軸に垂直な平面を通して、 x_j 軸の大きい側から小さい側へ作用する x_i 方向の力を τ_{ij} と定義する。（例えば、 x 軸に垂直な平面を通して、 x の大きい側から小さい側へと作用する y 方向の応力は τ_{yx} と書かれる。）

作用・反作用の法則を考えると、

$$T_{-n} = -T_n \quad (1.3)$$

の関係がある。

^{*3} 流体以外の連続体の代表的なものは弾性体である。

応力を面の接線方向の成分と法線方向の成分に分解し、それぞれを接線応力 (tangential stress), またはせん断応力 (shear stress), 法線応力 (normal stress) と呼ぶ. 法線応力は, 面の両側が押しあう場合は圧力 (pressure), 引っ張りあう場合は張力 (tension) となる.

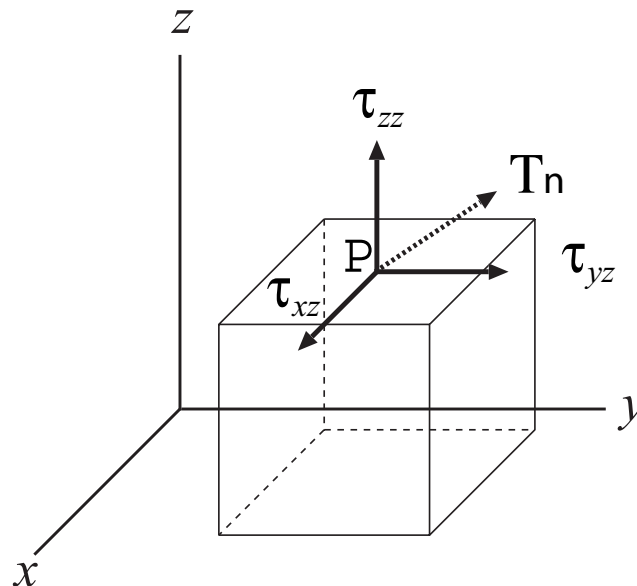


図 1.2 点 P を通る z 軸に垂直な平面を考える. このとき, P に働く応力 T_n は平面に水平な成分 τ_{xz}, τ_{yz} と垂直な成分 τ_{zz} に分解できる.

1.4 流体の定義

先に, 気体と液体を一括して流体と呼ぶと述べたが, 前節で定義した応力の概念を用いると, 流体は以下のように定義できる: “静止状態では接線応力が現れず, かつ法線応力が圧力である連続体を流体と定義する.” ここで, 「静止状態では」という断りが重要である. なぜなら, もし接線応力が現れたら, 僅かの力で変形するという性質のために, 流体は静止状態にあり得ない. また, 法線応力が張力の場合には, その面から流体は裂けてしまうからである.

法線応力に関して次の性質が証明できる. “静止状態, 運動状態を問わず接線応力が常に 0 ならば, 法線応力は考える面の選び方によらない.”

—————[証明]—————

[問題設定:] ある点 P における圧力が P を通る平面の選び方に依存しないことを示す. 点 P を頂点とし, 微小な三角形 PAB を底面とする高さが 1 の三角柱を考える (図 1.3 参照). PA, PB, AB に働く法線応力 (圧力) はそれぞれ一様で p_1, p_2, p_3 , とする. また, $PA = l_1, PB = l_2, \angle A = \alpha_1, \angle B = \alpha_2$ とする.

- 静止状態で体積力が働いていない場合: 微小物体に働く圧力の AB 方向の成分は,

$$p_1 l_1 \sin \alpha_1 - p_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

正弦定理

$$\frac{\sin \alpha_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_2}{l_1}$$

より,

$$p_1 = p_2.$$

したがって圧力は P を通る平面の選び方に依存しない.

- 静止状態で体積力が働いている場合: 体積力は上記のような微小物体を考えたときに $\mathcal{O}(l^2)$ の大きさで, 面積力に比べて高次の微量になる. したがって, l が非常に小さい場合には, 体積力の効果は面積力の効果に比べて無視できる. したがって, 先の議論が適用できる.
- 運動状態の場合: 質量と加速度の積を D'Alembert の原理によって慣性力として静力学 (静止状態) の問題に帰着させる. さらに慣性力は体積力であるから, 先の議論がそのまま適用できる.

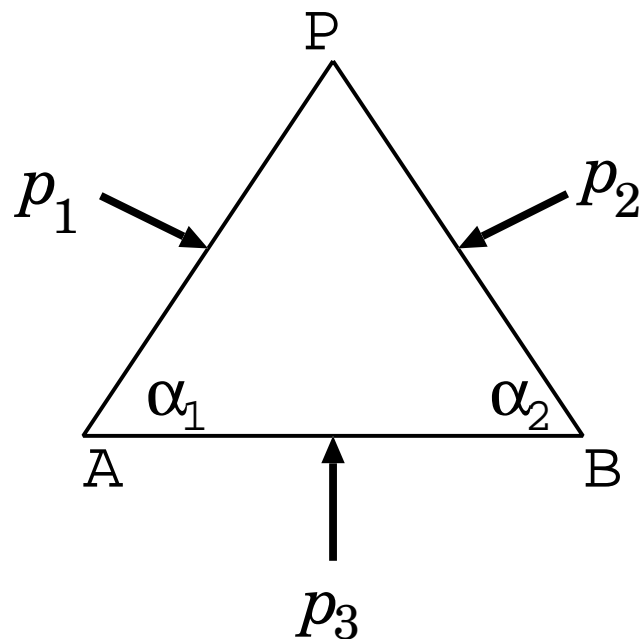


図 1.3 点 P を頂点とする単位高さの微小な三角柱に働く面積力.

————— [証明終り] —————

1.5 流体の種類

流体のもつ物性的性質によって, 流体をいくつかのカテゴリーに分類することができる.

1.5.1 完全流体と粘性流体

流体の隣り合った部分が異なる速度を持つとき、この速度差をなくすように接線応力が現れる性質が粘性 (viscosity) である。

- 完全流体 (inviscid/perfect/ideal fluid) : 粘性のない流体, すなわち運動中でも接線応力が現れない流体. 先の定理から, この流体に働く応力は圧力のみである. すなわち,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (1.4)$$

これは高度の理想化であるが, 自然現象をよく記述できる.

- 粘性流体 (viscous fluid) : 実在の流体は少なからず粘性を持っており, したがって実在の流体はすべて粘性流体である. 粘性流体で特に重要なものとして Newton 流体 (Newtonian fluid) と呼ばれるものがある. これは速度勾配に比例する接線応力を生じるような流体のことである. Newton 流体の応力テンソルは

$$\tau_{ij} = (-p + \chi e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (1.5)$$

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

で与えられる. μ は粘性率 (coefficient of viscosity), χ は体積粘性率と呼ばれ, 粘性率 μ と $\chi = \zeta + \frac{2}{3}\mu$ の関係で結ばれる. ここで ζ は第二粘性率である. Newton 流体は実在の流体の非常によい近似になっている. (1.5) で粘性率 μ, ζ を 0 とすれば, それは (1.4) に帰着することがわかる.

補足 : (1.5) の導出は, この講義では割愛する. 導出の仕方は, たとえば先に紹介した異の教科書を参照のこと. (1.5) の導出には, 応力は速度勾配に比例するであろうという物理的考察と, テンソルに関するいくつかの知識を必要とする.*4

1.5.2 圧縮性

気体と液体の違いは, 前者が容易に圧縮できるのに対して, 後者は圧縮しにくいという点であろう. そこで縮む縮まないの区別は, 気体・液体の区別のように思われがちである.

*4 流体力学の教科書を自習するとき, 初学者はまずここで壁にあたり, 悪いケースでは流体力学の勉強をあきらめてしまう. テンソルを知らなくても流体力学のかなりの部分 (完全流体の力学) を語ることは可能であり, また地球流体现象で, 完全流体の力学によって説明される現象もある. そこで本講義では粘性やテンソルの話は割愛し, テンソルを用いなくても語れる流体力学を講ずることにしている.

しかしながら、流体力学では気体でも非圧縮性流体として取り扱うこともあるし、逆に液体でも圧縮性を考慮する場合がある。

流体の圧縮性によって生じる特徴的現象は音波である。^{*5} 音波が考察する現象にとって重要である場合には、流体を圧縮性流体 (compressible fluid) として扱い、逆に音波が考察する現象にとって重要でない場合には、流体を非圧縮性流体 (incompressible fluid) として取り扱う。したがって流体の縮む、縮まないの区別は、音波の重要性を基準に区別され、必ずしも気体・液体の区別を指すものではない。^{*6} 大気海洋の大規模な運動にとって、音波は重要な要因ではないことから、地球流体力学では流体を非圧縮性流体と見做す。^{*7 *8}

演習問題:

- 理想気体の状態方程式 $p = \rho RT$, 及び熱力学の第 1 法則 $T dS = c_v dT + p d(\frac{1}{\rho})$ を用いて、断熱変化における圧力 p と密度 ρ の間になりたつ関係式 $p = C\rho^\gamma$ (Poisson の関係式) を導きなさい。ここで、 T , S , c_v , R , C はそれぞれ温度, エントロピー, 定積比熱, 気体定数, 任意定数で、 γ は定積比熱 c_v と定圧比熱 $c_p = c_v + R$ との比, $\gamma = c_p/c_v$ である。
- 前問の結果を用いて、気温 300 K の空気中を伝播する音波の速度 $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ を計算してみよう。空気は 2 原子分子理想気体とする。
 - $\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ が速度の次元を持つことを確かめなさい。
 - $c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ のとき、 c の値を求めなさい。
 - 理化学辞典によると、音速は

$$c = 331.5 + 0.61t,$$

で表されると書かれている。ここで、 t は摂氏温度である。実際に、前設問で求めた c の温度依存性の式を用いてこの公式を導きなさい。(ヒント: 絶対温度 T と摂氏温度 t との関係は、 $T = T_0 + t$ である。ここで、 $T_0 = 273.15\text{K}$ である。また日常生活で体験する温度は $t/T_0 \ll 1$ である。そ

^{*5} 音速 c は等 entropy 状態において、圧力に対する密度の変化率によって定義される。すなわち $c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_S}$ 。

^{*6} 圧縮性流体中では音波は有限の速さで伝わるが、非圧縮性流体では音波は無限大の速さで伝わる

^{*7} 鉛直方向の温度変化に対してのみ密度変化を起こすような流体 (Bussinesq 流体) を考察する場合もある。しかしこの場合にも、音速は無限大として取り扱われている。このような流体については後で述べることにする。

^{*8} 地球大気では大気の密度 ρ が大雑把に言って高度 z と共に指数関数的に減少する: $\rho \sim e^{-z/H}$ 。ここで H はスケールハイトと呼ばれ、密度が地表の e^{-1} となる高度である。考える現象の鉛直スケールが H に比べて小さい場合には、流体を非圧縮性流体として扱えるが、考える現象の鉛直スケールが H 程度もしくは大きい場合には、流体を圧縮性流体として扱う必要がある。

ここで, $\sqrt{T_0 + t} \simeq \sqrt{T_0} \left(1 + \frac{t}{2T_0} \right)$ と近似できる. 完全に係数の数値は一致しないので注意. (しかし極めて近い値になる.)