第 9 章

渦

コーヒーをかき混ぜてミルクをいれたときの渦巻模様や, 竜巻, 鳴門海峡の渦潮, 気象衛星から見る雲のパターン (特に低気圧や台風に伴う渦巻状の雲のパターン) など, 我々は日常生活で「渦」,「渦巻」というものを頻繁に目にする. 本章では「渦」を明確に数学的に定義 (渦度やその積分形の循環なる量を定義) し, その性質に付いて議論をする.

「渦」は「波」と並んで, 流体力学 (地球流体力学) において現象を分析する重要な概念, 素過程である. 非粘性流体の渦のない流体運動は, ほぼ完全に解かれていて, この分野は完成している (終っている) と言っても過言ではない. いっぽう, 100 年来の研究の歴史にもかかわらず, まだ解決できていない多くの難問を抱えた乱流現象は, 渦運動に満ちている. すなわち, 流体力学は渦が存在するがゆえに, 難しくまた興味深い学問となり, 多くの研究者の興味を引き付けているのである.

この節では β 平面上の非粘性流体を考察する. 外力場に粘性項が含まれると考えれば本節の議論を粘性流体の場合に拡張する事ができる.

9.1 渦度

9.1.1 定義

速度場 $\boldsymbol{v}$ の回転

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} \tag{9.1}$$

を渦度 (vorticity) と定義する. $\boldsymbol{\omega} = 0$ なる運動を渦無し運動 (irrotational motion) と呼び, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ なる運動を渦運動 (rotational motion) と呼ぶ.

渦度はどのような時間発展方程式に従うかを導く前に, まず運動方程式 (7.47) を書き換

えておく．(7.47) の非線形項は

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\,|\boldsymbol{v}|^2\right)-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \tag{9.2}$$

と書き換えられる．以下の議論ではこのような書き換えを行っておいた方が便利である．

そこで運動方程式は,

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}p-\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\,|\boldsymbol{v}|^2\right)+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{f})+\boldsymbol{\mathcal{K}} \tag{9.3}$$

当然の事ながら, 慣性座標系における運動方程式では $\boldsymbol{f}=0$ となる．慣性座標系における運動方程式 ((9.3) で $\boldsymbol{f}=0$ とおいたもの) と (9.3) の大きな違いは, 慣性座標系における $\boldsymbol{\omega}$ が回転座標系では $\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{f}$ に置き換わっていることである．すなわち, この式は座標系の回転に伴う $\boldsymbol{f}$ は, 渦度の一部とみなすことができる事を示している．このことから, 地球流体力学では $\boldsymbol{f}$ は**惑星渦度** (planetary vorticity), $\boldsymbol{\omega}$ は**相対渦度** (relative vorticity),

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\equiv\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{f} \tag{9.4}$$

を**絶対渦度** (absolute vorticity) と呼んで区別している．

9.1.2　渦度の物理的意味 〜Helmholtz の基本定理〜

(9.1) は物理的にどのような意味をもつのか？流体小片の局所的運動を調べてその意味を明らかにする．なおこの節では和の規約を用いないことにする．流体中のある点を原点 O にとり, O を中心とした流体の微小な小球を考える．球内の一点 P の座標を $\boldsymbol{r}=(x_1,\,x_2,\,x_3)$, P での流体の速度を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ とする．このとき $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ を Taylor 展開して $x_i,(i=1,2,3)$ の 1 次までの項を取ると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{v}(0)+\sum_{i=1}^{3}\left(\partial_i\boldsymbol{v}\right)_{\mathrm{O}}x_i,\\&=\boldsymbol{v}(0)+\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\right)\boldsymbol{e}_1\\&\qquad+\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\right)\boldsymbol{e}_2\\&\qquad+\left(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\right)\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{9.5}$$

を得る．ここで添字 O は原点で値を見積もることを表し, $\boldsymbol{v}(0)$ は原点における流速である．また

$$a_{ij}=\left(\partial_j v_i\right)_{\mathrm{O}} \tag{9.6}$$

と定義した．$i\neq j$ として

$$a_{ij}x_j\boldsymbol{e}_i+a_{ji}x_i\boldsymbol{e}_j=\frac{1}{2}\,(a_{ji}-a_{ij})\,(x_i\boldsymbol{e}_j-x_j\boldsymbol{e}_i)+\frac{1}{2}\,(a_{ji}+a_{ij})\,(x_i\boldsymbol{e}_j+x_j\boldsymbol{e}_i) \tag{9.7}$$

さらに, $(i,\ j,\ k)$ はこの順番に $(1,\ 2,\ 3)$ の偶置換であるとして,

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\,(a_{ji} - a_{ij}) = \frac{1}{2}\,(\partial_i v_j - \partial_j v_i)_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}\,[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})_k]_{\mathrm{O}}\,, \tag{9.8}$$

$$\gamma_{ij} = a_{ji} + a_{ij}, \tag{9.9}$$

$$\epsilon_i = a_{ii}, \tag{9.10}$$

と定義すると, (9.45) 式は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(0) &+ \Omega_1\,(x_2\boldsymbol{e}_3 - x_3\boldsymbol{e}_2) + \epsilon_1 x_1 \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\,\gamma_{23}\,\left(x_2\boldsymbol{e}_3 + x_3\boldsymbol{e}_2\right) \\ &+ \Omega_2\,(x_3\boldsymbol{e}_1 - x_1\boldsymbol{e}_3) + \epsilon_2 x_2 \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{2}\,\gamma_{31}\,\left(x_3\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_3\right) \\ \underbrace{\phantom{\boldsymbol{v}(0)}}_{\text{(I)}} &+ \underbrace{\Omega_3\,(x_1\boldsymbol{e}_2 - x_2\boldsymbol{e}_1)}_{=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r},\ \text{(II)}} + \underbrace{\epsilon_3 x_3 \boldsymbol{e}_3}_{\text{(III)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\gamma_{12}\,\left(x_1\boldsymbol{e}_2 + x_2\boldsymbol{e}_1\right)}_{\text{(IV)}}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

各項は

(I) **並進運動**
(II) **角速度 Ω の回転運動**
(III) **各軸方向への一様な伸び** $(\epsilon > 0)$, **縮み** $(\epsilon < 0)$
(IV) **ずれ運動**

を表している (図 9.1 参照). 流体は上記の 4 つの運動を同時に行っている. これは Helmholtz の基本定理と呼ばれる.

つまり, (9.8) に示されているように, **渦度は流体の局所的な回転角速度の 2 倍に等しい**
.

9.2　渦度方程式

本節では, 渦度の時間発展を記述する式を導出する.

(9.3) の回転をとると,

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}) + \frac{1}{\rho^2}\,\boldsymbol{\nabla}\rho\times\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\mathcal{K}}. \tag{9.12}$$

ベクトル解析の公式より, 任意のベクトル場 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ について

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}), \tag{9.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = 0 \tag{9.14}$$

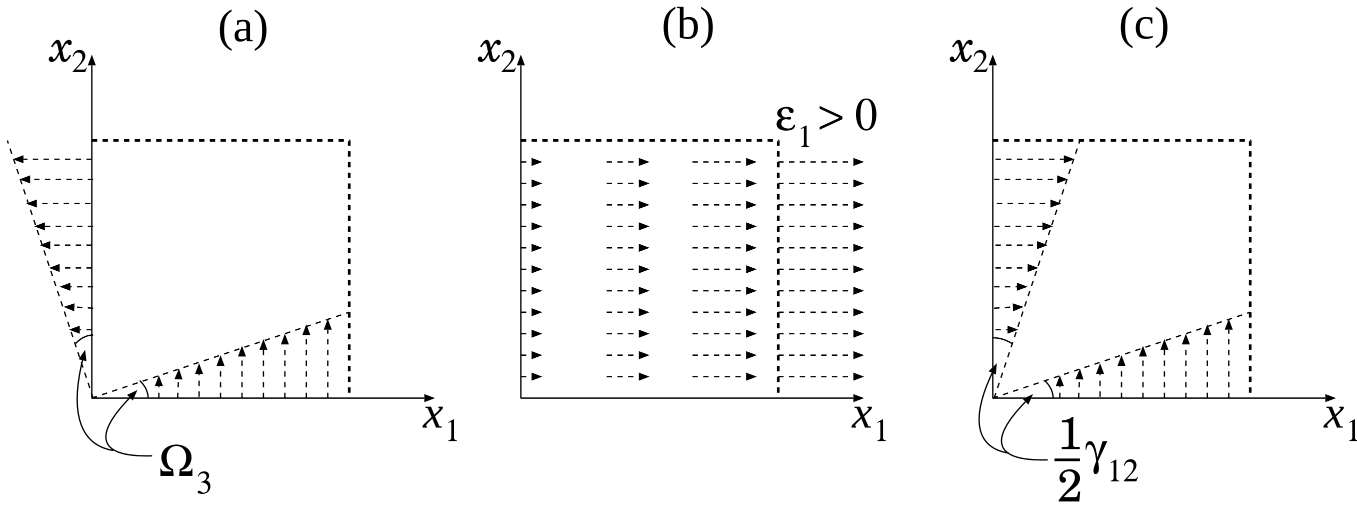

図 9.1　Helmholts の基本定理における x_3 軸の周りの剛体回転 (a), x_1 軸方向への伸び (b), ずれ運動の模式図 (c). 矢印は速度ベクトルを表す.

が成り立つ.[*1]　そこで

$$\boldsymbol{\nabla} \times \{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\} = (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{9.15}$$

となり, (9.12) は

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{D}t} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^2}\,\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{K}} \tag{9.16}$$

と書き換えられる. 連続の式 (3.5) より

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} \tag{9.17}$$

なので, (9.17) を (9.16) に代入して, 整理すると

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}}{\rho} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^3}\,\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla}p + \frac{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{K}}}{\rho} \tag{9.18}$$

を得る. (9.12), (9.16), もしくは (9.18) は**渦度方程式** (vorticity equation) と呼ばれる.

9.3　Lagrange の渦定理 (渦の不生不滅の定理)

ここで渦度に関する重要な定理を述べておく.

[*1] (9.2) は (9.13) において, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \boldsymbol{v}$ とおいた特別な場合である. また, (9.14) は, (**??**) から (9.12) の導出においても用いた.

「保存力場中の非粘性順圧流体では, 渦は発生することもなく, 消滅することもない.」

順圧流体では, 等圧面と等密度面は平行である. そこで, (9.18) の右辺第 2 項はゼロである.[*2] また保存力場は, $\nabla \times \mathcal{K} = 0$ なので, (9.18) の右辺第 3 項もゼロである.

いま $t = 0$ で $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} = 0$ であったとする. このとき $t = \Delta t$ における $\rho^{-1}\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}$ の値は,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}}{\rho}\right)_{t=\Delta t} &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}}{\rho}\right)_{t=0} + \left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}}{\rho}\right)\right]_{t=0} \Delta t \\ &\quad + \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}}{\rho}\right)_{t=0} + \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}}{\rho} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\right)_{t=0} \Delta t \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9.19}$$

したがって任意の時刻 $t = n\,\Delta t$ における $\rho^{-1}\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}$ の値もゼロ (すなわち $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} = 0$) である. したがって, 渦は不生である.

また, 非粘性流体は可逆な方程式に従うので, 時刻 $t = 0$ において $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} \neq 0$ で, ある時刻 $t = n\,\Delta t$ に $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} = 0$ になったと仮定すると, $t = n\,\Delta t$ を初期条件として, 時間発展を逆にたどり, $t = n\,\Delta t - n\,\Delta t = 0$ における渦度の値は前の議論を用いて求めることができ, $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} = 0$ になる. すなわち, 仮定と矛盾する. したがって, 時刻 $t = 0$ において $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} \neq 0$ であれば, 時刻 $t = n\,\Delta t$ においても $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} \neq 0$ でなければならない. すなわち渦は不滅である.

■**注意**: この定理は渦度 $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}$ が保存すること, もしくは, $\frac{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}}{\rho}$ が保存することを言い表しているのではないことに注意すべきである. 最初, 渦度がゼロであれは, 以後もそれはゼロであり, 渦度の値が保存されているように見える. しかし, 初期に渦度が non-zero であったときには, 以後の時刻で ゼロになることはない, と言っているだけであって, $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}$ が増えても減ってもよい.

■**補足**: 上で考察したように, 順圧流体でなおかつ重力などの保存力以外の外力が働いていない状況で, 3 次元空間中の渦度は保存しないが, 水平 2 次元 (重力のかかっている方向に対して垂直な平面内に束縛された) の流体では, 渦度 ($\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} = \omega_\mathrm{a}\boldsymbol{k}$) が保存する. 2 次元一様流体 ($\rho = \mathrm{const}$) では渦度が保存される

$$\frac{\mathrm{D}\omega_\mathrm{a}}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{9.20}$$

ことから渦度 ω_a に関する任意関数 $f(\omega_\mathrm{a})$ も保存する, 即ち無限個の保存量が存在する. 無限個の保存量の存在は, 2 次元流体の運動に大きな束縛を与え, 2 次元流体の運動が 3 次

[*2] $-\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p = \nabla\alpha \times \nabla p$, ここで $\alpha \equiv \frac{1}{\rho}$ は比容, は傾圧流体の時にゼロでないベクトルなので, 傾圧項もしくは, 傾圧ベクトルという.

元流体のそれとは異なった特異な性質を持つ要因である.

9.4　循環

9.4.1　定義

任意の閉曲線を C とし, C に沿っての速度 $\boldsymbol{v}$ の線積分

$$\Gamma(C) = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.21}$$

を, C に沿っての循環 (circulation) と定義する.

9.4.2　循環と渦度の関係

Stokes の定理により, 閉曲線 C に沿った線積分は, C を縁とする任意の閉曲面 S における面積積分に書き換えることができる:

$$\begin{aligned}\Gamma(C) = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.\end{aligned} \tag{9.22}$$

即ち, 循環は渦度の積分形である. もしくは, 渦度は循環の微分形である.*3

9.5　循環定理

ここでは循環に関する重要な定理 (循環定理： circulation theorem) を述べておく. ここでは慣性座標系の方程式で議論をする. 先ず流れに沿った循環の発展方程式を求める. 即ち, 循環の Lagrange 微分を計算する. なお慣性座標系における循環の発展方程式であることを強調するために循環の記号に添字 a を付す:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Gamma_{\mathrm{a}}(C)}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} (\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \\ &= \oint_C \left\{ \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})}{\mathrm{D}t} \right\}.\end{aligned} \tag{9.23}$$

*3 循環や次節の Kelvin の循環定理の物理的意味を説明するには, 渦線という概念が必要である. 渦線は, 流れ場における流線に相当した渦度の Graphic 表示である. 先に述べた理由により本稿では流線を解説していないので, 渦線の解説も割愛した. しかしながら, 渦度の物理的意味を解説し, 循環は渦度の積分形であるという説明で十分であろう. また, Kelvin の循環定理の微分形は次々節で解説する.

ここで, 最後の表式の第 1 項に運動方程式を, 第 2 項にまた,

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{r}}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{9.24}$$

用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Gamma_{\mathrm{a}}(C)}{\mathrm{D}t} &= -\oint_C \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{\mathcal{K}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_C \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)\\ &= -\oint_C \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p + \oint_C \boldsymbol{\mathcal{K}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{9.25}$$

となる.

9.5.1　Bjerknes の循環定理

保存力場 $\boldsymbol{\mathcal{K}} = -\boldsymbol{\nabla}U$ 中では, (9.25) より,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Gamma_{\mathrm{a}}(C)}{\mathrm{D}t} &= -\oint_C \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p - \oint_C \boldsymbol{\nabla}U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_C \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p - \oint_C \mathrm{d}U\\ &= -\oint_C \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p\end{aligned} \tag{9.26}$$

を得る. 右辺はソレノイド項と呼ばれるもので, (9.26) は循環の Lagrange 微分はソレノイド項に等しいことを述べている. これを **Bjerknes の循環定理**という. Bjerknes の定理は, 海陸風の強化に関する知見を得るのに利用することができる.[*4]

9.5.2　Kelvin の循環定理

保存力場 $\boldsymbol{\mathcal{K}} = -\boldsymbol{\nabla}U$ 中の順圧流体 ($\mathrm{d}P \equiv \mathrm{d}p/\rho$) では, Bjerknes の循環定理 (9.26) は更に簡単化される：

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma_{\mathrm{a}}(C)}{\mathrm{D}t} = -\oint_C \mathrm{d}P = 0. \tag{9.27}$$

つまり, **「流体粒子と共に動く閉曲線 C に沿っての循環 $\Gamma_{\mathrm{a}}(C)$ は保存される.」** これは, Kelvin の循環定理と呼ばれる.

■注意 1:　この定理の適用条件は, 9.3 の Lagrange の渦定理と同じである. (共に保存力場中の非粘性順圧流体が考察の対象.) Lagrange の渦定理は, 保存性を述べるものではなかったが, Kelvin の循環定理は循環 $\Gamma(C)$ の保存を言い表しているという点で, Lagrange の渦定理よりも重要である.[*5]

[*4] J. R. Holton, *An Introduction to Dynamics Meteorology*, 3rd. ed., 1992.

[*5] Lagrange の渦定理は, Kelvin の循環定理から導くことができる.

■注意 2: この節で述べた種々の定理は, 慣性座標系における循環に対するものであり, 回転系に相対的な速度を用いて定義された循環にたいしては, このようにエレガントな形にかきくだすことはできない.

9.6 渦位の保存則

前節では, 保存力場中の非粘性順圧流体では流れに沿って循環が保存されることを述べた. いっぽう 9.4.2 節で, 循環は渦度の積分形 (渦度は循環の微分形) であることを述べたが, 渦度は, (9.16), (9.18) にあるように, (Kelvin の循環定理と同様の条件のもとで) 渦度は流れに沿って保存しない. それでは, 循環の保存則に対応する微分形の保存則 (渦度に関する保存則) は何であろうか？ それが本節で述べる渦位 (potential vorticity) の保存である.[*6]

渦位保存則は地球流体力学における最も基本的な保存則の一つである. ここでは β 平面上の運動方程式 (渦度方程式 (9.18)) を出発点とした議論を行うことにする.

いま重力以外の外力は流体に働いていないとする. したがって渦度方程式 (9.18) は

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}}{\rho}\right)=\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}}{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho^{3}}\,\boldsymbol{\nabla}\rho\times\boldsymbol{\nabla}p \tag{9.28}$$

となる. ここで流れに沿って保存されるスカラー量 θ を考える:

$$\frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{D}t}=0. \tag{9.29}$$

(9.29) の勾配を計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\,\frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{D}t}&=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\nabla}\theta}{\mathrm{D}t}+(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\theta)=0,\\ \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\nabla}\theta}{\mathrm{D}t}&=-(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\theta)\end{aligned} \tag{9.30}$$

を得る.[*7] $(9.28)\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta+(9.30)\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}/\rho$ を求めると,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left\{\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta}{\rho}\right\}=\frac{\boldsymbol{\nabla}\theta\cdot(\boldsymbol{\nabla}\rho\times\boldsymbol{\nabla}p)}{\rho^{3}} \tag{9.31}$$

となる. $(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)/\rho$ は**渦位** (potential vorticity) と呼ばれ, 気象学・海洋学では q で表される. (9.31) の右辺がゼロ, 即ち, 渦位 q が流れに沿って保存される, 即ち,

$$\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}t}=0 \tag{9.32}$$

の形に書けるのは,

[*6] 渦位に関する記述は, 何故か通常の流体力学のテキストでお目にかかったことがない.

[*7] $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\theta)=\boldsymbol{e}_i(\partial_i v_j)\partial_j\theta$

1. 順圧流体のとき.

このとき等圧面と等密度面は平行であるから, $\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla}p = 0$. これは, Kelvin の循環定理が成り立つときと同じ条件である. そこで渦位 q の保存が Kelvin の循環定理の微分形に対応することがわかるであろう.

上記の条件以外のもとでも, すなわち傾圧流体でもある条件下では渦位は保存される. それが以下の場合である.[*8]

2. θ が熱力学的関数のとき.

θ が熱力学的関数ならば

$$\theta = \theta(p, \rho) \tag{9.33}$$

と θ を密度 ρ と圧力 p の関数として書くことができる. そこで

$$\boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}p + \frac{\partial\theta}{\partial\rho}\boldsymbol{\nabla}\rho. \tag{9.34}$$

$\boldsymbol{\nabla}p$, $\boldsymbol{\nabla}\rho$ はそれぞれ $\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla}p$ と直交するので $\boldsymbol{\nabla}\theta \cdot (\boldsymbol{\nabla}p \times \boldsymbol{\nabla}\rho) = 0$.

特に (9.29) を満足する熱力学関数として重要な過程は, 断熱過程である. この時 $\mathrm{D}S/\mathrm{D}t = 0$ であり, θ をエントロピー S とみなとみなすことができ, またエントロピーは (9.33) のように圧力と密度の関数として表せる.

高気圧・低気圧とは渦に他ならず (それぞれ渦度が負, 正の渦に相当する), その分布がわかれば総観規模[*9]の天気が予報できると考え, 初期の天気予報 (60 ~ 70 年代) では, 渦位 q の移流を計算していた.

渦位保存則は受動的 (passive) に渦位が流されるような形式

$$\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial q}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}q}_{\text{渦の移流}} = 0 \tag{9.35}$$

になっているが,[*10] 渦位の分布は渦度を通じて流れ場と結び付いており, 渦位が流されてその分布が変わると流れ場にも影響を及ぼし, 渦位の移流の仕方を変えていく. 即ち, q は能動的な量である.

*8 全く同じ条件のもとで Kelvin の循環定理も成り立つ. 即ち, Kelvin の循環定理の微分形が渦位保存則である.

*9 天気図で表現できるくらいの大きさと持続時間を持った現象をこのように呼ぶ.

*10 受動的に流されるようなスカラー量を passive scalar と呼ぶ.

9.7　Bernoulli の定理

慣性系上の順圧流体を考える．圧力の関数

$$P = \int \rho^{-1}\,\mathrm{d}p = \int \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla} p \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.36}$$

を導入すると，圧力傾度力項は

$$\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{\nabla} P \tag{9.37}$$

と書けるので，したがって (9.3) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(P + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{v}\right|^2\right) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\mathcal{K}} \tag{9.38}$$

となる．(9.38) から導かれる幾つかの定理を述べる．

9.7.1　Bernoulli の定理

保存力場中の定常流 $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$ を考える．このとき，

$$-\boldsymbol{\nabla}\left(P + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{v}\right|^2 + U\right) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{9.39}$$

となる．流線 (曲線上の各点における接線が，速度ベクトルの方向と一致している曲線) に沿って，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} = 0$ なので，

$$\boldsymbol{\nabla}\left(P + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{v}\right|^2 + U\right) = 0 \tag{9.40}$$

となる．つまり，**「保存力場中の非粘性順圧流体の定常流では，流線に沿って** $P+\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{v}\right|^2+U$ **は一定値を取る.」** この値は，流線ごとに異なる．

9.7.2　一般化された Bernoulli の定理

流体の運動が渦無し ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} = 0$) であるとする．このとき速度場 $\boldsymbol{v}$ はスカラー関数 Φ の勾配として書くことができる:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\Phi. \tag{9.41}$$

すなわち速度ポテンシャル Φ が存在する．このとき (9.38) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{\nabla}\Phi &= -\boldsymbol{\nabla}\left(P + \frac{1}{2}\,\left|\boldsymbol{\nabla}\Phi\right|^2\right) + \boldsymbol{\mathcal{K}},\\ \boldsymbol{\mathcal{K}} &= \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{1}{2}\,\left|\boldsymbol{\nabla}\Phi\right|^2\right)\end{aligned} \tag{9.42}$$

となる．(9.42) は「外力 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ はポテンシャルから導かれる」，もしくは「**順圧流体の運動が渦無しであるためには，外力は保存力でなけらばならない**」ことを意味している．そこで外力 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ がポテンシャル U から導かれるとすると,[*11]

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\partial_t\Phi + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\nabla}\Phi\right|^2 + P + U\right) = 0. \tag{9.43}$$

(9.43) 式は, 積分できて

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\nabla}\Phi\right|^2 + P + U = f(t). \tag{9.44}$$

ここで $f(t)$ は積分定数に相当し，時間に関する任意関数である． さらに，$\Phi'(t) \equiv \Phi(t) - \int^t f(t')\,\mathrm{d}t'$ とすると (9.44) は

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\nabla}\Phi\right|^2 + P + U = 0. \tag{9.45}$$

と書ける．(9.44) と (9.45) を見比べると，$f(t)$ はゼロとおけることがわかる．(9.44) もしくは (9.45) は**圧力方程式**または**一般化された Bernoulli の定理** (generalized Bernoulli's theorem) と呼ばれる．

演習問題

1. (9.2) を証明しなさい.[*12]
2. (9.20) を導きなさい.

[*11] 重力場中ではこの状況である．$U = gz$.