

## 第 4 章

# 状態方程式

前章で導出した連続の式, (Newton 流体もしくは非粘性流体の) 運動方程式, 熱力学的エネルギー方程式の 3 種類, 計 5 本の方程式<sup>\*1</sup>には, 未知変数として密度  $\rho$ , 速度  $v$ , 圧力  $p$ , 内部エネルギー  $U$  の 6 つが含まれている. したがって, 方程式は閉じていないように見える. しかし熱力学的な物理量の間には一定の関数関係 (状態方程式) が存在し, ある熱力学的な変数は別の 2 つの熱力学的変数で表現することが可能である. したがって, 状態方程式が与えられていれば, 流体力学の基礎方程式は上記の 5 本で十分である.

本章では, 地球流体力学で頻繁に登場する状態方程式の具体的な形を紹介することにする.

### 4.1 理想気体の状態方程式

希薄な気体では, 以下のような状態方程式がよい近似で成り立つ:

$$p = \rho RT. \quad (4.1)$$

地球流体力学では, 多くの場合, 大気を理想気体とみなす. 理想気体では, 内部エネルギーは温度のみの関数,

$$U = C_v T + \text{const} \quad (4.2)$$

と表される. ここで  $C_v$  は定積比熱である.

注意: (4.1) は単位体積の理想気体の状態方程式である. 一方, 化学で習う  $n$  kmol の理想気体の状態方程式は

$$pV = nR^*T \quad (4.3)$$

---

<sup>\*1</sup> 空間が 3 次元の場合には, 運動方程式は  $x, y, z$  の各成分について存在するので, 連続の式,  $x, y, z$  方向の運動方程式, 熱力学的エネルギー方程式の全部で 5 本である.

である。ここで、 $R^*$  は普遍定数 ( $R^* = 8.314 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$ ) である。体積  $V$  に含まれる理想気体の分子の質量を  $m$  kg, 理想気体の分子量を  $M$  すると, (4.3) は

$$p = \frac{m}{V} \frac{R^*}{M} T \quad (4.4)$$

となる。 $\rho = m/V$  であるから, (4.1) と (4.4) を見比べると

$$R = \frac{R^*}{M} \quad (4.5)$$

という関係が成り立つことがわかる。

地球大気の気体定数 地球大気<sup>\*2</sup>は窒素 (分子量 28) 75.5 %, 酸素 (分子量 32) 23.1 %, アルゴン (分子量 40) 1.3 % の混合気体なので<sup>\*3</sup>, 平均分子量は  $M = 28 \times 0.755 + 32 \times 0.231 + 40 \times 0.013 = 28.96$ . したがって  $R = R^*/28.96 = 287.1 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  である.<sup>\*4</sup>

気体分子運動論によると単原子分子気体の定積比熱  $C_v$  は気体定数  $R^*$  の  $\frac{3}{2}$  倍, 2原子分子気体のそれは気体定数の  $\frac{5}{2}$  倍であることが知られている.<sup>\*5</sup> 一方, 低圧比熱は  $C_p = C_v + R$  なので,<sup>\*6</sup> したがって, 単位体積あたりの空気の定圧比熱  $C_p$  は  $C_p = \frac{7}{2}R = 1005 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  となる.<sup>\*7</sup>

## 4.2 Boussinesq 流体の状態方程式

状態方程式は 3 つの熱力学的変数間の関数関係を与えるので, 一般に

$$\rho = f(p, T) \quad (4.6)$$

\*2 ただし水蒸気を含まない乾燥大気

\*3 高度約 80 km あたりまでこのような成分比に保たれている。

\*4 有効数字をいい加減にして計算しているので, よい子はこのような真似はしないように。

\*5 定積比熱は  $\frac{1}{2}R \times (\text{自由度})$  である。

\*6 Mayer の関係式と呼ばれる。

\*7  $C_p = \frac{7}{2}R$  が大雑把に 1000 という数値は覚えやすいので, 私は参照する文献が手元にない場合には, この関係式から逆に  $R$  の値を概算するようにしている。

と書ける. ここで,  $f$  は適当な既知関数である. この式をある基準の温度  $T_0$ , 圧力  $p_0$  の周りで Taylor 展開して, 展開の 1 次の項までをとる:

$$\begin{aligned}\rho &= f(p, T) \simeq \underbrace{f(p_0, T_0)}_{=\rho_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \right\}\end{aligned}$$

圧縮率がゼロ,

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = 0 \quad (4.7)$$

であるとする,

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)], \quad (4.8)$$

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \quad (4.9)$$

を得る.\*<sup>8</sup> (4.8) の状態方程式に従う流体は Boussinesq 流体と呼ばれる. 基準状態からの温度変化が小さく, 音波が重要でない現象に対しては流体を Boussinesq 流体として扱う. ここで,  $\alpha$  は体膨張係数, もしくは体膨張率と呼ばれる.\*<sup>9</sup>

地球流体力学では, 大気も海洋も Boussinesq 流体とみなすことがある. ただし, 海洋の

\*<sup>8</sup> (4.7) は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T &= \frac{\partial(\rho, T)}{\partial(p, T)} \\ &= \frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, S)} \frac{\partial(T, \rho)}{\partial(S, \rho)} \frac{\partial(S, p)}{\partial(T, p)} \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p / \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho \right\} \\ &= \frac{C_p}{C_v} \frac{1}{c_s^2}\end{aligned} \quad (4.10)$$

と書くことができる. 即ち, 比熱比と音速  $c_s$  を用いて表現できる. 従って, 等温圧縮率をゼロとおく Boussinesq 流体中では音速は無限大の速さで伝播することになる.

\*<sup>9</sup> (4.9) にマイナス符号を付けて, 膨張率を定義する理由は, 一般に気体は等圧下で温度を加えれば膨張し密度は減るからである. すなわち,  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$ . 従って, 膨張率を正の量として定義するために, マイナス符号をつけている.  $\rho_0$  で除する理由は「率」にするためである.

場合には、密度は塩分にも依存するので、状態方程式としては

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)], \quad (4.11)$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{p,T} \quad (4.12)$$

が用いられる。ここで、 $s$  は塩分 (salinity) である。 $s$  の単位は、海水 1 kg あたりの塩分のグラム数として計られる。また、 $\beta$  は、 $\alpha$  との対応から、塩分圧縮係数 (coefficient of saline contraction) と呼ばれる。

### 4.3 順圧流体の状態方程式

連続の方程式に現れる未知変数は、密度  $\rho$  と速度  $\boldsymbol{v}$  である。一方、運動方程式には上記のほかに圧力  $p$  が未知変数として現れている。したがって、もし圧力と密度との間に一定の関数関係

$$\rho = \mathcal{F}(p) \quad (4.13)$$

が存在するとき、もしくは状態方程式の形で

$$f(p, \rho) = 0 \quad (4.14)$$

という流体を考えるならば、エネルギー方程式を持ち出さなくても、連続の式と運動方程式のみで方程式を閉じるさせることができ、流体の運動を決定できる。(4.13) あるいは (4.14) を満足するような流体を順圧流体 (barotropic fluid) と呼ぶ。これは (4.14) 式で与えられる流体の等圧面と等密度面が平行であることからこのように呼ばれている。実際に、(4.13) の両辺の勾配を取ると

$$\nabla \rho = \frac{d\mathcal{F}}{dp} \nabla p.$$

$\nabla \rho$  と  $\nabla p$  の外積を計算すると、 $\nabla p \times \nabla p = 0$  なので、

$$\nabla \rho \times \nabla p = \frac{d\mathcal{F}}{dp} \nabla p \times \nabla p = 0. \quad (4.15)$$

つまり、(4.13) を満たす流体では  $p$  の等値線と  $\rho$  の等値線は平行である。

いっぽう一般の流体は密度、圧力以外に例えば温度にも依存するので等密度面と等圧面は平行ではなく傾いている。このような流体は傾圧流体 (baroclinic fluid) と呼ばれる。順圧と言ういいかたは地球流体力学特有の呼びかたのようで、通常の流体力学では、barotropic fluid のことをパロトロピー流体と呼び (例えば今井功：流体力学 (岩波書店) 参照)、一方、baroclinic や傾圧と言う言葉はでてこない。

上に述べた順圧流体として例えば以下のような場合が考えられる。

### 断熱変化する流体

流体の熱伝導性が悪い場合には、運動に際して状態変化は断熱的となる。理想気体の状態変化を圧力  $p$ 、密度  $\rho$ 、エントロピー  $S$  で記述すると

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{C_v}\right) \quad (4.16)$$

と書ける。ここで添字 0 の付いた物理量は、ある基準となる状態を表す。また  $\gamma$  は定積比熱  $C_v$  と定圧比熱  $C_p$  の比  $\gamma = C_p/C_v$  である。断熱過程ではエントロピーが状態変化中で保存される ( $S = S_0$ ) ので、(4.16) は、今まで何度か登場した Poisson の関係式

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (4.17)$$

となる。

### ポリトロープ大気

惑星大気の構造を議論する場合に、その圧力、密度、温度の間に適当な関数関係を仮定する場合がある。そのうちの代表的なものはポリトロープ大気の近似と呼ばれ、仮定する温度、圧力、密度間の関数関係は、(4.17) や (4.21) である。ただし、この場合には  $\gamma$  はポリトロピック指数 (polytropic exponent) と呼ばれる量で必ずしも比熱比 ( $= C_p/C_v$ ) ではない。ポリトロープ大気においては、(4.17) や (4.21) は状態方程式とみなすべきではなく、熱輸送に関する近似とみなすべきである。すなわち、状態方程式とみなせば  $\gamma$  は比熱比で自動的に与えられてしまうが、ポリトロープ大気の場合には状況に応じて値が変わりえる。例えば、熱効率のよい等温大気では  $\gamma = 1$  とおき、大気の鉛直温度勾配が断熱温度勾配になっているような状況では、 $\gamma$  は比熱比にとる。

## 4.4 非圧縮一様流体の状態方程式

非圧縮  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  で、至るところ密度が一様な流体 (incompressible homogeneous fluid) では、

$$\rho = \text{const.} \quad (4.18)$$

このとき、流体力学の基礎方程式は極めて簡単になる。例えば Newton 流体の場合には、運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathcal{K}, \quad (4.19)$$

ここで、 $P = p/\rho$  である。また連続の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.20)$$

である。即ち、未知変数は  $\mathbf{v}, P$  なので、順圧流体と同様に上記の2種類の方程式で問題は閉じる。上記のような方程式に従う流体の運動は、現実的な流れの予報や解析という目的ではなく、運動方程式が持つ数理物理的性質を調べる目的で研究されている。

## 4.5 温位

熱力学の第一法則、理想気体の状態方程式を用いると、断熱過程において

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.21)$$

という Poisson の関係式が導ける。ここで、 $T_0$  は  $p_0$  における温度である。(演習問題3参照。)

(4.21) は熱力学においては

$$p^{R/C_p} T = \text{const} \quad (4.22)$$

などと表現される場合が多く、 $T_0, p_0$  という量を導入してそれを問題にすることはほとんどないが、地球流体力学では、 $T_0$  は温位 (potential temperature) と呼ばれ、重要な役割を果たす物理量である。

鉛直方向にある温度プロファイルを持った大気を考え、ある高度  $z$  において気圧  $p(z)$ 、温度  $T(z)$  をを持った空気塊を気圧が  $p_0$  を持つ高度まで (通常  $p_0 = 1000\text{hPa}$  が用いられる) 断熱的に移動させたとき、空気塊が持つ温度  $T_0$  を、高度  $z$  にある空気塊が持っている温位と定義する。

通常、温位は  $\theta$  という記号で表される。次章で紹介するように、温位の鉛直分布  $\theta(z)$  により、鉛直方向の大気の安定度を見積もることが出来る。

温位はエントロピー  $S$  との間に

$$S = C_p \ln \theta + \text{const} \quad (4.23)$$

の関係がある。地球流体力学ではエントロピーよりも温位を使って現象を表現することが通例である。

### 温位を導入する意義

地球大気のような重力場中で、それぞれ異なる高度にある空気塊の温度を比べ、どちらの空気塊が暖かいのか、もしくは冷たいのか、という問いを發したとしよう。このとき、単

純にそれぞれの空気塊の温度を比べるだけで判断するのは間違いである．なぜならば，一般に重力場中では鉛直方向に気圧は変化しており，異なる（圧力）環境におかれた空気塊の温度を比べて，大小関係を論じることは妥当でないからである．ものを比べるときには，同じ条件（環境）のもとで比べないといけない．そこで考えられるひとつの方法は，異なる高度にある空気塊をそれが持つ性質が変化しないようにある基準となる環境に仮想的に変位させて，それぞれの空気塊の温度を比べることである．つまり，基準気圧面 ( $p_0 = 1000\text{hPa}$ ) まで仮想的に空気塊を断熱的に変位させ，そのとき空気塊が持つ温度  $T_0$  を比較に使うことである．（(4.21) 参照）．上で述べたように，この温度がまさしく温位  $\theta$  である．したがって，温位を使えば異なる高度にある2つの空気塊の寒暖を，単純に温位を比べることによって評価することができる．

さらに理想気体の状態方程式を参照すると，同じ圧力場中  $p_0$  では，気体の密度は温度に反比例する ( $\rho = p_0/RT$ )．従って，気体の密度は温位に反比例することになる．つまり，単位体積あたりで比較すると，温位の高い気体は軽く，温位の低い気体は重いことになる．

#### 演習問題

1. 金星大気，火星大気の大気組成を調べ，これらの大気を理想気体とみなしたときの気体定数  $R$  を求めなさい．
2. 熱力学の第一法則  $dU = T dS - p d(\rho^{-1})$ ，理想気体の状態方程式  $p = \rho RT$ ，さらに  $dU = C_v dT$  を用いて，(4.16) を導きなさい．
3. (4.17) は Poisson の関係式と呼ばれる．Poisson の関係式を理想気体の状態方程式を使って， $T, p$  で表現すると，

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.24)$$

となることを示しなさい．ここで， $T_0$  は  $p_0$  における温度である．また， $\gamma$  は比熱比  $\gamma \equiv C_p/C_v$  である．

4. (4.23) を導出しなさい．