

第 2 章

流れの記述

流体の運動を記述する方法には、二通りの方法があり、それぞれの方法に時間微分が定義できる。ここではこの二つの記述法と二つの時間微分について解説する。

2.1 Lagrange の方法 (Lagrange 的記述)

この方法では、流体を無数の流体粒子の集団と見なし、各粒子の運動を追跡することにより流体の運動を記述する。この記述方法は質点系の力学における質点系の記述と非常により対応関係がある。たとえば N 個の質点系の運動を考えたときに、質点系の力学では i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N$) の質点の任意の時刻 t における位置 (x_i, y_i, z_i) を問題にする。ここで i は粒子の名前 (粒子の識別子) である。一方、流体粒子の識別には、ある時刻における流体粒子の位置を用いる。ある時刻における空間の一点に存在する流体粒子は唯一であるために、これを持ってして流体粒子を識別することができるからである。通常は初期時刻 ($t = 0$) の位置が用いられる。 $t = 0$ において空間中の (a, b, c) という位置に存在していた流体粒子の名前を (a, b, c) と名付ける。 (a, b, c) は物質座標 (material coordinates) と呼ばれる。

質点系と流体系の大きな違いは次の 2 点である。

- 質点の名前 i は離散的量であるが、流体粒子の名前 (a, b, c) は連続的量である。
- 質点系の場合には各質点はバラバラに運動をする。一方流体の運動では、流体は連続体であるから隣り合う流体粒子 (近い名前の流体粒子) は互いに似た運動をする。

	流体力学 (Lagrange 的記述)	古典力学 (質点系)
粒子の識別子	物質座標 (a, b, c) : 連続的量	i : 離散的量
時間微分	$\frac{D}{Dt}$	$\frac{d}{dt}$

表 2.1 流体力学における Lagrange 的記述と質点系の力学との対応関係.

Lagrange 微分

各流体粒子に付随した物理量の時間的变化率, 時間微分, を Lagrange 微分 (または物質微分, material differentiation) と呼び

$$\frac{D}{Dt}$$

で表す.*¹ Lagrange の方法では, 物理量 $F(a, b, c, t)$ ((a, b, c) という流体粒子が持っている物理量. 例えば, 速度や温度, 圧力など) の Lagrange 微分は

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{a,b,c} \quad (2.1)$$

と表せる. これは古典力学でいうところの $\frac{d}{dt}$ に対応するものである.

例

流体粒子の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の Lagrange 微分は, その流体粒子の速度 $\mathbf{v}$ である. 即ち,

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt}.$$

また, 速度の時間変化率 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ は加速度である.

以上をまとめると, 表 2.1 のようになる.

2.2 Euler の方法 (Euler 的記述)

Lagrange 的記述は質点系の力学とよい対応関係にあるので, 質点系の力学の知識を適用できるという利点がある. しかしながら, この記述法は実用的ではない. 例えば, 大気現象を想像してみよう. 我々の興味の対象はある日時における, ある場所の気温であったり気圧や風向・風速, 天気であろう. しかしながら, Lagrange の方法が与えるのは, ある日

*¹ 教科書によっては, Lagrange 微分を $\frac{d}{dt}$ と表しているものもある.

時に適当な場所にあった流体粒子が、のちの時刻にどこに行き、どのような性質（温度、圧力、速さ）をもつか、である。より実用的な記述法が Euler 的記述である。

この方法では任意の時刻 t において、空間の各点 (x, y, z) で物理量を指定することによって流体の運動を記述する。すなわち、場の立場である。物理学において、場の立場で現象を記述する代表的分野として、電磁気学があげられる。電磁気学と流体力学ではしばしば同じ方程式が登場する。歴史的には電磁気学よりも先に流体力学が学問的に体系化されており、流体力学の学問体系を参考にして電磁気学が体系化されたといわれている。

Euler 的記述と Lagrange 的記述の大きく異なる点は、変数 x, y, z が Lagrange 的記述では従属変数（物質座標と時間に依存する変数）なのに対し、Euler 的記述では独立変数であることである。

2.3 Lagrange 微分の Euler 的表現

流体粒子に付随したある物理量 F の Euler 的表記は $F(x, y, z, t)$ である。この量の Lagrange 微分を Euler 的方法で記述することを考える。ある時刻 t で $\mathbf{r} = (x, y, z)$ にあった流体粒子が、時刻 $t + \Delta t$ において $\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t = (x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$ に移動したとする。このとき流体粒子に付随した F の変化 ΔF は、

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \\ \frac{DF}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.2}$$

と計算される。ここで $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ は Δt の二次以上の項を表す。 F は任意であるから、Lagrange 微分の Euler 的表現として

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\end{aligned}\tag{2.3}$$

を得る。

注意： (2.3) の第 2 の表現に特に注意して欲しい。 $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は決して $\nabla \cdot \mathbf{v}$ とは等しくない！ ∇ は演算子であるから演算の順序を入れ換えては意味が違ってくる。例年、両者の区別ができない人が非常に多い。 $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は演算子で、何か関数に食いついて初めて数値をとりえる（つまり $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は飢えている）のに対し、 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ はそれ自身で明確な数値を持ちえる。

以下に 2 つの記述を表にしてまとめておく.

	Langrange の方法	Euler の方法
立場	粒子的	場
独立変数	a, b, c, t	x, y, z, t
従属変数	$x, y, z; p, \rho, T, \dots$	$u, v, w; p, \rho, T, \dots$
Lagrange 微分, $\frac{D}{Dt}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$

(2.3) に現れた $\mathbf{v} \cdot \nabla$ の項は移流項と呼ばれる. 以下の例題は, 移流という言葉の意味と移流項の作用を理解するのに適当であろう.

例題

ある観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3.0 K 気温が低いとする. もし 10 m s^{-1} の北風が吹いていて, 空気塊の温度は変化しないものとする. このとき, 観測所における気温の時間変化率は以下のように求められる.

温度 T の Lagrange 微分は Euler 的な微分によって,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T$$

と表現できる. ここで, $\frac{DT}{Dt}$ が空気塊の温度変化率であり, $\frac{\partial T}{\partial t}$ が観測地点における温度変化率である. いま, 問題より $\frac{DT}{Dt} = 0$ なので, 観測地点における温度変化率は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T$$

と温度移流で決まる. 北向きを y -座標の正の向きとすると北風は $\mathbf{v} = v\mathbf{j}$, $v = -10 \text{ m/s}$ と表現できる. 一方, 温度勾配は北に行くほど温度が下がるので, $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j}$, $\frac{\partial T}{\partial y} = -3 \text{ K/50 km}$ である. したがって

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T = -6.0 \times 10^{-4} \text{ K/s} = -2.2 \text{ K/h}$$

北半球に住んでいる我々にとって, 一般に北に行くほど温度は下がっており, 日常経験によると, 「北風が吹くと冷たいもしくは寒い」, のであるが, 上の例はそのような状況をまさに表現している.

2.4 保存則

ある物理量 A が時間変化しないとき, すなわち A の時間微分がゼロであるとき, “ A は保存する” と言い表す. 流体力学では 上で述べたように 2 種類の時間微分, $\frac{D}{Dt}$ と $\frac{\partial}{\partial t}$, が存在するので注意が必要である.

A の Lagrange 的時間微分がゼロ

$$\frac{DA}{Dt} = 0 \quad (2.4)$$

のとき, “ A は Lagrange 的に保存される”, もしくは “ A は運動にしたがって保存される (A is a conserved quantity following the motion)” という. このような物理量 A は Lagrange 的保存量, もしくは単に保存量と呼ばれる.

別の保存則の形式はフラックス形式の保存則と呼ばれるもので, それについては 3.1 節で紹介する.

例

物質が不生不滅であれば, 流体粒子の質量は Lagrange 的保存量である. いま流体粒子の質量を δm , 密度を ρ , 体積を δV とすると,

$$\begin{aligned}\frac{D\delta m}{Dt} &= \frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = \delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\delta V}{Dt} = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} &= -\frac{\rho}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

(2.5) によると流体粒子の密度は Lagrange 的には保存されない. なぜならば, 流体粒子は流されるにしたがって膨張・圧縮され, 体積変化を伴い, それによって密度も変化するからであるからである. (2.5) の右辺 $\frac{D\delta V}{Dt}$ の項が体積変化を表し, $\frac{D\delta V}{Dt} > 0$ ならば膨張を, $\frac{D\delta V}{Dt} < 0$ ならば圧縮を表す. 質量が一定のとき, 物質を圧縮すると密度は増大し, 膨張させると密度は減少する. (2.5) はこのような日常経験と合致している.

2.5 流線と流跡線

流れの場を幾何学的に表現する方法として, 流線と流跡線というものがある. 流線は Euler 的な概念であるのに対して, 流跡線は Lagrange 的な概念である.

2.5.1 流線

流れの中に一本の曲線を考える. 曲線上の各点における流速 $\boldsymbol{v}$ の方向とその点における曲線の接線が一致するときに, そのような曲線を流線という. 曲線上の一点 $\boldsymbol{r}$ における曲線の微小部分の長さを $d\boldsymbol{r}$, その点での接線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{l}$ で表す. このとき $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{l}dr$ を曲線の線要素と呼ぶ. 定義より流線は

$$d\boldsymbol{r} // \boldsymbol{v}\tag{2.6}$$

なので,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}\tag{2.7}$$

である.

2.5.2 流跡線

任意の一つの流体粒子が時間の経過と共に描く軌跡を流跡線という。流跡線は流体粒子をある有限時間にわたって観測して描かれるものである。流体粒子が微小時間 dt の間に流跡線に沿って線要素 dx だけ動いたとすれば、

$$dx = v dt \quad (2.8)$$

である。

定常流においては、流線と流跡線は一致する。

演習問題:

- ある三変数関数 $f(a, b, c)$ があつたとき、偏微分は $\partial f / \partial a$ とは、独立変数 b, c を一定とおき、独立変数 a で f を偏微分するという意味である。一定とおく独立変数を添え字として明示的に $(\partial f / \partial a)_{b, c}$ と示すほうが、より親切な表記であるが、独立変数の組がよくわかっている場合には、しばしば一定とおく変数を省略してしまう。このことをふまえて、Lagrange 的記述における $\partial / \partial t$ と Euler 的記述における $\partial / \partial t$ ではそれぞれ何を一定として偏微分を行っているかを述べなさい。
- Lagrange 微分の Euler 的表現 (2.3) で登場した $v \cdot \nabla$ を和の規約を使って表しなさい。
- 地表気圧が東方向に行くにしたがって $0.3 \text{ kPa} / 180 \text{ km}$ で減少しているとする。東向きに $10 \text{ km} / \text{h}$ で航行する船の上で気圧を測ったところ $0.1 \text{ kPa} / 3 \text{ h}$ であった。この海域に島が存在するとし、島の上で気圧を測ったときの気圧の時間変化率を以下の手順に従って求めなさい。^{*2}
 - x を東方向、 x 方向の船の速度を u としたときに $v \cdot \nabla p$ はどのように表現されるか。
 - 以上の考察から島の上で観測された気圧変化率を求めなさい。
- 地表気圧が北東方向に行くにしたがって 5 Pa km^{-1} で増加しているとする。北東向きに 10 km h^{-1} で航行する船の上で気圧を測ったところ変化率は $100 \text{ Pa} / 3 \text{ h}$ であった。この海域に島が存在するとしたときに、島の上で観測された気圧の時間変化率を求めなさい。
- ある観測所の 50 km 北の地点では観測所よりも 3 K 気温が低いとする。もし 20 m s^{-1} の北東風が吹いていて、空気塊は放射によって 1 K h^{-1} で温まっているとき、観測所における気温の時間変化率を求めなさい。

6. 以下の式を証明しなさい.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + \frac{dx_2}{dt} \phi(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} \phi(x_1, t)$$

証明：

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) dx &= \int_{x_1(t+\delta t)}^{x_2(t+\delta t)} \phi(x, t+\delta t) dx - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) dx \\ &= \int_{x_1+x_1\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)}^{x_2+x_2\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)} \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} \phi dx + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ &= \int_{x_2}^{x_2+x_2\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)} \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t \right) dx - \int_{x_1}^{x_1+x_1\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)} \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t \right) dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t dx + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ &= \left(\frac{dx_2}{dt} \phi(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} \phi(x_1, t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \right) \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (2.9) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) dx &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) dx}{\delta t} \\ &= \frac{dx_2}{dt} \phi(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} \phi(x_1, t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \quad (2.10) \end{aligned}$$