2007 年度　地球流体力学　レポート課題

担当：岩山隆寛

2007 年 7 月 31 日

解答に際しての注意：ベクトルとスカラーの違いに注意すること！また，解答は答えのみ書くのではなく，議論の展開がわかるように途中経過も詳細に書きなさい．(もちろん穴埋め問題は別です．)

1.　流体力学の基礎方程式に関する以下の設問に答えなさい.

流体力学の基礎方程式は, 物理学における 3 つの重要な保存則 (　A　), (　B　), エネルギー保存則を具体的に数式で書き表したものにより構成される.

例えば, 重力場中の非粘性流体の基礎方程式は, 以下の式で与えられる:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p - g \boldsymbol{e}_z, \tag{2}$$

$$c_p \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = J. \tag{3}$$

ここで, t は時間, $\boldsymbol{\nabla}$ は勾配演算子, ρ は密度, $\boldsymbol{v}$ は流速, p は圧力, g は重力加速度, $\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトル, c_p は定圧比熱, T は温度, J は単位時間・単位質量あたりの加熱率である.

(a) (　A　) を具体的に書き表した数式が (1) である. (　A　) にあてはまる適当な言葉, 及び (1) 式の名称を答えなさい.

(b) (　B　) を具体的に書き表した数式が (2) である. (　B　) にあてはまる適当な言葉, 及び (2) 式の名称を答えなさい.

(c) 流体力学には現象を記述する 2 つの記述法が存在する. それぞれの記述法の名称とその特徴について述べなさい.

(d) 方程式 (1)〜(3) に示されているように, 流体力学には 2 つの時間微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$

が存在する．後者の微分の名称，それぞれの微分の特徴について述べなさい．さらに前者と後者を結びつける関係式を**書きなさい**．(**ただし，関係式はベクトル形式で表現しなさい．**)

(e) (1) を $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ を用いて表現しなさい．

2. 大気は理想気体の状態方程式に従い，静水圧平衡の状態にあると仮定する．静水圧平衡の式

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{4}$$

および理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \tag{5}$$

を用いて, 気圧と温度から任意の気圧面の高度を計算する式 (測高公式) を導きなさい．ここで，R, T はそれぞれ気体定数と温度である．なお，重力加速度 g は定数であると仮定する．

3. 円筒形の容器に密度が一様な非圧縮性流体（液体）が入っている．この液体が円筒容器の中心軸を中心とした定常旋回運動をしている場合に，液面の形を考察する．以下の設問に答えなさい．なお，液体は容器からこぼれないものとする．

座標系：円筒容器の底面の中心 O を原点とし，円筒の中心軸を z 軸とする円筒座標系 (r, θ, z) で現象を記述することにする．r, θ, z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$ と表す．

慣性系の運動方程式：速度場を $\boldsymbol{v} = V(r)\boldsymbol{e}_\theta$ としたとき，(2) を r, θ, z 方向成分に関する式に展開すると，それぞれ

$$-\frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{6}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \tag{8}$$

となる．ここで 密度 ρ，重力加速度 g は共に一定とする．

上記の方程式の導出の際の注意：円筒座標系における微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{9}$$

と表される．また，単位ベクトルの空間微分のうち，ゼロでないものは以下の２つである：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta.$$

(a) ベクトル形式の運動方程式 (2) から，(6) を導出しなさい．

(b) (6) は r 方向の力のバランスを表す．このバランスの式の名称を答えなさい．

(c) (8) は鉛直方向の力のバランスを表す．このバランスの式の名称を答えなさい．

(d) (8) のバランスの式を鉛直方向に 0 から z まで積分すると

$$p(r, z) = \rho g \left(h(r) - z\right) \tag{10}$$

が得られることを示しなさい．なお，簡単化のために液面 $z = h$ における圧力 $p(r, h)$ は 0 とする．**（注：導出の過程がわかるように解答しなさい．）**

(e) 液体は剛体運動をしていると仮定する．即ち，液体の回転角速度を ω とすると，$V = r\omega$ である．このとき， (6) と (10) を利用して，液体の形 h を r の関数として求めなさい．

4. 理想気体の状態方程式に従う流体の断熱運動に関する以下の設問に答えなさい．
静止状態における温度，圧力，密度をそれぞれ T_0, p_0, ρ_0 で表し，これらは全て空間的に一様であるとする．この基本状態からの断熱的な微小な揺らぎが従う方程式系は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p' \tag{11}$$
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}' = 0 \tag{12}$$
$$p' = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S \rho' \tag{13}$$

となる．ここで prime の付いた物理量は全て基本状態からの揺らぎであり，S はエントロピーである．(11)〜(13) に従う方程式系には $c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S}$ の速さで伝播する波動が存在する事を示しなさい．（ヒント：(11)〜(13) を変形して波動方程式の形に直す．もしくは平面波解を仮定して，それを代入することにより位相速度が c_s で伝播する解が存在することを証明する．）

5. 安定な密度成層流体中には Brunt–Väisälä 振動数 N に比例した振動数を持つ振動現象が存在する．ここで, N は温位 θ, 重力加速度 g を用いて

$$N^2 \equiv \frac{g}{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} \tag{14}$$

と表される．密度の鉛直方向の減少率 $-\frac{g}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}$ と N との間には,

$$-\frac{g}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} = N^2 + \frac{g^2}{c_s^2} \tag{15}$$

の関係が成り立つことを示しなさい．ここで, c_s は音波の位相速度である．