2005 年度　地球流体力学　学期末試験

担当：岩山隆寛

試験日：2005 年 7 月 12 日

解答に際しての注意：ベクトルとスカラーの違いに注意すること！ベクトルは太文字で表す．

1.　流体力学の基礎方程式に関する以下の設問に答えなさい．(配点 35 点)

流体力学の基礎方程式は，物理学における 3 つの重要な保存則 (　A　), (　B　), (　C　) を具体的に数式で書き表したものにより構成される．

例えば，z 軸を回転軸として，$f/2$ の一様な回転角速度で回転する座標系から眺めた非粘性流体の基礎方程式は，以下の式で与えられる:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} + f \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p - g \boldsymbol{e}_z, \tag{2}$$

$$c_p \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = J. \tag{3}$$

ここで，ρ は密度，$\boldsymbol{v}$ は流速，$\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトル，p は圧力，g は重力加速度，c_p は定圧比熱，T は温度，J は単位時間・単位質量あたりの加熱率である．なお，座標系の回転に伴う遠心力は，重力には繰り込んでいることに注意しなさい．

(a) (　A　) を具体的に書き表した数式が (1) である．(　A　) にあてはまる適切な言葉，及び (1) 式の名称を答えなさい．

(b) (　B　) を具体的に書き表した数式が (2) である．(　B　) にあてはまる適切な言葉及び (2) 式の名称を答えなさい．

(c) (　C　) を具体的に書き表した数式が (3) である．(　C　) にあてはまる適切な言葉及び (3) 式の名称を答えなさい．

(d) 流体力学には現象を記述する 2 つの記述法が存在する．それぞれの記述法の

名称とその特徴について述べなさい．

(e) 方程式 (1)〜(3) に示されているように，流体力学には 2 つの時間微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ が存在する．後者の微分の名称，それぞれの微分の特徴について述べなさい．さらに前者と後者を結びつける関係式を書きなさい．(**ただし，関係式はベクトル形式で表現しなさい．**)

(f) (1), (2) を $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ を用いて表現しなさい．

(g) (2) の左辺第 3 項の名称および物理的意味 (この項の成因，力の働く向き，エネルギーに対する寄与など) を答えなさい．

2. 円筒形の容器に密度が一様な非圧縮性流体（液体）が入っている．この液体が円筒容器の中心軸を中心とした剛体回転運動をしている場合に液面の形を考察する．以下の設問に答えなさい．(配点 45 点)

座標系 ：円筒容器の底面の中心 O を原点とし，円筒の中心軸を z 軸とする円筒座標系 (r, θ, z) で現象を記述することにする．r, θ, z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$ と表す．

慣性系の運動方程式 ：速度場を $\boldsymbol{v} = V(r)\boldsymbol{e}_\theta$，流体の粘性を無視したとき，(2) を r, θ, z 方向成分に関する式に展開すると，それぞれ

$$-\frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{4}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \tag{6}$$

となる．ここで p は圧力，ρ は密度，g は重力加速度で一定とする．

上記の方程式の導出の際の注意 ：円筒座標系における微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{7}$$

と表される．また，単位ベクトルの空間微分のうち，ゼロでないものは以下の２つである：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta. \tag{8}$$

(a) ベクトル形式の運動方程式 (2) から，(4) を導出しなさい．((2) **は回転系の運動方程式，**(4) **は慣性系の運動方程式であることに注意しなさい．**)

(b) (6) は鉛直方向の力のバランスを表す．このバランスの式の名称を答えなさい．

(c) バランスの式を鉛直方向に 0 から z まで積分すると

$$p(r, z) = \rho g\,(h(r) - z) \tag{9}$$

が得られることを示しなさい．なお，簡単化のために液面 $z = h$ における圧力 $p(r, h)$ は 0 とする．（**注：導出の過程がわかるように解答しなさい．**）

(d) 液体は剛体運動をしていると仮定しているので，その回転角速度を ω とすると，$V = r\omega$ となる．このとき (4) と (9) を利用して，液体の形 h を r の関数として求めなさい．

3. 鉛直 1 次元の静止大気を考える．圧力 p, 密度 ρ の間には以下の式

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{10}$$

が成り立つ．(10) と理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \tag{11}$$

を用いて, 温度 T_0 の等温大気では，気圧の鉛直プロファイルは指数関数

$$p(z) = p(0)\exp(-z/H), \tag{12}$$

$$H = \frac{RT_0}{g}, \tag{13}$$

になることを示しなさい．ここで，R は気体定数，g は重力加速度で定数であるとする．(配点 20 点)