

# 地球流体力学講義ノート

岩山隆寛

平成17年7月4日



# 目次

第-1章	はじめに	1
-1.1	授業のテーマと目標	1
-1.2	成績の評価方法	2
-1.3	教科書・参考書	2
-1.4	連絡先	4
-1.5	その他	5
第0章	種々雑多な補足	7
0.1	座標系	7
0.2	表記 (notation)	7
0.2.1	ベクトル	7
0.2.2	単位ベクトル	7
0.2.3	位置ベクトル	8
0.2.4	速度場	8
0.2.5	偏微分	9
0.3	Gauss の定理	9
0.4	Stokes の定理	9
第1章	序論	13
1.1	連続体の概念	13
1.2	流体粒子	14
1.3	応力	15
1.4	流体の定義	16
1.5	気圧傾度力	17
1.5.1	幾つかの考察	20
1.6	流体の種類	21
1.6.1	完全流体と粘性流体	21
1.6.2	圧縮性	22

<b>第 2 章</b>	<b>流れの記述</b>	<b>25</b>
2.1	流れを表す物理量 . . . . .	25
2.2	流れを表す方法 . . . . .	26
2.2.1	Lagrange の方法 (Lagrange 的記述) . . . . .	26
2.2.2	Euler の方法 (Euler 的記述) . . . . .	28
2.3	保存則 . . . . .	30
2.4	流線と流跡線 . . . . .	31
2.4.1	流線 . . . . .	31
2.4.2	流跡線 . . . . .	32
<b>第 3 章</b>	<b>流体力学の基礎方程式</b>	<b>33</b>
3.1	連続の式 . . . . .	33
3.1.1	Lagrange 的立場からの導出 . . . . .	33
3.1.2	Euler 的立場からの導出 . . . . .	34
3.2	運動方程式 . . . . .	36
3.2.1	Lagrange 的立場からの導出 . . . . .	36
3.2.2	Euler 的立場からの導出 . . . . .	37
3.3	エネルギー論 . . . . .	40
3.4	熱力学的エネルギーの方程式 . . . . .	42
<b>第 4 章</b>	<b>状態方程式</b>	<b>45</b>
4.1	状態方程式の例 . . . . .	45
4.1.1	理想気体 . . . . .	45
4.1.2	Boussinesq 流体 . . . . .	46
4.2	順圧流体の状態方程式 . . . . .	47
4.2.1	非圧縮一様流体 . . . . .	48
4.2.2	断熱変化する流体 . . . . .	48
4.3	温位 . . . . .	49
<b>第 5 章</b>	<b>大気の鉛直構造</b>	<b>51</b>
5.1	測高公式 . . . . .	51
5.2	乾燥大気の鉛直方向の安定性 . . . . .	53
5.2.1	乾燥断熱減率 . . . . .	55
5.2.2	Brunt-Väisälä 振動数 . . . . .	56
<b>第 6 章</b>	<b>流体力学の基礎方程式の解の例：音波とその周辺</b>	<b>57</b>
6.1	状況設定 . . . . .	57

6.2	線形近似 . . . . .	57
6.3	波動方程式 . . . . .	59
6.4	縦波・横波と圧縮条件の関係 . . . . .	61
6.5	波動解の種類 . . . . .	61
<b>第 7 章</b>	<b>回転系上の運動方程式</b>	<b>63</b>
7.1	Coriolis の力 . . . . .	63
7.2	回転系における運動方程式 . . . . .	67
7.3	球座標系 . . . . .	68
7.4	実効重力 . . . . .	68
7.5	球座標系での運動方程式 . . . . .	71
7.6	$\beta$ 平面近似 . . . . .	73
<b>第 8 章</b>	<b>運動方程式の簡単な応用</b>	<b>77</b>
8.1	バランスした流れ：傾度風平衡 . . . . .	77
8.2	傾度風平衡の吟味 . . . . .	79
8.3	幾つかの特殊な場合 . . . . .	81
8.3.1	Rossby 数 . . . . .	81
8.3.2	旋衡風平衡 : ( $Ro \gg 1$ の場合) . . . . .	81
8.3.3	地衡風平衡 : ( $Ro \ll 1$ の場合) . . . . .	81
8.3.4	慣性振動 . . . . .	82

# 第-1章 はじめに

## -1.1 授業のテーマと目標

本講義で扱う地球流体力学とは大気・海洋の運動を統一的に理解するために必要となる基本的な力学的概念を考察する学問分野である。<sup>1</sup>

物質の三態, 即ち, 固体, 液体, 気体のうち, 液体と気体は力を加えると変形し, 流れるという共通の性質を持っている. そこで, 気体と液体を一括して流体 (fluid) と呼び, その運動を調べる学問分野として流体力学(fluid dynamics) が Newton の時代より発展し続けている. 地球上に存在する気体・液体である大気・海洋 (これらを一括して地球流体 (geophysical fluid) と呼ぶ) も共通の流体力学的特性を持っている, と考えるのは, ごく自然な推論であろう. また, 大気と海洋は共に地球という回転系上で重力場中に存在し, 重力の効果によって軽い流体が重い流体の上に積み重なった密度成層状態にある. このように考察の対象である大気・海洋が同様な環境に存在しているという点からも, それらの運動が統一的に記述・理解できるであろうことは容易に想像がつく.

地球流体力学は, 通常, 流体力学を学んだあとに, その応用・発展 (回転系上の密度成層流体力学) として論じられる. すなわち, 通常の地球流体力学のテキストや講義では, 流体力学は既知であるとして議論を進めていくのである. しかしながら, 本大学理学部では流体力学の講義が開講されていないので, 本講義では, 密度成層や回転の効果を考慮しない流体力学の基礎から話を始める. まず, 流体現象を記述するための方法を解説し, 基礎方程式の導出を行う. さらに地球流体現象を記述する上で基本的概念となる渦と波の解説を行う.<sup>2</sup> 特に本講義では流体力学や地球流体力学の物理学的学問体系に力点を置く. そこで, 本講義で述べた基本概念を用いて大気・海洋現象がどのように記述できるのか, については, 山中大学教授担当の「大気水圏科学」の受講や, 以下に挙げる参考書を参照して欲しい.

---

<sup>1</sup>最近では地球流体力学は大気や海洋のみならず, 地球内部に存在するマンツルの運動など, 一般に回転系上の流動現象を扱う学問と拡張され, 位置づけられている.

<sup>2</sup>地球流体力学におけるその他の重要な基本概念である「不安定性」については, 修士課程対象の「大気水圏科学特論 II」で, 「乱流」については博士課程対象の「地球流体物理学」で講述する.

## -1.2 成績の評価方法

学期末に行う試験により評価する。なお、授業中に適宜出すレポートを試験の点数に加味する。

## -1.3 教科書・参考書

教科書は特に指定しない。幾つか推薦図書を挙げておく。将来、気象学の勉強や研究を志す者は流体力学のテキストを一冊ぐらいは手元に持っておくことを勧める。

- 流体力学

1. 今井功, 「流体力学(前編)」(裳華房) 【一般～研究者向け】

著者は航空力学の専門家で、文化勲章受賞者である。著者は応用数学にも強く、特殊関数などの本も執筆している。残念ながら前編出版後30年経っても後編は出版されていない。<sup>3</sup> この本では粘性のない流体(完全流体)の力学から説き起こし、渦のない流れ、渦運動の力学、そして粘性流体へと議論を進めている。渦運動の章は特に詳しく、世界的に見てもこの本ほど詳しく渦運動を詳しく扱っている本は他にない。波を扱った章は残念ながら(後編に掲載される予定である)。なお、この書籍のコンパクト版的な書籍として、今井功, 「流体力学」(岩波書店)が出版されている。(私はまずこの全書版で流体力学の勉強をした。)

2. 巽友正, 「流体力学」(培風館, 新物理学シリーズ21) 【一般向け】

著者は乱流理論の専門家で、準正規理論と呼ばれる乱流の解析的理論の基礎を提唱した。今井著「流体力学」との大きな違いは、粘性流体の運動方程式から話をはじめ、比較的初めの章で波の運動を扱っている点である。また、今井著「流体力学」では書かれていない「乱流への遷移」や「乱流の統計理論」についての章が設けられていることも特徴のひとつである。<sup>4</sup>

最近、この本に準じた内容で初学者向けの「巽友正, 「連続体の力学」(岩波書店, 岩波基礎物理シリーズ)」が出版されている。

<sup>3</sup>今井先生は誠に残念ながら2004年秋に亡くなったので、流体力学(後編)は未完となった。

<sup>4</sup>実在の流体は少なからず粘性を持っているために、まず実在する流体としての粘性流体を記述する上での概念や基礎方程式の導出を行い、数学的に扱いやすい理想的な非粘性流体の運動は、粘性流体の近似として位置づけている。しかしながら、このような構成にするとテンソルがテキストのはじめの方に登場し、たいいていの人はこのテンソルの理解に苦しみ、流体力学の勉強をあきらめるようである。

3. 谷一郎, 「流れ学 第3版」(岩波書店, 岩波全書 136)【初学者～一般向け】

流体力学の入門書を意図して書かれた本で, 多くの流体力学の教科書が数学的側面を強調して, 書かれているのに対し, 本書は物理的な解釈に重点を置くように書かれた本である. 1967年の出版以来 37年経つがいまだに読みつがれている名著.

4. 木田重雄, 「なっとくする流体力学」(講談社)【初学者向け】

講談社の "なっとくするシリーズ" の1冊.<sup>5</sup> 著者は流体力学, 特に乱流理論の世界的に有名な研究者であり, 近年「乱流力学」という450ページの大著も著している. 他の "なっとくする" シリーズと同様に, 難しい数式を極力減らし, 基本的な考えを丁寧に解説している. またベクトル解析の詳しい説明が付録についていることも特徴である.<sup>6</sup>

5. G. K. Batchelor, 「An Introduction to Fluid Mechanics」(Cambridge U. P.) 【一般～研究者向け】

著者は乱流理論の専門家で, 流体力学で最も権威ある雑誌 Journal of Fluid Mechanics の創刊者である. 残年ながら 1999年に亡くなった. 日本語訳が電機大学出版会から発行されている(訳者: 橋本英典, 松信八十男).

6. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 「Fluid Mechanics」(Pergamon Press) 【一般～研究者向け】

物理学を学ぶ者は必ず手にする Landau - Lifshitz 理論物理学教程の1冊. Landau は 1962年のノーベル物理学賞受賞者. 東京書籍から翻訳が出版されている.

7. S. H. Lamb, 「Hydrodynamics」(Cambridge U. P.) 【一般～研究者向け】

1879年に初版が発行された流体力学の教科書の古典中の古典. 著者は Sir の称号を持つ. 現在手に入る版は第6版. 東京書籍から翻訳が出版されている.

- 地球流体力学 (気象力学)

1. 小倉義光, 「総観気象学入門」(東京大学出版会)【一般向け】

2000年に出版された教科書. 総観気象学とは, 総観規模現象 (高気圧

---

<sup>5</sup>地球惑星科学科の学生であれば, 松田卓也 教授の書かれた「なっとくする相対性理論」はよく知っているであろう. この序文は大変面白い. 是非一読を勧める.

<sup>6</sup>本書はベクトル解析の教科書としても適当である.



や低気圧などの天気図に描かれる程度の大きさを持った気象現象)を扱う気象学の一分科である。このテキストは文科系・理科系を問わず大学1～2年生程度の学生の気象学のテキストとして名高い小倉義光「一般気象学(第2版)」(東京大学出版会)を読み終えた人を対象に、流体力学と熱力学を基礎に気象現象を解説している。序文では程度は理科系の大学3～4回生向け、とあるが、私が読んだ印象としては大学院生レベルの教科書である。

2. J. Pedlosky, 「Geophysical Fluid Dynamics」(Springer) 【一般～研究者向け】

地球流体力学のテキストとしては最も有名。700ページ超の大著である。2003年に上記書籍のコンパクト版的存在の「Waves in the ocean and atmosphere」(Springer)が出版された。これはページ数250ページほどで21の章に分かれていて読みやすい。タイトルにもあるように波に特化した本である。

3. R. Salmon 「Lecture on Geophysical Fluid Dynamics」(Oxford U. P.) 【一般～研究者向け】

1998年に出版された地球流体力学のテキスト。Hamilton形式の流体力学の章が特徴。

4. 小倉義光, 「気象力学通論」(東京大学出版会) 【一般向け】
5. 木村龍治, 「地球流体力学入門: 大気と海洋の流れのしくみ」(東京堂出版, 気象学のプロムナード13) 【一般向け】

- 気象学一般

1. 小倉義光, 「一般気象学(第2版)」(東京大学出版会) 【初学者向け】  
大学の教養課程科目としての気象学のテキストとしては最も有名。

## -1.4 連絡先

授業に対する質問や要望がある人は授業中(講義を中断してもかまわない)にするか、居室(自然科学研究科棟3号館西502号室)にくること。

e-mail: iwayama@kobe-u.ac.jp

へ電子メールを送ってもかまわない。ともかく遠慮なくどうぞ。講義に使う資料は授業中に配布するが、私のホームページ

<http://www.ahs.scitec.kobe-u.ac.jp/~iwayama/>

からもダウンロードできる。

## -1.5 その他

学生の授業評価を総合すると、私の講義は、“板書の量が極めて多く、また速いために、授業中はノートに板書を書き写すのが精一杯で、理解にいたるには程遠い”，そうである。講義中に板書する内容は本ノートのようにプリントとして配るので、積極的に活用してほしい。



# 第0章 種々雑多な補足

## 0.1 座標系

本講義ではほぼ全体を通じてデカルト座標系 (Cartesian coordinate) をもちいて現象を記述する。地球の流体现象の記述には、流体が球面上に束縛されているから本来ならば球面座標系を用いて記述するべきであるが、数学的取り扱いを簡単にするためにデカルト座標系を用いることにする。<sup>1</sup> その他の座標系を用いる場合には、その都度それを説明することにする。

## 0.2 表記 (notation)

### 0.2.1 ベクトル

ベクトル量は、高校数学で習った上付きの矢印ではなく、太字であらわす。すなわち、 $\vec{A}$  ではなく  $A$  である。

### 0.2.2 単位ベクトル

デカルト座標系における  $x, y, z$  方向の単位ベクトルは、慣例にしたがってそれぞれ  $i, j, k$  で表す。また、時として  $e_1, e_2, e_3$  という表記を用いる。<sup>2</sup> ここで

$$e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k, \quad (1)$$

である。

地球流体力学では慣例として  $x, y, z$  方向をそれぞれ、東向き、北向き、鉛直上向きに取る。

---

<sup>1</sup>運動が球面上の比較的狭い領域に限られている場合には、球面上に局所的にデカルト座標系を張ることができる。

<sup>2</sup>和の規約を用いるときにはこのような表記が便利である。

### 0.2.3 位置ベクトル

位置ベクトルは、慣例にしたがって  $r$  もしくは  $x$  と表す.<sup>3</sup> デカルト座標系では、 $r$  を成分表示すると

$$r = x i + y j + z k \quad (2)$$

と表される. ここで、 $x, y, z$  はそれぞれ  $r$  の  $x, y, z$  成分である. 高校数学で習ったように  $r = (x, y, z)$  という表記よりも、(2) のような単位ベクトルを明示する表記を用いる方を薦める.<sup>4</sup>

なお、(1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (3)$$

と記す.

### 0.2.4 速度場

速度場は  $v$  で表す. デカルト座標系で成分表示すると、

$$v = u i + v j + w k \quad (4)$$

である.  $u, v, w$  はそれぞれ  $v$  の  $x, y, z$  方向の成分である.<sup>5</sup> なお、(1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \quad (5)$$

と表記する.

<sup>3</sup>これは記述する座標系には依存しないことに注意すべきである.

<sup>4</sup>デカルト座標系のような直線直交座標系では、どちらの表記を用いても大差ないが、曲線座標系を用いる場合には、顕著である. この例は後の章で示す.

<sup>5</sup>気象学の慣例に拠れば、西風 (westerly:  $u > 0$ ), 東風 (easterly:  $u < 0$ ), 北風 (northerly:  $v < 0$ ), 南風 (southerly:  $v > 0$ ) と風 (流体) の流れてくる方向を指し示すのに対し、海洋では、これらはそれぞれ東向き流れ (eastward:  $u > 0$ ), 西向き流れ (westward:  $u < 0$ ), 南向き流れ (southward:  $v < 0$ ), 北向き流れ (northward:  $v > 0$ ), と流体の流れる向きを指し示す、という違いがある.

### 0.2.5 偏微分

偏微分記号,  $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  は簡単化のために,  $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$  と記す場合がある.  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$  の場合には,  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  と書く. このような表記では微分演算子  $\nabla$  は

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6)$$

$$= i \partial_x + j \partial_y + k \partial_z, \quad (7)$$

$$= e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3 \quad (8)$$

となる.

## 0.3 Gauss の定理

閉曲面  $S$  で囲まれた体積  $V$  について, 以下の2つの定理が成り立つ.<sup>6</sup>

I: 任意のベクトル  $v$  に対して以下の式がなりたつ:

$$\iiint_V \nabla \cdot v \, dV = \iint_S v \cdot dS, \quad (9)$$

ここで,  $dS$  は法線ベクトル  $n$ , 微小面積  $dS$  を持つ面積要素である.

II: 任意のスカラー  $Q$  に対して以下の式がなりたつ:

$$\iint_S Q n_i \, dS = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial x_i} \, dV, \quad (10)$$

ここで,  $n_i$  は法線ベクトル  $n$  の  $i$  方向の成分である.

I が通常の (電磁気学で登場する) Gauss の定理である.

演習問題:

(10) を証明しなさい.

## 0.4 Stokes の定理

任意のベクトル  $v$  に対し, 以下の式が成り立つ:

$$\oint_C v \cdot dr = \iint_S (\nabla \times v) \cdot dS. \quad (11)$$

<sup>6</sup>部分積分を行うことにより, 証明できる.

ここで  $S$  は閉曲線  $C$  を縁とする任意の曲面である。つまり、 $C$  は固定されているのに対して、 $S$  はどんな形でもよい。また、 $S$  は閉曲面でないことに注意せよ。 $n$  は  $S$  上に立てられた外向き法線である。曲面  $S$  上に立てられた法線ベクトルは、線積分において  $C$  上を右回りに進むときに、右ネジの進む方向にとる。

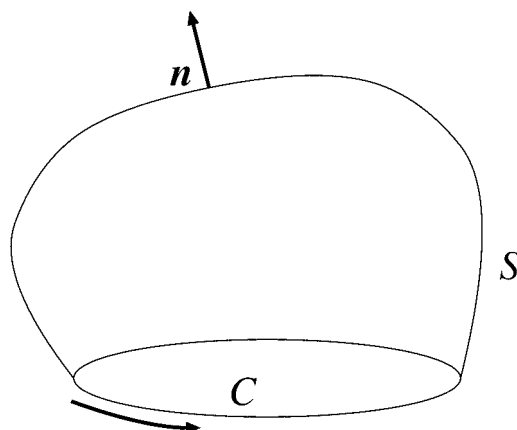


図 1: Stokes の定理を適用する閉曲線  $C$ ,  $C$  を縁とする曲面  $S$ , および曲面上の法線ベクトル  $n$  の関係.

#### 演習問題

$S$  を任意の閉曲面とすると、積分

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad (12)$$

を証明しなさい。ここで  $\boldsymbol{v}$  は任意のベクトルである。

ヒント 1 : Stokes の定理を使って計算をする。通常 Stokes の定理は閉曲線  $C$  に沿った線積分を面積積分に直すときに用いる。すなわち、(11) を左から右にたどる。しかし、ここではその逆をたどる。

ヒント 2 : Stokes の定理を使うためには、問題の閉曲面を 2 つに割る。例えば、閉曲面として球 (地球) を想像し、それを大円 (赤道) で 2 つに割る。そうすると各々の半球 (北半球と南半球) は、Stokes の定理が要求している閉曲線 (赤道) を縁とする曲面になる。北半球側で面積積分を実行するとき、面積積分を Stokes の定理を用いて線積分に変換する。赤道上で積分する際の積分経路の向きに注意する。(東向きか西向きか)

即ち, (12) 式の積分を 2 つに分割し, それぞれに付いて Stokes の定理を適用して積分値を見積もる. (任意の閉曲面として, このヒントのような球 (地球) を想像してもよい.)

ヒント 3 : (あるいは別解) : デカルト座標系を採用し, (12) の積分を具体的に書き表すと

$$\iint_S (\partial_x v - \partial_y u) dx dy \quad (13)$$

となる. 上記の積分を実行し,  $S$  が閉曲面, 即ち物理量は  $x, y$  について周期的であるとして値を見積もる. (これは閉曲面をドーナツ状のものと考えている場合に相当する.)





# 第1章 序論

本節では、古典力学 (特に質点の力学) と流体力学との相違を強調しつつ、流体力学の理論体系の特徴について述べる。

## 1.1 連続体の概念

すべての物質は原子や分子などの粒子より構成されるが、このような微細構造に立ち入らず質量が連続的に分布した (密度が時間、空間の連続関数として与えられる) 仮想的な物体、連続体、として流体を取り扱うのが流体力学の立場である。このような近似は連続体近似と呼ばれる。古典力学では、物体を有限の質量を持つが大きさを持たない質点やその質点の集合体 (質点間の距離が変化しない理想的な物体が剛体である) と理想化し物理現象を記述する。連続体近似という理想化は、このような古典力学における質点や剛体といった理想化に対応するものである。

上記のような連続体近似のもと、流体力学では、密度や速度、温度などの物理量が、時空間内の場の量 (位置ベクトル  $\mathbf{r}$  や時間  $t$  の連続関数) として与えられるものとする。

連続体近似は、流体内部のある点  $P$  における物理量の値を、 $P$  を含む微小体積  $\delta v$  について、その物理量の平均値をもって定義することにより実現される。いま、流体は質量  $m$  を持った原子もしくは分子で構成されているとし、 $\delta v$  内に含まれる原子・分子の個数を  $N$ 、点  $P$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  と表すと、点  $P$  における密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{Nm}{\delta v} \quad (1.1)$$

で定義される。

一般に  $N$  は  $\delta v$  の大きさや  $t$  に依存して値が揺らぐために、 $\rho(\mathbf{r}, t)$  も値が揺らぐ。 $\rho(\mathbf{r}, t)$  が時間、空間の連続関数として与えられるためには以下の2つの条件が必要である。

- 考える現象の空間スケール  $L \gg (\delta v)^{1/3} \gg$  流体を構成している原子・分子の平均自由行程<sup>1</sup>  $\lambda$ 。

<sup>1</sup>原子・分子が他の原子・分子と衝突せずに運動できる平均的距離。

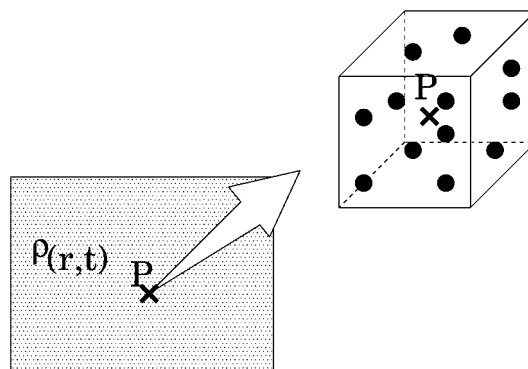


図 1.1: 連続体では密度  $\rho$  は時間空間の連続関数である. 点  $P$  における密度は,  $P$  を中心とする微小な体積要素に含まれる原子・分子の質量の平均値で定義する.

もしくは  $\lambda$  と  $L$  の比

$$K = \frac{\lambda}{L} \quad (1.2)$$

を定義し,  $K \ll 1$  のときである.  $K$  は特に Knudsen 数と呼ばれる.

- 考える現象の時間スケール  $T \gg$  流体を構成している原子・分子の平均緩和時間<sup>2</sup>  $\tau$ .

例: 以下に良く知られた気象現象のもつ特徴的な空間・時間スケールを示す.

標準気圧, 0°C の空気	$\lambda \sim 10^{-7}$ m	$\tau \sim 10^{-10}$ s
海陸風	$L = 1 \sim 10$ km	$T \sim 12$ h
高低気圧 (総観規模現象)	$L \sim 10^3$ km	$T \sim 10$ day

このように気象現象の取り扱いには, 連続体近似が適用できることがわかる.

## 1.2 流体粒子

流体力学ではしばしば流体粒子(fluid parcel/fluid particle)という言葉が登場する. これは, 流体を構成している原子・分子などの粒子を言い表しているのではなく,  $\delta v$  程度の大きさをもった流体の微小な塊のことである. すなわち, 流体粒子の中には無数の原子・分子が含まれているが, 考察の対象とする現象に比べて極めて

<sup>2</sup>個々の原子・分子が持っている運動エネルギーに差異ができた時に, それを衝突によって一様化するのに必要な平均的時間.

小さく、点とみなすことができるような流体の一部分のことを指している。流体力学では、このような流体粒子に働く力を調べ、その運動を記述する運動方程式を立て、その解を調べることにより流体の運動を考察する。

## 1.3 応力

古典力学では、Newtonの第二法則より、考察する物体に働く力の総和はその物体の運動量の時間変化率に等しい、として運動方程式をたてる。さらに、その方程式を解くことにより物体の運動状態を理解することができる。流体力学でも同様に流体粒子に働く力の総和が、流体粒子の運動量の時間変化率に等しいとして運動方程式を立て、それを解き、流体の運動を考察する。そこで、ここでは流体に働く力について考えてみる。

連続体に働く力には次の二種類がある。

- 体積力(body force) : その大きさが物質の質量や体積に比例する力。これは重力、遠心力、Coliois力などがその例であり、質点の力学でもおなじみのものである。
- 面積力(surface force) : 面を通して作用し、その大きさは、面の大きさに比例する。この力は、物質を構成する原子の相互作用に由来するもので、力の及ぶ範囲は要素の表面の極く薄い層に限られる。これは連続体特有の力である。

単位面積あたりに働く面積力を応力(stress)と呼ぶ。これは MKS 単位系では  $\text{Nm}^{-2}$  の次元を持つ。“力”という言葉がついているが、その次元は力の次元  $\text{N}$  ではないことに注意すべきである。

連続体中の点  $P$  における応力は、点  $P$  を通る平面  $S$  を選び、 $S$  上の  $P$  を含む単位面積を通して両側の連続体が及ぼしあう力 (法線  $n$  の正の側から負の側へ及ぼす力) で定義し、 $T_n$  と表す。したがって  $T_n$  は  $S$  の選び方、すなわち法線  $n$  に依存する。また、力はベクトル量であるから大きさと方向を持つ。したがって  $T_n$  は2つの方向と1つの大きさによって定まる。これは、数学的には2階のテンソル(tensor)と呼ばれ、9個の成分、 $\tau_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )、を持つ量である。したがって、 $\tau_{ij}$  は応力テンソルと呼ばれる。 $x_j$  軸に垂直な平面を通して、 $x_j$  軸の大きい側から小さい側へ作用する  $x_i$  方向の力を  $\tau_{ij}$  と定義する。

作用・反作用の法則を考えると、

$$T_{-n} = -T_n \quad (1.3)$$

の関係がある。

応力を面の接線方向の成分と法線方向の成分に分解し, それぞれを接線応力(tangential stress), またはせん断応力(shear stress), 法線応力(normal stress) と呼ぶ. 法線応力は, 面の両側が押しあう場合は圧力(pressure), 引っ張りあう場合は張力(tension) となる.

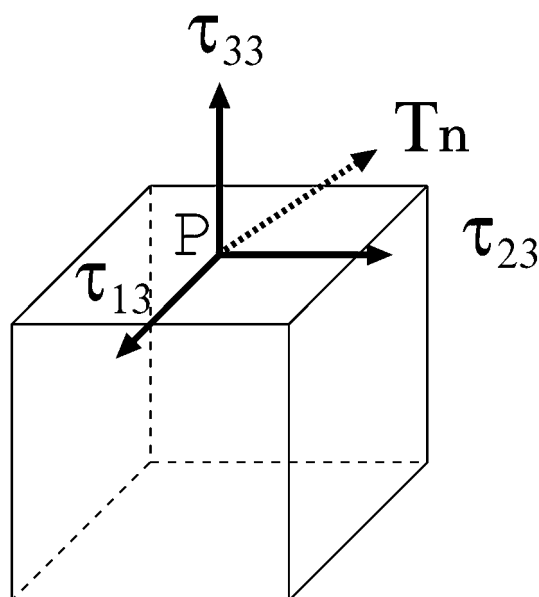


図 1.2: 点 P を通る  $z$  軸に垂直な平面を考える. このとき, P に働く応力  $T_n$  は平面に水平な成分  $\tau_{13}, \tau_{23}$  と垂直な成分  $\tau_{33}$  に分解できる.

## 1.4 流体の定義

先に, 気体と液体を一括して流体と呼ぶと述べたが, 先に定義した応力の概念を用いると, 流体は以下のように明確に定義できる: “静止状態では接線応力が現れず, かつ法線応力が圧力である連続体を流体と定義する.” ここで, 「静止状態では」という断りが重要である. なぜなら, もし接線応力が現れたら, 僅かの力で変形するという性質のために, 流体は静止状態にあり得ない. また, 法線応力が張力の場合には, その面から流体は裂けてしまうからである.

法線応力に関して次の性質が証明できる. “静止状態, 運動状態を問わず接線応力が常に 0 ならば, 法線応力は考える面の選び方によらない.” これは, 接線応力が常に 0 ならば, 応力が圧力のみで等方テンソルであることを述べている.

—————[証明]—————

[問題設定:] 点 P を頂点とし、底辺が微小な三角形 PAB, 高さが単位長の三角柱を考える. PA, PB, AB に働く法線応力 (圧力) をそれぞれ  $p_1, p_2, p_3$ , とする. また,  $PA = l_1, PB = l_2, \angle A = \alpha_1, \angle B = \alpha_2$  とする.

- 静止状態で体積力が働いていない場合: 微小物体に働く圧力の AB 方向の成分は,

$$p_1 l_1 \sin \alpha_1 - p_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

正弦定理

$$\frac{\sin \alpha_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_2}{l_1}$$

より,

$$p_1 = p_2.$$

したがって圧力は P を通る平面の選び方に依存しない.

- 静止状態で体積力が働いている場合: 体積力は上記のような微小物体を考えたときに  $O(l^2)$  の大きさで、面積力に比べて高次の微量になる. したがって,  $l$  が非常に小さい場合には, 体積力の効果は面積力の効果に比べて無視できる. したがって, 先の議論が適用できる.
- 運動状態の場合: 質量と加速度の積を D'Alembert の原理によって慣性力として静力学 (静止状態) の問題に帰着させる. さらに慣性力は体積力であるから, 先の議論がそのまま適用できる.

—————[証明終了]—————

## 1.5 気圧傾度力

1.3 節で流体に働く力は体積力と面積力に分類でき, 単位面積あたりに働く力は応力と呼ばれと説明した. 流体粒子に関する運動方程式をたてるときには, 流体に働く力として体積力はそのままの形で方程式中の項に現れるが, 面積力 (応力) に関しては, そのままの形では現れてこない. このことは例えば体積力である重力が鉛直方向の単位体積あたりの流体粒子の運動方程式に  $\rho g$  という形で現れ, これが  $\text{N/m}^3$  という単位体積あたりの物体に働く力の次元を持つのに対し, 応力はそのままでは  $\text{N/m}^2$  という  $\rho g$  とは異なる次元を持つことから察することができるであろう.

本節では, 静止した流体を考え, これを構成する流体粒子に働く力がバランスしている, という考えから, 流体粒子に働く正味の圧力について考えてみることにする.

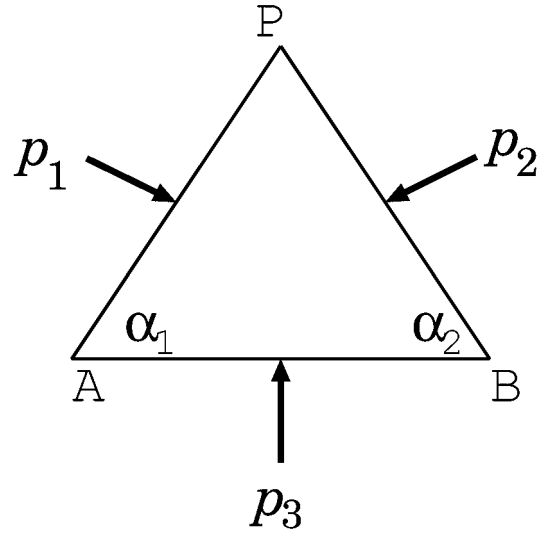


図 1.3: 点 P を頂点とする単位高さの微小な三角柱に働く面積力.

重力場中で密度  $\rho$  を持つ流体の静止状態を考える. 図 1.4 で表される状況で, 注目する流体要素 (底面積  $dS$ , 厚さ  $dz$ ) に働く力を考える. 流体要素に働く力は, 重力 (体積力) と圧力 (面積力) のみである.<sup>3</sup> 流体要素上面には鉛直下向きに圧力に伴う面積力  $p(x, y, z + dz)dS$  が, 流体要素下面には鉛直上向きに圧力に伴う面積力  $p(x, y, z)dS$  が働いている. これと重力  $\rho g dz dS$  がつりあって流体は静止状態を保っている. したがって, 鉛直上向きを正の方向にとると力の釣合は,

$$-p(x, y, z + dz)dS - \rho g dz dS + p(x, y, z)dS = 0 \quad (1.4)$$

である.  $dz$  が微小のとき,  $p(x, y, z + dz)$  は

$$p(x, y, z + dz) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \mathcal{O}(dz^2) \quad (1.5)$$

と Taylor 展開できる. ここで,  $\mathcal{O}(dz^2)$  は  $dz$  の 2 次以上の微小量という意味である. この展開を (1.4) の第 1 項に適用し整理すると,

$$\left\{ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{O}(dz) - \rho g \right\} dz dS = 0. \quad (1.6)$$

上式を単位体積あたりに働く力で表現するため  $dz dS$  で割り, 更に  $dz \rightarrow 0$ ,  $dS \rightarrow 0$  の極限をとって流体粒子に働く力を求める. このとき,  $\mathcal{O}(dz)$  の項は消え,

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (1.7)$$

<sup>3</sup>1.4 節参照: 流体とは静止状態では応力は圧力のみである.

が得られる.

(1.7) 式は静力学平衡(hydrostatic balance)の式と呼ばれ, 地球流体力学における最も基本的なバランスの式の一つである.<sup>4</sup> 第二項は重力であるから鉛直下向きである. したがって正味の圧力は鉛直上向きに働きバランスを保っていることがわかる.  $\rho, g$  共に正の量である事から, (1.7) が成り立つためには,  $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$  でなければいけない. すなわち, 重力場中では気圧は高度と共に減少していく. (1.7) の第一項を見ると, 流体粒子に働く正味の圧力は  $p$  の空間微分によって与えられることがわかる. まったく同様な考え方で, 流体粒子に働く  $x, y$  方向の正味の圧力に伴う力は単位体積あたりそれぞれ  $-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}$  となる. ベクトル形式で書くと, 正味の圧力に伴う流体粒子に働く単位体積あたりの力は

$$-\nabla p \quad (1.8)$$

となる. この力は圧力 (気象では気圧) の勾配に比例するので, 圧力勾配力, または気圧傾度力 (pressure gradient force) と呼ばれる.

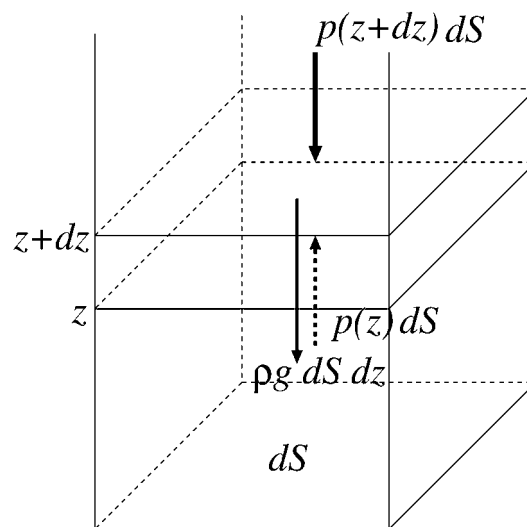


図 1.4: 重力場中における底面積  $dS$ , 高度  $z$  と  $z + dz$  の間にある密度  $\rho$  の流体に働く力.

<sup>4</sup>このバランスは鉛直方向に関するものである. 水平方向のバランスとして基本的なものは, Coriolis 力と水平方向の気圧傾度力がバランスした地衡流平衡 (geostrophic balance) である.



### 1.5.1 幾つかの考察

大気圧とは ...

いま簡単化のために大気は鉛直方向にのみ構造を持つとしよう ( $p$  は  $z$  のみの関数と考える) . このとき静力学平衡の式 (1.7) は常微分を用いて

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (1.9)$$

とかける . (1.9) を高度  $z$  から無限大まで積分する . ここで ,  $z \rightarrow \infty$  では大気は存在しない , すなわち  $p(z \rightarrow \infty) = 0$  とすると ,

$$p(z) = \int_z^{\infty} \rho g dz \quad (1.10)$$

が得られる . (1.10) は高度  $z$  における大気圧は底面積  $1 \text{ m}^2$  , 高さが  $z \sim \infty$  の気柱の中にある空気の重さに等しいことを言い表している .

#### 演習問題

地上気圧が  $1000 \text{ hPa}$  のとき ,  $1 \text{ m}^2$  の上空にある空気の質量を求めなさい . ただし , 重力加速度は高度に依存せず一定値  $g = 10 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  とする .

#### アルキメデスの原理

全節と同じ状況で , 底面積  $dS$  , 厚さ  $dz$  の流体要素の部分のみ密度  $\rho'$  を持つ別の物体 (流体でも , 固体でもかまわない) で置き換えたとする . このとき , 物体に働く力は (1.4) を参考にすると ,

$$-p(x, y, z + dz)dS - \rho'g dz dS + p(x, y, z)dS \quad (1.11)$$

となる . 第 1 項と第 3 項は前節の議論から  $\rho g dS dz$  に等しい . そこで , (1.11) は

$$(\rho - \rho')gdS dz \quad (1.12)$$

である . もし ,  $\rho > \rho'$  のとき , すなわち , 流体の密度よりも沈めた物体の密度の方が小さい場合は , (1.12)  $> 0$  となり , 物体は上向きの力を受ける . その力は , 物体の質量と物体の押し退けた流体の質量の差に比例する . これは例えば水を張った風呂桶に洗面器を逆さに静かに押し沈めたときに腕が受ける力である .

さて理化学辞典 [岩波書店] を紐解くと ,

浮力: (buoyancy force) “地球上 (一様な重力場中) では, 流体内にある物体にはその表面に作用する流体の圧力のため, 全体として上向きの力を受ける. これを浮力という. 浮力の大きさと作用点とは, 物体の押し退けた流体の重さと重心とに一致する (アルキメデスの原理)”

とある. 上記の文章でいう浮力は, (1.11) における

$$-p(x, y, z + dz)dS + p(x, y, z)dS \quad (1.13)$$

である. (1.13) に静力学平衡の関係を適用した時,

$$-p(x, y, z + dz)dS + p(x, y, z)dS = \rho g dS dz \quad (1.14)$$

となり, 浮力の大きさ (左辺) は物体が押し退けた流体の重さ (右辺) に等しいことがわかる. つまりアルキメデスの原理とは静力学平衡の式の言い換えである.

## 1.6 流体の種類

流体のもつ物性的性質によって, 流体をいくつかのカテゴリーに分類することができる.

### 1.6.1 完全流体と粘性流体

流体の隣り合った部分が異なる速度を持つとき, この速度差をなくすように接線応力が現れる性質が粘性(viscosity) である.<sup>5</sup>

- 完全流体(inviscid/perfect/ideal fluid): 粘性のない流体, すなわち運動中でも接線応力が現れない流体. 先の定理から, この流体に働く応力は圧力のみである. すなわち,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (1.15)$$

これは高度の理想化であるが, 自然現象をよく記述できる.

- 粘性流体(viscous fluid): 非完全流体のこと. 実在の流体は少なからず粘性を持っており, したがって実在の流体はすべて粘性流体である. 粘性流体で特に重要なものとして Newton 流体(Newtonian fluid) と呼ばれるものがある

<sup>5</sup>一般に物理量にムラ, 非均質性, があると, 物質を構成している原子・分子の微視的な乱雑運動によって, そのような不均一性をなくすように物理量の拡散が起こる. 運動量の拡散が粘性である.

る。これは速度勾配に比例する接線応力を生じるような流体のことである。Newton 流体では応力テンソルは

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (1.16)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.17)$$

で与えられる。 $\mu$  は粘性率 (coefficient of viscosity) と呼ばれる。Newton 流体は実在の流体の非常によく近似になっている。(1.16) で粘性係数  $\mu$  を 0 とすれば、それは (1.15) に帰着することがわかる。

補足： (1.16) の導出は、この講義では割愛する。導出の仕方は、たとえば先に紹介した異の教科書を参照のこと。(1.16) の導出には、応力は速度勾配に比例するであろうという物理的考察と、テンソルに関するいくつかの知識を必要とする。<sup>6</sup> 流体力学の教科書を自習するとき、初学者はまずここで壁にあたり、悪いケースでは流体力学の勉強をあきらめてしまう。テンソルをしらなくても流体力学のかなりの部分 (完全流体の力学) を語ることは可能であり、また地球流体现象では多くの場合、境界層<sup>7</sup>以外では、粘性の効果は重要ではなく、完全流体の力学によって説明される現象がほとんどである。そこで本講義ではテンソルの話はとりあえず後回しにして、テンソルを用いなくても語れる流体力学をまず講ずることにしている。

## 1.6.2 圧縮性

気体と液体の違いは、前者が容易に圧縮できるのに対して、後者は圧縮しにくいという点であろう。そこで縮む縮まないの区別は、気体・液体の区別のように思われがちである。しかしながら、流体力学では気体でも非圧縮性流体として取り扱うこともあるし、逆に液体でも圧縮性を考慮する場合がある。

流体の圧縮性によって生じる特徴的現象は音波である。<sup>8</sup> したがって流体の縮む、縮まないの区別は、音波を基準に区別され、必ずしも気体・液体の区別を指すものではない。音速を用いて流体を種別すると、

- 圧縮性流体 (compressible fluid)：音速が有限の速さで伝わる流体。

<sup>6</sup>といっても、任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和で書くことができる、といった程度のものであり、また2階のテンソルであればこれは行列の形に書き表すことができるので、線形代数学を知っていれば造作ないことである。

<sup>7</sup>これは固体壁のごく近傍に形成される。たとえばの地球大気では粘性が効く層は地表から数百メートルから1キロメートル程度の高さの大気層で、そこは全大気のせいぜい1割程度の質量の大気しか存在していない。

<sup>8</sup>音速  $c$  は等 entropy 状態において、圧力に対する密度の変化率によって定義される。すなわち  $c \equiv \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$ 。

- 非圧縮性流体(incompressible fluid)：音速が無限の速さで伝わる流体.

と言えよう.<sup>9</sup> 大気海洋の大規模な運動では, 現象の起こる速さが音速に比べて極めて遅いことから音波の影響は無視され, 地球流体力学では流体を非圧縮性流体と見做す.<sup>10</sup>

演習問題:

1. 理想気体の状態方程式  $p = \rho RT$ , 及び熱力学の第1法則  $T dS = c_v dT + p d(\frac{1}{\rho})$  を用いて, 断熱変化における圧力  $p$  と密度  $\rho$  の間になりたつ関係式  $p = C\rho^\gamma$  (Poisson の関係式) を導きなさい. ここで,  $T, S, c_v, R, C$  はそれぞれ温度, エントロピー, 定積比熱, 気体定数, 任意定数で,  $\gamma$  は定積比熱  $c_v$  と定圧比熱  $c_p = c_v + R$  との比,  $\gamma = c_p/c_v$  である.
2. 前問の結果を用いて, 気温 300 K の空気中を伝播する音波の速度  $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$  を求める.
  - (a)  $\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$  が速度の次元を持つことを確かめなさい.
  - (b)  $c_v = \frac{5}{2}R, c_p = \frac{7}{2}R, R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  のとき,  $c$  の値を求めなさい. (余力のある人は理科年表などを調べて, 今求めた数値を年表に記載されている数値と比較しなさい.)

<sup>9</sup>注目する現象の速度が音速に近いか, より遅いかで区別することもある.

<sup>10</sup>鉛直方向の温度変化に対してのみ密度変化を起こすような流体 (Bussinesq 流体) を考察する場合もある. しかしこの場合にも, 音速は無限大として取り扱われている. このような流体については後で述べることにする.



## 第2章 流れの記述

### 2.1 流れを表す物理量

1.1 節において、流体力学では流体を構成する個々の原子・分子の運動は考慮せず、連続体として流体を扱うと述べた。しかしながら、ここでは流体を構成する原子・分子の運動状態を完全に記述することを議論の出発点として、流体の運動を記述する物理量として何が必要かを考察する。

古典力学によれば、原子で構成される物質の運動状態を完全に記述するためには、各原子の位置、及び運動量（速度）が任意の時刻で分かれば、物質の運動状態を完全に指定できる。連続体近似は、ある空間中の一点 P（その位置ベクトルを  $r$  とする）を中心とした微小体積  $\delta V$  に渡って、物理量を平均することにより得られるので、原子の運動状態を完全に指定するこれらの物理量を平均化してみる。そのときに得られる物理量によって、流体の運動状態が完全に指定できるはずである。

ある時刻  $t$  において、 $\delta V$  内に  $N$  個の原子があり、 $i$  番目の原子の位置ベクトルを  $r_i$ 、原子の速度を  $v_i$ 、その質量を  $m_i$  とする。ここで、 $i = 1, \dots, N$  である。連続体近似によって、点 P の近傍にある分子の個々の位置情報  $r_i$  は、位置ベクトル  $r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i$  へと縮約されてしまう。つまり原子の位置は情報として失われてしまう。その代わりに、空間中のあらゆる点  $r$  において物理量を指定する必要がでてくる。すなわち、物理量は場の量となる。

次に、運動量、もしくは、質量と速度の情報についてであるが、1.1 節で述べたように、質量の情報は  $\rho(r) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{\delta V}$  と密度に置き換わる。また流体粒子  $\delta V$  の速度は  $N$  個の原子の重心の速度  $v(r) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$  で与えられる。ただし、個々の分子の速度は  $v$  の値の周りで揺らいであり、その揺らぎの大きさ  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - v)^2$  は気体分子運動論、もしくは統計物理学より、温度に比例することがわかる。したがって、このような考察から、空間の各点  $r$  において任意の時刻  $t$  に密度  $\rho$ 、温度  $T$ 、速度  $v$  の 3 種類（合計 5 つ）の物理量を指定することにより、流体の運動が完全に記述できることが分かる。<sup>1</sup>

<sup>1</sup> $d$  次元空間中であれば、 $d + 2$  個の変数が必要である。ここでは、取りあえず最も日常的な 3 次元空間の場合で話をすすめている。

なお，分子運動論的には，流体内のある面に働く応力（圧力）とは，その面を通過する分子が輸送する運動量の平均値として計算されが，これは，揺らぎの運動エネルギーもしくは温度と関係付けられる．そのような関係式は状態方程式と呼ばれる．熱力学によると温度，密度，圧力などの熱力学的な物理量は，状態方程式を通じて関係しており，熱力学的物理量のうち2つが独立であることが知られている．したがって，密度，温度を流体を特徴付ける独立な熱力学的物理量と考えても良いし，圧力，温度をそのように考えても良い．

以上をまとめると，流体の運動状態を記述するための物理量は

- 運動学的な量（動的な量）： 流速  $v$ ,
- 熱力学的な量（静的な量）： 応力（圧力） $p$ , 温度  $T$ , 密度  $\rho$ , 内部エネルギー  $E$ , エントロピー  $S$ , などのうち，独立な物理量2つ．

である。<sup>2</sup>

流体の運動状態を記述するために必要な変数の個数は5個，すなわち未知変数が5個であるから，これらを決定するためには5つの方程式をたてて，それを解く必要がある．5つの方程式とは何であろうか？流体の運動も物理現象であり，物理法則にしたがっているので，物理学における基本的な保存則は満足されている．その保存則とは，運動量保存則，エネルギー保存則，質量保存則である．運動量はベクトル量であるから3成分ある．またエネルギー，質量はスカラー量であるからそれぞれ1個である．すなわちこれら5つの量に対する保存則が成り立つ．この5個の保存則を具体的に数式で表したものが，流体力学の基礎方程式であり，それを解くことによって流体の運動を決定することができる．

## 2.2 流れを表す方法

流体の運動状態を記述する方法には通常二通りの方法が用いられる．

### 2.2.1 Lagrangeの方法 (Lagrange 的記述)

この方法では，流体を無数の流体粒子の集団と見なし，各粒子の運動を追跡することにより流体の運動を記述する．すなわち，ある時刻  $t_0$  に  $(a, b, c)$  に存在していた流体粒子が時刻  $t$  に  $(x, y, z)$  に来たとする．このとき  $x, y, z$  は  $a, b, c, t$  の関

<sup>2</sup>気象通報では，ある地点のある時刻における風向，風速，気温，気圧，天気を放送している．このうち，風向，風速，が速度ベクトル  $v$  であり，気温，気圧がそれぞれ  $T, p$  である．天気は物理量ではないことに注意．

数として,

$$\begin{aligned}x &= f_1(a, b, c, t), \\y &= f_2(a, b, c, t), \\z &= f_3(a, b, c, t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

のように表される. これら  $f_1, f_2, f_3$  の関数形がわかれば, 流体の運動が完全に知れたことになる.  $t_0$  は任意であるが通常  $t_0 = 0$  が選ばれる. (2.1) は  $(a, b, c)$  という名前 (もしくはラベル) の流体粒子の運動を表しており,  $(a, b, c)$  は物質座標 (material coordinates) と呼ばれる. ある時刻における空間の一点  $(a, b, c)$  に存在する流体粒子は唯一であるために, これを持ってして流体粒子を識別することができる. すなわち,  $(a, b, c)$  を流体粒子の名前として用いることができるのである.

この記述方法は質点系の力学と非常によく対応関係がある.<sup>3</sup> たとえば  $N$  個の質点系の運動を考えたときに, 質点系の力学では  $i$  番目 ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) の質点の任意の時刻  $t$  における位置  $(x_i, y_i, z_i)$  を問題にする. ここで  $i$  は粒子の名前 (粒子の識別子) である.

質点系と流体系の大きな違いは次の 2 点である.

- 質点の名前  $i$  は離散的量であるが, 流体粒子の名前  $(a, b, c)$  は連続的量である.
- 質点系の場合には各質点はバラバラに運動をする. 一方流体の運動では, 流体は連続体であるから隣り合う流体粒子 (近い名前の流体粒子) は互いに似た運動をする.

## Lagrange 微分

各流体粒子に付随した物理量の時間的変化, 時間微分, を Lagrange 微分 (または物質微分, material differentiation) と呼び

$$\frac{D}{Dt}$$

で表す. Lagrange の方法では, 物理量  $F$  の Lagrange 微分は

$$\frac{DF}{Dt} = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{a,b,c}\tag{2.2}$$

と表せる. これは古典力学でいうところの  $\frac{d}{dt}$  に対応するものである.

以上をまとめると, 表 2.1 のようになる.

<sup>3</sup>Lagrange 的記述がもっとも naive に (質点系の Hamilton 力学の延長として) 流体力学を Hamilton 形式で記述できる.



	流体力学 (Lagrange 的記述)	古典力学 (質点系)
粒子の識別子	物質座標 $(a, b, c)$ : 連続的量	$i$ : 離散的量
時間微分	$\frac{D}{Dt}$	$\frac{d}{dt}$

表 2.1: 流体力学における Lagrange 的記述と質点系の力学との対応関係.

### 2.2.2 Euler の方法 (Euler 的記述)

この方法では任意の時刻  $t$  において, 空間の各点  $(x, y, z)$  で物理量  $v, T, \rho, p, \dots$  を指定することによって流体の運動を記述する. すなわち, 場の立場である. 物理学において, 場の立場で現象を記述する代表的分野として, 電磁気学があげられる. 電磁気学と流体力学ではしばしば同じ方程式が登場する. 歴史的には電磁気学よりも先に流体力学が学問的に体系化されており, 流体力学の学問体系を参考にして電磁気学が体系化されたのである.

Euler 的記述と Lagrange 的記述の大きく異なる点は, 変数  $x, y, z$  が Lagrange 的記述では従属変数なのに対し, Euler 的記述では独立変数であることである.

#### Lagrange 微分の Euler 的表現

流体粒子に付随したある物理量  $F$  の Euler 的表記は  $F(x, y, z, t)$  である. この量の Lagrange 微分を Euler の方法で記述することを考える. ある時刻  $t$  で  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  にあった流体粒子が, 時刻  $t + \Delta t$  において  $\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t = (x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$  に移動したとする. このとき流体粒子に付随した  $F$  の変化  $\Delta F$  は,

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t) \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \\ \frac{DF}{Dt} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.3)$$

と計算される. ここで  $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$  は  $\Delta t$  の二次以上の項を表す.  $F$  は任意であるから, Lagrange 微分の Euler 的表現として

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \end{aligned} \quad (2.4)$$

を得る.

注意：(2.4)の第2の表現に特に注意すること。 $v \cdot \nabla$ は決して $\nabla \cdot v$ とは等しくない！ $\nabla$ は演算子であるから演算の順序を入れ換えては意味が違ってくる。例年、両者の区別ができない人が非常に多い。 $v \cdot \nabla$ は演算子で、何か関数に食いついて初めて数値をとりえる（つまり $v \cdot \nabla$ は飢えている）のに対し、 $\nabla \cdot v$ はそれ自身で明確な数値を持ちえる。

以下に2つの記述を表にしてまとめておく。

	Langrangeの方法	Eulerの方法
立場	粒子的	場
独立変数	$a, b, c, t$	$x, y, z, t$
従属変数	$x, y, z; p, \rho, T, \dots$	$u, v, w; p, \rho, T, \dots$
Lagrange 微分, $\frac{D}{Dt}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$

(2.4)に現れた $v \cdot \nabla$ の項は移流項と呼ばれる。以下の例題は、移流という言葉の意味と移流の作用を理解するのに適当であろう。

### 例題

ある観測所の50km北の地点では観測所よりも3.0K気温が低いとする。もし $10\text{ms}^{-1}$ の北風が吹いていて、空気塊の温度は変化しないものとする。このとき、観測所における気温の時間変化率は以下のように求められる。

温度 $T$ のLagrange微分はEuler的な微分によって、

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T$$

と表現できる。ここで、 $\frac{DT}{Dt}$ が空気塊の温度変化率であり、 $\frac{\partial T}{\partial t}$ が観測地点における温度変化率である。いま、問題より $\frac{DT}{Dt} = 0$ なので、観測地点における温度変化率は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v \cdot \nabla T$$

と温度移流で決まる。北向きを $y$ -座標の正の向きとすると北風は $v = vj$ ,  $v = -10\text{m/s}$ と表現できる。一方、温度勾配は北に行くほど温度が下がるので、 $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial y}j$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y} = -3\text{K}/50\text{km}$ である。したがって

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v \cdot \nabla T = -6.0 \times 10^{-4}\text{K/s} = -2.2\text{K/h}$$

北半球に住んでいる我々にとって、一般に北に行くほど温度は下がっており、北風が吹くと冷たい、寒い、のであるが、上の例はそのような状況を表現している。

## 演習問題:

1. ある三変数関数  $f(a, b, c)$  があつたとき, 偏微分は  $\partial f/\partial a$  とは, 独立変数  $b, c$  を一定とおき, 独立変数  $a$  で  $f$  を偏微分するという意味である. 一定とおく独立変数を添え字として明示的に  $(\partial f/\partial a)_{b,c}$  と示すほうが, より親切な表記であるが, 独立変数の組がよくわかっている場合には, しばしば一定とおく変数を省略してしまう. このことをふまえて, Lagrange 的記述における  $\partial/\partial t$  と Euler 的記述における  $\partial/\partial t$  ではそれぞれ何を一定として偏微分を行っているかを述べなさい.
2. Lagrange 微分の Euler 的表現 (2.4) で登場した  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  を和の規約を使って表しなさい.
3. 地表気圧が東方向に行くにしたがって  $0.3 \text{ kPa}/180 \text{ km}$  で減少しているとする. 東向きに  $10 \text{ km/h}$  で航行する船の上で気圧を測ったところ  $0.1 \text{ kPa}/3 \text{ h}$  であった. この海域に島が存在するとし, 島の上で気圧を測ったときの気圧の時間変化率を以下の手順に従って求めなさい.<sup>4</sup>
  - (a)  $x$  を東方向,  $x$  方向の船の速度を  $u$  としたときに  $\mathbf{v} \cdot \nabla p$  はどのように表現されるか.
  - (b) 以上の考察から島の上で観測された気圧変化率を求めなさい.
4. 地表気圧が北東方向に行くにしたがって  $5 \text{ Pa km}^{-1}$  で増加しているとする. 北東向きに  $10 \text{ km h}^{-1}$  で航行する船の上で気圧を測ったところ変化率は  $100 \text{ Pa}/3 \text{ h}$  であった. この海域に島が存在するとしたときに, 島の上で観測された気圧の時間変化率を求めなさい.
5. ある観測所の  $50 \text{ km}$  北の地点では観測所よりも  $3 \text{ K}$  気温が低いとする. もし  $20 \text{ m s}^{-1}$  の北東風が吹いていて, 空気塊は放射によって  $1 \text{ K h}^{-1}$  で温まっているとき, 観測所における気温の時間変化率を求めなさい.

## 2.3 保存則

ある物理量  $A$  が時間変化しないとき, すなわち  $A$  の時間微分がゼロであるとき, " $A$  は保存する" と言い表す. 流体力学では 2.2 節で述べたように 2 種類の時間微分が存在するので注意が必要である.

$A$  の Lagrange 的時間微分がゼロ

$$\frac{DA}{Dt} = 0 \quad (2.5)$$

のとき, "  $A$  は Lagrange 的に保存される", もしくは "  $A$  は運動にしたがって保存される (  $A$  is a conserved quantity following the motion )" という. このような物理量  $A$  は Lagrange 的保存量, もしくは単に保存量と呼ばれる.

別の保存則の形式はフラックス形式の保存則と呼ばれるもので, それについては 3.1 節で紹介する.

例

物質が不生不滅であれば, 流体粒子の質量は Lagrange 的保存量である. いま流体粒子の質量を  $\delta m$ , 体積を  $\delta V$  とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D\delta m}{Dt} &= \frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = \delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\delta V}{Dt} = 0 \\ \implies \frac{D\rho}{Dt} &= -\frac{\rho}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} \end{aligned} \quad (2.6)$$

すなわち, 流体粒子の密度は保存されない. なぜならば, 流体粒子は流されるにしたがって膨張・圧縮され, 体積変化を伴うからである. (2.6) の右辺  $\frac{D\delta V}{Dt}$  の項が体積変化を表し,  $\frac{D\delta V}{Dt} > 0$  ならば膨張を,  $\frac{D\delta V}{Dt} < 0$  ならば圧縮を表す. 質量が一定のとき, 物質を圧縮すると密度は増大し, 膨張させると密度は減少するが, (2.6) はこのような日常経験と合致している.

## 2.4 流線と流跡線

流れの場を幾何学的に表現する方法として, 流線と流跡線というものがある. 流線は Euler 的な概念であるのに対して, 流跡線は Lagrange 的な概念である.

### 2.4.1 流線

流れの中に一本の曲線を考える. 曲線上の各点における流速  $v$  の方向とその点における曲線の接線が一致するときに, そのような曲線を流線という. 曲線上の一点  $r$  における曲線の微小部分の長さを  $dr$ , その点での接線方向の単位ベクトルを  $l$  で表す. このとき  $dr = l dr$  を曲線の線要素と呼ぶ. 定義より流線は

$$dr // v \quad (2.7)$$

なので，

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.8)$$

である．

電磁気学において，電場を幾何学的に表示する方法として，電気力線という概念がある．電場を速度場に対応させると，電気力線は流線に対応する．

### 2.4.2 流跡線

任意の一つの流体粒子が時間の経過と共に描く軌跡を流跡線という．流跡線は流体粒子をある有限時間にわたって観測して描かれるものである．流体粒子が微小時間  $dt$  の間に流跡線に沿って線要素  $d\boldsymbol{x}$  だけ動いたとすれば，

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} dt \quad (2.9)$$

である．

定常流においては，流線と流跡線は一致する．

## 第3章 流体力学の基礎方程式

2.1節では、流体の運動を記述するために必要な変数は流速  $v$  と独立な熱力学的変数 2 個であり、これらの未知変数を決定するために必要な法則は、質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則であることを述べた。本章では、これらの保存則を具体的に書き下すことにより、流体力学の基礎方程式を提示する。

### 3.1 連続の式

流体は不生不滅であることを具体的に書き表した数式が連続の方程式(equation of continuity)である。先ず Lagrange 的立場から連続の方程式を導く。続いて Euler 的立場からも同様の方程式が導けることを示す。

#### 3.1.1 Lagrange 的立場からの導出

各辺の長さが  $\delta x, \delta y, \delta z$  の微小体積要素 (体積  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ ) の流体粒子を考える。流体の密度を  $\rho$  とすると物質は不生不滅であるから、流れに伴って質量は変化しない、すなわち

$$\frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = 0. \quad (3.1)$$

(3.1) を整理すると、

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} \quad (3.2)$$

となる。右辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} &= \frac{1}{\delta x} \frac{D\delta x}{Dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{D\delta y}{Dt} + \frac{1}{\delta z} \frac{D\delta z}{Dt} \\ &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

と変形できる。ここで、 $(u, v, w)$  は  $x, y, z$  方向の流体の速度である。 $\delta x \rightarrow 0, \delta y \rightarrow 0, \delta z \rightarrow 0$  の極限をとると

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0, \delta y \rightarrow 0, \delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

したがって、質量保存則 (3.1) は

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.4)$$

となる。Lagrange 微分の定義を用いて、(3.4) は以下のように書きなおせる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.5)$$

これが連続の式、もしくは連続の方程式、である。(3.5) はしばしば Euler の連続の式と呼ばれる。<sup>1</sup>

#### 演習問題

- (3.4) は (3.5) と書けることを確かめなさい。

● 非圧縮性流体の場合： このとき運動中に密度が一様に保たれる、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ 、ので連続の方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.6)$$

となる。

### 3.1.2 Euler 的立場からの導出

連続の式 (3.5) は Euler 的立場からも以下のように導かれる。空間に固定された任意の閉曲面  $S$  を考える。<sup>2</sup>  $S$  に囲まれた領域を  $V$  とする。任意の時刻で  $V$  に含まれる質量は、

$$\iiint_V \rho dV$$

<sup>1</sup>(3.5) は Lagrange 的観点からの考察によって導かれたが、独立変数を  $x, y, z, t$  とする場の変数の偏微分方程式になっているので、Euler 的観点の記述になっている。

<sup>2</sup>Euler 的観点なので、考察の対象とする曲面は空間に固定されていて、形は変えない。

である。そこで単位時間あたりの  $V$  の質量変化は、

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

と表せる。いっぽう上記の質量変化は単位時間に  $V$  の表面  $S$  を通って  $V$  内に流れ込んだ流体の質量に等しい筈である。単位時間に微小面積  $dS$  を通過する流体の質量は、底面  $dS$ 、高さ  $v_n$  の円柱に含まれる流体の質量に等しい。ここで、 $v_n$  は流速  $v$  の微小面積に垂直な成分で  $v_n = v \cdot n$  である (図 3.1 参照)。そこで、単位時間に  $S$  を通って  $V$  内に流れ込んだ流体の質量は

$$- \iint_S \rho v \cdot n dS = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho v) dV$$

である。ここで  $S$  の表面に立てられた法線ベクトル  $n$  は外向きであるため、流れ込む流体に対しては負符号が付くことに注意せよ。また右辺への変形に Gauss の発散定理 (0.3 節参照) を用いた。以上の考察から質量保存則は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho v) dV.$$

または、

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho v) \right\} dV = 0, \quad (3.7)$$

と表せる。(3.7) は積分形の質量保存則である。領域  $V$  は任意なので、上式が恒等的に成り立つためには被積分関数は 0 でなければならない。したがって、質量保存則は微分形で

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (3.8)$$

となる。(3.8) の左辺第 2 項、 $\rho v$  は質量流束 (質量フラックス) と呼ばれる。(3.8) は、質量が保存されるならば、ある点における密度の時間変化は、質量フラックスの収束・発散に等しいことを表している。

一般にある物理量  $a$  が、そのフラックス  $F_a$  と  $a$  の生成・消滅項  $Q_a$  によって

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot F_a = Q_a \quad (3.9)$$

と表現されるとき、これをフラックス形式という。 $Q_a = 0$  のとき  $a$  はフラックス形式の保存則に従う、という。すなわち、流体力学には 2.3 節で述べた Lagrange 形式の保存則の他に、フラックス形式の保存則がある。



## 演習問題

1. 和の規約を用いて, 連続の式 (3.8) を表現しなさい.

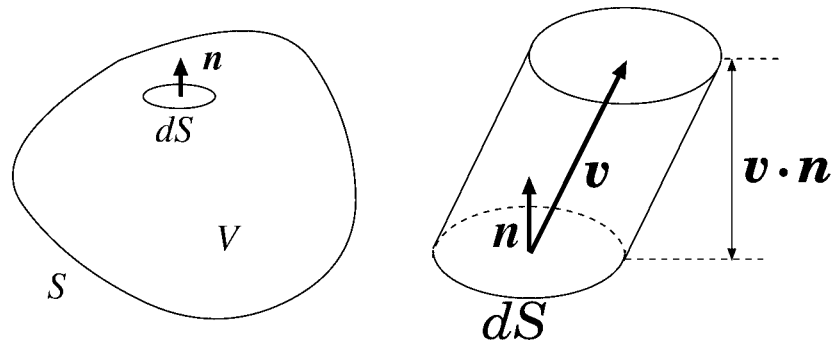


図 3.1: 質量保存則を適用する任意の体積  $V$  と単位時間あたり微小面積領域  $dS$  を通過する流体の体積.

## 3.2 運動方程式

“ある物体の運動量の時間変化は, それに作用している力の総和に等しい”, という Newton の第二法則を流体に対して適用し, 具体的に書き表した数式がここで述べる運動方程式である. 前章と同様に Lagrange 的立場から運動方程式を導出する. つぎに Euler 的立場から運動方程式を導出する. 3.2.1 節では非粘性流体を, 3.2.2 節では一般的な流体を考察することにする.

### 3.2.1 Lagrange 的立場からの導出

本節では, 簡単化のために非粘性流体を考察する. 3.1.1 節と同様に, 微小体積  $\delta V$  の流体粒子を考える. Newton の第二法則によれば, 流体粒子の運動量の時間変化は, それに働く力の総和に等しい. ここで, 流体粒子に働く力には面積力 (応力) と体積力がある. 単位質量あたりに働く体積力を  $\mathcal{K}$  とする. また, 単位体積

当たりに働く応力に伴う力<sup>3</sup>は  $-\nabla p$  であるので ( (1.8) 参照 ),

$$\frac{D(\rho\delta V\mathbf{v})}{Dt} = (-\nabla p)\delta V + \rho\delta V\mathcal{K} \quad (3.10)$$

と書ける．質量保存則

$$\frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = 0$$

を用いて整理すると, (3.10) は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathcal{K} \quad (3.11)$$

と書ける．(3.11) は非粘性流体の運動方程式であり, Euler の方程式と呼ばれる．  
単位質量あたりの体積力としては重力がある：

$$\mathcal{K} = -g\mathbf{k}. \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Euler 的立場からの導出

本節では, 粘性を含んだより一般的な流体を考察する．ここでは表記に和の規約を用いる．空間に固定された閉曲面  $S$  を考える． $S$  に囲まれた領域を  $V$  とする． $V$  に含まれる流体が持つ  $i$  方向の運動量は  $\int_V \rho v_i dV$  である．したがって, 単位時間あたり  $V$  に含まれる流体の運動量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV$$

である．

考える流体に作用する力は体積力と面積力である． $i$  方向に働く面積力は応力テンソル  $\tau_{ij}$  を用いて,

$$\iint_S \tau_{ij} n_j dS$$

と表せる．また単位質量あたりに働く  $i$  方向の体積力を  $\mathcal{K}_i$  とすると  $V$  に働く  $i$  方向の体積力は

$$\iiint_V \rho \mathcal{K}_i dV$$

<sup>3</sup>非粘性流体では応力は圧力のみである．

と表せる.

上記の効果以外に流体が運動量を携帯して  $S$  を通じて  $V$  内に流入する効果がある. すなわち流体が” 流れる” ことに起因した項がさらに付加される. これは Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により,

$$- \iint_S (\rho v_i) v_j n_j dS$$

と表せる.<sup>4</sup> 以上の議論から  $V$  内の運動量の時間変化は,  $V$  に働く体積力,  $S$  に作用する面積力と  $S$  を通じて流れ込む運動量との総和に等しい. したがって,

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \rho \mathcal{K}_i dV + \iint_S \tau_{ij} n_j dS - \iint_S (\rho v_i) v_j n_j dS \quad (3.13)$$

上式右辺第二項と第三項を 0.3 節の Gauss の定理を用いて変形する. このとき, これらは

$$\iint_S \tau_{ij} n_j dS - \iint_S (\rho v_i) v_j n_j dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - \rho v_i v_j) dV$$

と書き換えられる. したがって (3.13) は

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) - \rho \mathcal{K}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \right\} dV = 0 \quad (3.14)$$

となる. ここで  $V$  が任意であることを考慮すると, 上式の被積分関数はゼロでなければならない. したがって, 微分形の運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \rho \mathcal{K}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \quad (3.15)$$

が得られる.

さらにこの方程式を書き換える. (3.15) の左辺を展開する:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= v_i \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) &= \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j). \end{aligned}$$

このうち第一式右辺第一項と第二式右辺第二項は連続の方程式 (3.8) より相殺される. そこで (3.15) は

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho \mathcal{K}_i,$$

<sup>4</sup>図 3.1 参照. 連続の式の導出では,  $V$  の表面を通じて流入する流体の質量を考えたので, 微小体積  $v_n dS$  に密度を乗じた. ここでは運動量保存則を考えるので,  $V$  の表面を通じて流入する流体の運動量は, 微小体積  $v_n dS$  に運動量密度  $\rho v$  を乗ずればよい.

または密度  $\rho$  で両辺を割って

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \mathcal{K}_i, \quad (3.16a)$$

と書ける. これが求めるべき運動方程式である. Lagrange 微分を用いると (3.16a) は以下ようになる:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \mathcal{K}_i. \quad (3.16b)$$

- 非粘性流体の場合: 非粘性流体の場合には, 応力テンソルは圧力のみで

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3.17)$$

なので, 運動方程式 (3.16) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mathcal{K}_i \quad (3.18a)$$

となる. (3.18a) をベクトル形式で書くと

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{\mathcal{K}}, \quad (3.18b)$$

となる.

- Newton 流体の場合: 応力テンソルが (1.16) で表される Newton 流体では, 運動方程式 (3.16) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mathcal{K}_i, \quad (3.19a)$$

ベクトル形式では

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\mathcal{K}}, \quad (3.19b)$$

と書ける. ここで  $\nu = \mu/\rho$  は動粘性係数 (kinematic viscosity) と呼ばれる. (3.19) は Navier-Stokes 方程式 (Navier-Stokes equation) と呼ばれ, 実在の流体の運動を極めてよく記述する方程式である.

### 3.3 エネルギー論

前節で導いた運動方程式から、運動エネルギーに関する方程式を導出してみる。前節と同様に和の規約を用いることにする。(3.16a)に $\rho v_i$ を乗じると、

$$\rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho v_i \mathcal{K}_i,$$

上式左辺は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i v_j \right) - \underbrace{\frac{1}{2} v_i v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right)}_{\text{連続の式よりゼロ}}$$

と表現できる。次に右辺第一項は、

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} e_{ij} \end{aligned} \quad (3.20)$$

上式の最後の表現には $\tau_{ij}$ が対称テンソルである( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ )ことを用いた。また、

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.21)$$

である。したがって、単位体積あたりの運動エネルギーを $\mathcal{T} = \frac{1}{2} v_i v_i$ とすると、その発展方程式は

$$\frac{\partial (\rho \mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \mathcal{T} v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} + \rho v_i \mathcal{K}_i - \tau_{ij} e_{ij}, \quad (3.22)$$

となる。

質点系の力学では運動エネルギーとポテンシャルとの和が保存されるが、流体力学では、たとえ流体粒子(流体素片)に働く外力 $\mathcal{K}$ がゼロであっても(ポテンシャルへの寄与はこの項から生じる)、流体粒子の運動エネルギーは保存しないことに注意すべきである。力学的エネルギーのみでは保存則は成立せず、力学的エネルギーと内部エネルギーの和が保存するのである。(3.22)の右辺最終項が、運動エネルギーと内部エネルギーとの間の変換を表す項になっている。このことは、応力テンソル $\tau_{ij}$ を具体的に表現すると分かりやすい。

- 非粘性流体の場合： 非粘性流体の場合には、応力テンソルは圧力のみで

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$$

なので、(3.20) は

$$-\frac{\partial(pv_j)}{\partial x_j} + pe_{jj}$$

となる。したがって、(3.22) は

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\mathcal{T} + p)v_j}{\partial x_j} = \rho v_i \mathcal{K}_i + pe_{kk}, \quad (3.23a)$$

もしくはベクトル形式で

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho\mathcal{T} + p)\mathbf{v}\} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathcal{K} + p\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.23b)$$

となる。

- Newton 流体の場合： 応力テンソルが (1.16) で表される Newton 流体では、(3.20) 式は、

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -pv_j + 2\mu \left( e_{ij}v_i - \frac{1}{3}e_{kk}v_j \right) \right\} - \left\{ -pe_{jj} + 2\mu \left( e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}e_{jj} \right) \right\}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \left( e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right)^2 &= e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3}e_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{9}e_{kk}e_{kk} \underbrace{\delta_{ij}\delta_{ij}}_{=3} \\ &= e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}e_{jj}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

したがって、(3.22) は

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\rho\mathcal{T} + p)v_j - 2\mu \left( e_{ij}v_i - \frac{1}{3}e_{kk}v_j \right) \right\} = \rho v_i \mathcal{K}_i + pe_{kk} - \Phi, \quad (3.25)$$

$$\Phi = 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right)^2 \quad (3.26)$$

$\Phi$  は散逸関数 (dissipation function) と呼ばれ、正の量である。これは粘性の効果による運動エネルギーの散逸を表している。この散逸された運動エネルギーは熱力学的エネルギーの方程式の加熱項になる。このことは熱力学的エネルギーの方程式の導出の際にもう一度振り返ることにする。

### 3.4 熱力学的エネルギーの方程式

“ある系の内部エネルギーと運動エネルギーとの和の時間変化率は、その系に流入する内部エネルギー、運動エネルギー、熱流の和、系に働く力がする仕事、さらに系内の熱源による加熱に等しいという”，というエネルギー保存則を具体的に書き表した数式がここで述べるエネルギー方程式である。Euler 的立場からの導出を行う。

空間に固定された閉曲面  $S$  を考える。  $S$  に囲まれた領域を  $V$  とする。  $V$  に含まれる流体が持つ内部エネルギーと運動エネルギーの和(全エネルギー)は  $\int_V \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) dV$  である。ここで、単位質量あたりの運動エネルギーと内部エネルギーをそれぞれ  $\mathcal{T}, \mathcal{U}$  と表した。単位時間あたり  $V$  に含まれる流体の全エネルギーの時間変化は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) dV$$

である。考える流体に作用する力は体積力と面積力である。体積力と面積力が系  $V$  にする仕事は、単位時間当たり

$$\iiint_V \rho v_i \mathcal{K}_i dV + \iint_S v_i \tau_{ij} n_j dS$$

と表せる。<sup>5</sup>  $S$  を通じて  $V$  内に流入する全エネルギーは、Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により、

$$- \iint_S \{ \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) \} v_j n_j dS \quad (3.27)$$

と表せる。さらに、流体内の温度が一様でないとき、流体の運動とは無関係に熱の移動が起こる。これは熱伝導 (thermal diffusivity) と呼ばれ、流体を構成する原子・分子の熱的振動に伴って発生する現象である。熱伝導に伴う熱流  $\theta$  は  $S$  を通じて  $V$  内に流入する。この効果は

$$- \iint_S \theta_j n_j dS \quad (3.28)$$

と表せる。<sup>6</sup>

<sup>5</sup>物体に力  $F$  が働いている時に、その物体を  $r$  だけ動かすのに要する仕事は、 $F \cdot r$  である。

<sup>6</sup>温度勾配があまり大きな値をとらない範囲では、熱伝導は Fourier の法則によってよく記述できる。Fourier の法則は

$$\theta = -\square \nabla T \quad (3.29)$$

と表せる。  $\square$  は熱伝導率と呼ばれる。

また, 単位質量あたりの流体の加熱率を  $J$  とする. このときエネルギー保存則より  $V$  内のエネルギーの時間変化は,  $V$  に働く体積力がする仕事,  $S$  を通じて作用する面積力がする仕事,  $S$  を通じて  $V$  内に流れ込む全エネルギーと熱伝導に伴う熱流, さらに系内の熱源による加熱率の総和に等しいので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) dV &= \iiint_V \rho v_i \mathcal{K}_i dV + \iint_S v_i \tau_{ij} n_j dS \\ &\quad - \iint_S [\{\rho (\mathcal{T} + \mathcal{U})\} v_j + \theta_j] n_j dS \\ &\quad + \iiint_V \rho J dV \end{aligned} \quad (3.30)$$

上式右辺第二, 三項を 0.3 節の Gauss の定理を用いて変形すると

$$- \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \mathcal{T} v_j + \rho \mathcal{U} v_j - v_i \tau_{ij} + \theta_j) dV \quad (3.31)$$

と書き換えられる. したがって  $V$  が任意であることを考慮すると, 微分形のエネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\rho (\mathcal{T} + \mathcal{U})\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{\rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) v_j\} = \frac{\partial (v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + \rho v_i \mathcal{K}_i + \rho J \quad (3.32)$$

となる. 力学的エネルギーの方程式 (3.22) を (3.32) から引くと, 単位体積あたりの内部エネルギーに関する方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{U}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\rho \mathcal{U}) v_j\} = \tau_{ij} e_{ij} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + \rho J \quad (3.33)$$

が得られる. さらに連続の式を考慮すると, (3.33) は Lagrang 微分を用いて

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} e_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + J \quad (3.34)$$

となる.

• 非粘性流体の場合: 非粘性流体の場合には, 応力テンソルは  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$  なので, (3.34) の右辺第一項は

$$\tau_{ij} e_{ij} = -p e_{jj} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (3.35)$$

と変形される. さらに上式最後の表現に連続の式

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$



を用いると (3.34) は

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \quad (3.36)$$

となる. 熱流  $\boldsymbol{\theta}$  がゼロのとき, (3.36) は, 熱力学の第一法則  $\delta U + p\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \delta Q$  において, 熱力学的な状態の変化が単位時間に起こったと考えて  $\delta$  の記号を Lagrange 微分  $\frac{D}{Dt}$  で置き換えたものと同じ形式になっている.

• Newton 流体の場合: Newton 流体の場合には, (3.34) の右辺第一項は

$$\tau_{ij}e_{ij} = -pe_{jj} + \Phi \quad (3.37)$$

となる. したがって (3.34) は

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \quad (3.38)$$

この場合に熱力学的エネルギー方程式には, 非粘性流体の熱力学的エネルギー方程式に, 粘性による力学的エネルギーの散逸に伴う項 (右辺第二項の  $\Phi$ ) が, 加熱項として加わっていることがわかる. ((3.25) 参照.)

## 第4章 状態方程式

前章で導出した連続の方程式, 運動方程式, 熱力学的エネルギー方程式の3種類, 5個の方程式には, 未知変数として, 密度  $\rho$ , 速度  $v$ , 圧力  $p$ , 内部エネルギー  $u$  の6つが含まれている. したがって, 方程式は閉じていないように見える. しかし熱力学的な物理量の間には一定の関数関係 (状態方程式) が存在し, ある熱力学的な変数は別の2つの熱力学的変数で表現することが可能である. したがって, 流体力学の基礎方程式は上記の5つで十分である. ここでは, 状態方程式の具体的な形を議論することにする.

### 4.1 状態方程式の例

地球流体力学では以下のような状態方程式に従う流体を考察の対称とする場合が多い.<sup>1</sup>

#### 4.1.1 理想気体

希薄な気体では, 以下のような状態方程式がよい近似で成り立つ:

$$p = \rho RT. \quad (4.1)$$

注意: (4.1) は単位体積の理想気体の方程式である. 化学で習う  $n$  kmol の理想気体の状態方程式は

$$PV = nR^*T \quad (4.2)$$

である. ここで,  $R^*$  は普遍定数 ( $R^* = 8.314 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$ ) である. 体積  $V$  に含まれる理想気体の分子の質量を  $m$  kg, 理想気体の分子量を  $M$  すると, (4.2) は

$$P = \frac{m}{V} \frac{R^*}{M} T \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>気象力学では地球大気を理想気体と扱い, 海洋力学では海洋を Boussinesq 流体として扱うことが多い.

となる.  $\rho = m/V$  であるから, (4.1) と (4.3) を見比べると

$$R = \frac{R^*}{M} \quad (4.4)$$

という関係がなりたつことがわかる.

- 地球大気は窒素 (分子量 28) 75.5 %, 酸素 (分子量 32) 23.1 %, アルゴン (分子量 40) 1.3 % の混合気体なので<sup>2</sup>, 平均分子量は  $M = 28 \times 0.755 + 32 \times 0.231 + 40 \times 0.013 = 28.96$ . したがって  $R = R^*/28.96 = 287.1 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  である.

#### 演習問題

1. 金星大気, 火星大気の大気組成を調べ, これらの大気を理想気体とみなしたときの気体定数  $R$  を求めなさい.

#### 4.1.2 Boussinesq 流体

一般的な状態方程式  $\rho = f(p, T)$  をある基準の温度  $T_0$ , 圧力  $p_0$  の周りで Taylor 展開して, 展開の 1 次の項までをとる:

$$\begin{aligned} \rho = f(p, T) &= f(p_0, T_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)_T (p - p_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T (p - p_0) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T (p - p_0) + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (T - T_0) \right\} \end{aligned}$$

圧縮率がゼロ,  $\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = 0$ , であるとすると,

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)], \quad (4.5)$$

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (4.6)$$

を得る. (4.5) の状態方程式に従う流体は Boussinesq 流体と呼ばれ, 水のように, 密度が圧力と独立であるような流体の状態方程式として用いられる. ここで,  $\alpha$  は

<sup>2</sup>高度約 80 km あたりまでこのような成分比に保たれている.

体膨張係数, もしくは体膨張率と呼ばれる.<sup>3</sup> 海洋の場合には, 密度は塩分にも依存するので,

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)], \quad (4.7)$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{p,T} \quad (4.8)$$

が用いられる. ここで,  $s$  は塩分 (salinity) である.  $s$  の単位は, 海水 1 kg あたりの塩分のグラム数として計られる. また,  $\beta$  は,  $\alpha$  との対応から, 塩分圧縮係数 (coefficient of saline contraction) と呼ばれる.

## 4.2 順圧流体の状態方程式

連続の方程式に現れる未知変数は, 密度  $\rho$  と速度  $v$  である. 一方, 運動方程式には上記のほかに圧力  $p$  が未知変数として現れている. したがって, もし圧力と密度との間に一定の関数関係

$$\rho = \mathcal{F}(p) \quad (4.9)$$

が存在するとき, もしくは状態方程式の形で

$$f(p, \rho) = 0 \quad (4.10)$$

という流体を考えるならば, エネルギー方程式を持ち出さなくても, 連続の式と運動方程式のみで方程式は閉じるさせることができ, 流体の運動を決定できる. (4.9) あるいは (4.10) を満足するような流体を順圧流体 (barotropic fluid) と呼ぶ. これは (4.10) 式で与えられる流体の等圧面と等密度面が平行であることからこのように呼ばれている. いっぽう一般の流体は密度, 圧力以外に例えば温度にも依存するので等密度面と等圧面は平行ではなく傾いている. このような流体は傾圧流体 (baroclinic fluid) と呼ばれる. 順圧と言ういいかたは, 地球流体力学特有の呼び名で通常の流体力学では, barotropic fluid のことをバロトロピー流体と呼び (例えば今井功: 流体力学 (岩波書店) 参照), 一方, baroclinic や傾圧と言う言葉はでてこない.

先に述べた順圧流体として例えば以下のような場合が考えられる.

---

<sup>3</sup>(4.6) にマイナス符号を付けて, 膨張率を定義する理由は, 一般に気体は等圧下で温度を加えれば膨張し密度は減るからである. すなわち,  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$ . 従って, 膨張率を正の量として定義するために, マイナス符号をつけている.  $\rho_0$  で除する理由は「率」にするためである.

### 4.2.1 非圧縮一様流体

非圧縮  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  で, 至るところ密度が一様な流体 (incompressible homogeneous fluid) では,

$$\rho = \text{const.} \quad (4.11)$$

このとき, 流体力学の基礎方程式は極めて簡単になる. 例えば Newton 流体の場合には, 運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \boldsymbol{\kappa}, \quad (4.12)$$

ここで,  $P = p/\rho$  である. また連続の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.13)$$

である. 即ち, 未知変数は  $\mathbf{v}, P$  なので, 上記の2種類の方程式で問題は閉じる. 上記のような方程式に従う流体の運動は, 現実的な流れの予報や解析という目的ではなく, Navier-Stokes 方程式が持つ数理物理的性質を調べる目的で研究されている.

### 4.2.2 断熱変化する流体

流体の熱伝導性が悪い場合には, 運動に際して状態変化は断熱的となる. 理想気体の状態変化を圧力  $p$ , 密度  $\rho$ , エントロピー  $S$  で記述すると

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{C_v}\right) \quad (4.14)$$

と書ける. ここで添字0の付いた物理量は, ある基準となる状態を表す. また  $\gamma$  は定積比熱  $C_v$  と定圧比熱  $C_p$  の比  $\gamma = C_p/C_v$  である. 断熱過程ではエントロピーが状態変化中で保存される ( $S = S_0$ ) ので, (4.14) は

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (4.15)$$

となる.

#### 演習問題

1. 熱力学の第一法則  $dU = T dS - p d(\rho^{-1})$ , 理想気体の状態方程式  $p = \rho R T$ ,

さらに  $dU = C_v dT$  を用いて, (4.14) を導きなさい.

2. (4.15) は Poisson の関係式と呼ばれる. Poisson の関係式を理想気体の状態方程式を使って,  $T, p$  で表現すると,

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.16)$$

となることを示しなさい. ここで,  $T_0$  は  $p_0$  における温度である.

### ポリトロップ大気

惑星大気の構造を議論する場合に, その圧力, 密度, 温度の間に適当な関数関係を仮定する場合がある. そのうちの代表的なものはポリトロップ大気の近似と呼ばれ, 仮定する温度, 圧力, 密度間の関数関係は, (4.15) や (4.16) である. ただし, この場合には  $\gamma$  はポリトロピック指数 (polytropic exponent) と呼ばれる量で必ずしも比熱比 ( $= C_p/C_v$ ) ではない. ポリトロップ大気においては, (4.15) や (4.16) は状態方程式とみなすべきではなく, 熱輸送に関する近似とみなすべきである. すなわち, 状態方程式とみなせば  $\gamma$  は比熱比で自動的に与えられてしまうが, ポリトロップ大気の場合には状況に応じて値が変わりえる. 例えば, 熱効率のよい等温大気では  $\gamma = 1$  とおき, 大気の鉛直温度勾配が断熱温度勾配になっているような状況では,  $\gamma$  は比熱比にとる.

## 4.3 温位

(4.16) は熱力学においては

$$p^{R/C_p} T = \text{const} \quad (4.17)$$

などと表現される場合が多く,  $T_0, p_0$  という量を導入してそれを問題にすることはほとんどないが, 地球流体力学では,  $T_0$  は温位 (potential temperature) と呼ばれ, 重要な役割を果たす物理量である.

鉛直方向にある温度プロファイルを持った大気を考え, ある高度  $z$  において気圧  $p(z)$ , 温度  $T(z)$  を持った空気塊を気圧が  $p_0$  を持つ高度まで (通常  $p_0 = 1000\text{hPa}$  が用いられる), 断熱的に移動させたとき, 空気塊が持つ温度  $T_0$  を, 高度  $z$  にある空気塊が持っている温位と定義する. 通常, 温位は記号的に  $\theta$  と表される. 安定性の議論を行うと, 温位の鉛直分布  $\theta(z)$  により, 鉛直方向の大気の安定度を見積もることが出来ることがわかる.

この量はエントロピー  $S$  との間に

$$S = C_p \ln \theta + \text{const} \quad (4.18)$$

の関係がある。地球流体力学ではエントロピーよりも温位を使って現象を表現することが通例である。

#### 演習問題

1. (4.18) を導出しなさい。

## 第5章 大気の鉛直構造

本章では地球大気の平均的な鉛直構造について述べる。地球大気は理想気体であると仮定し、流体に働く外力  $\mathcal{K}$  は重力のみ、 $\mathcal{K} = -g\mathbf{k}$  とする。<sup>1</sup>

流体が静止しているときの力のバランスは、運動方程式 (3.19b) より、気圧傾度力と外力がバランスした状態である：

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -g \mathbf{k}. \quad (5.2)$$

この状態では、水平方向の気圧傾度力は0であり、水平方向に気圧は一様である。また、鉛直方向には静水圧平衡がなりたっている：

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g. \quad (5.3)$$

静水圧平衡の式 (5.3) と理想気体の状態方程式 (4.1) から得られる幾つかの考察を行う。<sup>2</sup>

### 5.1 測高公式

平均海水面から高度  $z$  まで単位質量あたりの空気塊を上昇させたときに、それにする仕事  $\Phi$  をジオポテンシャル (geopotential) ,  $Z \equiv \Phi/g_0$  をジオポテンシャル高度 (geopotential height) と呼ぶ：

$$\Phi(z) \equiv \int_0^z g \, dz. \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>ここで、 $g$  は定数でなく高度依存性があってもよい。そのような  $g$  の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2}. \quad (5.1)$$

ここで、 $G$  は万有引力定数、 $M$  は地球の質量、 $a$  は地球の平均半径、 $z$  は平均海水面からの高度である。

<sup>2</sup>(5.3) は鉛直方向の運動方程式をある高度  $z$  において、水平方向全球にわたり平均した式とみなすことも出来る。



ここで,  $g_0$  は平均海水面における全球平均重力加速度  $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  である. ジオポテンシャル高度は対流圏や下部成層圏では幾何学的高度  $z$  とほぼ同じ数値をとる.

### 演習問題

1. 高度  $z = 0$  において重力加速度が  $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$  であるとする. このとき幾何学的高度  $z = 100 \text{ km}$  におけるジオポテンシャル高度  $Z$  と幾何学的高度  $z$  との差を求めなさい.

(5.4) の積分変数を静水圧平衡の式を用いて  $z$  から  $p$  に変換する. このとき理想気体の状態方程式を用いて, (5.3) の密度  $\rho$  を圧力  $p$  と温度  $T$  で書きかえておく. 結果は

$$\Phi(z) - \Phi(0) = -R \int_{p(0)}^{p(z)} T \, d \ln p. \quad (5.5)$$

(5.5) は測高方程式 (hypsonometric equation) と呼ばれる. (5.5) より, 気圧面  $p_1$  と  $p_2$  の厚さ (ジオポテンシャルの差, 層厚 (thickness))<sup>3</sup> は

$$Z_T \equiv Z(p_2) - Z(p_1) = -\frac{R}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p, \quad (5.6)$$

で与えられる. 気球に観測機器 (ラジオゾンデ) を係留して放球し, 大気の気温や気圧を観測したとき, その値と (5.6) を用いてその温度, 気圧の値が観測された高度を求めることができる.

ここで, ある気圧  $p_1$  と  $p_2$  の間にある大気の平均温度  $\langle T \rangle$  を

$$\langle T \rangle \equiv \frac{\int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p} \quad (5.7)$$

で定義する. このとき  $p_1$  面と  $p_2$  面の層厚は

$$Z_T = -H \ln(p_2/p_1) \quad (5.8)$$

$$H \equiv \frac{R \langle T \rangle}{g_0}, \quad (5.9)$$

で与えられる. 即ち, ある与えられた2つの気圧面の層厚はその気層の平均温度に比例する.

<sup>3</sup> $p_1 > p_2$  即ち,  $p_1$  面が  $p_2$  面よりも下層にあるとする.

もし大気が等温であるとすれば, 気圧の鉛直プロファイルは

$$p(Z) = p(0) e^{-Z/H} \quad (5.10)$$

となり, 高度と共に指数関数的に減少していく.  $H$  はスケールハイト (scale height) と呼ばれ, 気圧が  $e^{-1}$  になる高度である. 地球を温度 255K の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である.

スケールハイトは鉛直方向の大気の質量分布の重心の位置と解釈することができる. 等温大気の場合には, 気圧の鉛直分布 (5.10) と同様に, 密度も

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-z/H} \quad (5.11)$$

という鉛直プロファイルを持つ. 鉛直方向の質量分布の重心  $z_G$  は

$$z_G \equiv \frac{\int_0^\infty z \rho(z) dz}{\int_0^\infty \rho(z) dz} \quad (5.12)$$

で計算される. 実際に (5.12) に (5.11) を代入すると

$$z_G = H \quad (5.13)$$

が得られる

### 演習問題

1. 重力加速度  $g$  を定数と仮定する. 気温が高さとともに

$$T(z) = T_0 - \Gamma z \quad (5.14)$$

と一定の減率で減少するとき, 静水圧平衡の式, 理想気体の状態方程式を用いて気圧と高度との間の関係を求めなさい. さらに, このような温度分布を持つ大気は有限の高さで終わる (有限の高度で気圧が 0 になる) ことを証明しなさい.

## 5.2 乾燥大気の鉛直方向の安定性

密度成層した鉛直 1 次元の水蒸気を含まない静止大気を考える. 今, 初期に高度  $z$  にある流体粒子を  $z + \Delta z$  まで断熱的に変位させることを考える.<sup>4</sup> ただし,

<sup>4</sup>水蒸気を含む場合, 気圧や気温の変化によって水蒸気が凝結し潜熱の解放が起こるので, この議論のように断熱という仮定が成り立たなくなる.

流体粒子の持つ圧力は，その外界の圧力と常に等しくなるように変位させるとする．このとき，流体粒子の持つ温位

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^\square, \quad (5.15)$$

は変位の前後で一定に保たれる．ここで  $\square = \frac{R}{C_p}$  である．なぜならば，温位はエントロピー  $S$  と (4.18) の関係で結ばれ，エントロピーは断熱過程において一定に保たれるからである．なお，温位は  $\theta$  は状態方程式 (4.1) を用いると，

$$\theta = \frac{p_0}{R\rho} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad (5.16)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (5.17)$$

と表現できる．

流体粒子を  $z$  から  $z + \Delta z$  に仮想的に変位させたときの運動について考察する．流体粒子の持つ物理量を添え字  $p$  であらわし，一方，流体粒子の外界の物理量を添え字  $env$  であらわすことにする．変位に伴って，流体粒子の持つ密度は  $\rho_p \rightarrow \rho_p + \Delta\rho_p$  へと変化する． $\Delta\rho_p$  は (5.16) を用い， $\theta_p, p_0, R$  が定数であることに注意すると，

$$\begin{aligned} \Delta\rho_p &= \Delta \left[ \frac{p_0}{R\theta_p} \left( \frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{p_0}{R\theta_p} \left( \frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \frac{1}{p_p} \Delta p_p \\ &= \left( \frac{\rho_p}{\gamma} \frac{d \ln p_p}{dz} \right)_z \Delta z, \end{aligned} \quad (5.18)$$

となる．ここで，空気塊の圧力変化  $\Delta p_p$  は鉛直変位に伴って起こるので， $\Delta p_p = \frac{dp_p}{dz} \Delta z$  を用いた．仮定より，外界と流体粒子の持つ圧力 ( $p_p = p_{env}$ ) は等しく，さらに流体粒子の初期位置  $z$  では流体粒子内の物理量と外界の物理量は等しい（流体粒子と外界の区別はない）ので， $\rho_p(z) = \rho_{env}(z)$  である．このことを用いて，高度  $z + \Delta z$  における流体粒子の密度および，外界の密度を求めると以下のようになる：

$$\begin{aligned} \rho_p(z + \Delta z) &= \rho_p + \Delta\rho_p \\ &= \rho_p(z) + \left( \frac{\rho_{env}}{\gamma} \frac{d \ln p_{env}}{dz} \right)_z \Delta z, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \rho_{env}(z + \Delta z) &= \rho_{env}(z) + \Delta\rho_{env} \\ &= \rho_{env}(z) + \left( \frac{d\rho_{env}}{dz} \right)_z \Delta z = \rho_p(z) + \left( \frac{d\rho_{env}}{dz} \right)_z \Delta z \end{aligned} \quad (5.20)$$

である．したがって流体粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{D^2\Delta z}{Dt^2} &= -\frac{1}{\rho_p(z+\Delta z)}\frac{dp_{\text{env}}}{dz} - g \\ &= \frac{\rho_{\text{env}}(z+\Delta z)}{\rho_p(z+\Delta z)}g - g.\end{aligned}$$

ここで，流体粒子の外界は静止大気であり，そこでは静水圧平衡が成り立つので，

$$\frac{dp_{\text{env}}}{dz} = -\rho_{\text{env}}g$$

を用いた．さらに，(5.19), (5.20) を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{D^2\Delta z}{Dt^2} &= \frac{g}{\rho_p(z+\Delta z)}(\rho_{\text{env}}(z+\Delta z) - \rho_p(z+\Delta z)) \\ &= g\frac{\rho_{\text{env}}(z)}{\rho_p(z+\Delta z)}\left(\frac{d\ln\rho_{\text{env}}}{dz} - \frac{1}{\gamma}\frac{d\ln p_{\text{env}}}{dz}\right)_z\Delta z.\end{aligned}$$

(5.16) を用いると運動方程式は  $\mathcal{O}(\Delta z)$  のオーダーで

$$\frac{D^2\Delta z}{Dt^2} = -g\left(\frac{d\ln\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z\Delta z \quad (5.21)$$

となる．この方程式は，流体粒子の外界の温位の鉛直プロファイルに依存して，流体粒子の運動の形態が異なることを示している． $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z > 0$  であれば，流体粒子は変位に伴って復元力を受け，高度  $z$  を中心とした振動運動を起こす．一方， $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z < 0$  であれば流体粒子の変位は時間とともに指数関数的に増大してしまう．したがって，微小擾乱に対して鉛直方向に大気が安定であるためには， $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z > 0$  でなければいけない． $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z = 0$  が安定と不安定の境となる．

### 5.2.1 乾燥断熱減率

水蒸気を含まない大気について，鉛直方向の安定性の境となる温度プロファイルを求めて見る．先の温位の鉛直プロファイルを温度で表現すると，

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dz} &= \frac{d}{dz}\left\{T\left(\frac{p_0}{p}\right)^\square\right\} \\ &= \left(\frac{p_0}{p}\right)^\square\left(\frac{dT}{dz} - \frac{\square T}{p}\frac{dp}{dz}\right).\end{aligned}$$

安定性の境は  $\frac{d\theta}{dz} = 0$  であり，また静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると，上式から

$$\Gamma_d \equiv -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \quad (5.22)$$

が得られる． $\Gamma_d$  は乾燥断熱減率と呼ばれ，地球大気の場合， $\Gamma_d = 9.8 \text{ K/km}$  の値をとる．

### 5.2.2 Brunt–Väisälä 振動数

(5.21) の形の微分方程式は  $\frac{d \ln \theta}{dz} > 0$  の時，

$$\Delta z = C_+ e^{iNt} + C_- e^{-iNt} \quad (5.23)$$

$$N \equiv \sqrt{g \frac{d \ln \theta}{dz}} \quad (5.24)$$

のような振動数  $N$  で振動する解をもつ．このような振動数は Brunt–Väisälä 振動数と呼ばれるものである．

観測によると Brunt–Väisälä 振動数は対流圏で  $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  である．

## 第6章 流体力学の基礎方程式の解の例：音波とその周辺

本章では流体力学の基礎方程式の解として、音波が含まれていることを示す。まずその準備として、非線形の方程式である流体力学の基礎方程式を線形化（線形近似）する。次に線形化された方程式を変形することにより、それはよく知られた波動方程式の形にかけられることを示す。この波動解は、音速で伝播する縦波であることも示される。即ち、この波動の正体は音波である。さらに縦波・横波と圧縮条件との関係や流体力学の基礎方程式に含まれる平面波解の種類について議論する。

### 6.1 状況設定

理想気体の状態方程式に従う流体を考える。静止したこの流体の持つ、温度、圧力、密度をそれぞれ  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  と表すことにする。この状態を基本状態とよび、これは空間的に均質な状態、即ち  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  は時間・空間に依存しないとする。さらに重力場の効果も無視する（つまり密度成層は考えないことにする。）今、このような基本状態からの断熱的な揺らぎとして、音速  $(\gamma RT_0)^{1/2}$  で伝わる縦波が流体力学方程式の解になっていることを示す。

### 6.2 線形近似

数学的な簡単化のため流体力学の基礎方程式を線形化する。基本状態からの揺らぎが小さい場合には、このような線形化という手続きは妥当なものである。速

度場  $\boldsymbol{v}$  , 圧力  $p$  , 温度  $T$  , 密度  $\rho$  を基本状態とそれからの揺らぎとして表現する :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}', \quad (6.1)$$

$$p = p_0 + p', \quad (6.2)$$

$$T = T_0 + T', \quad (6.3)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'. \quad (6.4)$$

運動方程式は今の状況設定では

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \boldsymbol{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla (p_0 + p') \quad (6.5)$$

である . 基本状態に比べて , 揺らぎの量の大きさはきわめて小さいとする .

$$\frac{p'}{p_0} \ll 1, \quad (6.6)$$

$$\frac{T'}{T_0} \ll 1, \quad (6.7)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1. \quad (6.8)$$

したがって , 揺らぎの2次の量は無視することにする . このとき (6.5) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad (6.9)$$

とかける . ここで ,  $p_0$  は定数であること , さらに

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla p' &= \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{-1} \nabla p' \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \nabla p' \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \nabla p' \end{aligned}$$

という近似を用いた . 同様に , 連続の式は

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho_0 + \rho') \boldsymbol{v}'\} = 0$$

から

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0 \quad (6.10)$$

と簡単化される．次に熱力学の方程式は，断熱状態のときに

$$c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0$$

と書けるが，理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \quad (6.11)$$

を用いて，

$$\frac{c_v}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{c_p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (6.12)$$

の形に書き直しておくとう便利である．この場合，線形化した式は

$$\frac{c_v}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{c_p}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \quad (6.13)$$

となる．

(6.9), (6.10), (6.13) は未知変数  $v'$ ,  $p'$ ,  $\rho'$  に関する線形方程式であることに注意せよ．即ち，プライムの付いた揺らぎの成分を表す物理量が小さいという要請から，非線形である流体力学の基礎方程式が線形方程式に帰着された．このような一連の手続きを線形化といい，地球流体力学（のみならず多くの物理系の学問）において現象を解析するときにしばしば使われる方法である．

#### 演習問題

(6.12) から (6.13) を導出しなさい．

### 6.3 波動方程式

先の節で導出した方程式系が，波動方程式の形に書き表せることを示す．

運動方程式 (6.9) の発散をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p' \quad (6.14)$$

となる．連続の式 (6.10) を用いて (6.14) の速度の発散を消去すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho' = \nabla^2 p' \quad (6.15)$$



を得る．さらに (6.13) を用いて密度の時間微分を消去すると最終的に

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p' = \frac{c_p p_0}{c_v \rho_0} \nabla^2 p'. \quad (6.16)$$

が得られる．(6.16) はまさに位相速度  $c$  をもつ波動が従う方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi' = c^2 \nabla^2 \psi'. \quad (6.17)$$

の形をしており，波の位相速度が

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma R T_0} \quad (6.18)$$

となっている．(6.18) は 1.6.2 節の演習問題で導出した音波の速度と一致することに注意しなさい．

平面波解（等位相線が平面となる波）

$$p' = \Re [\hat{p} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}], \quad (6.19)$$

$$\rho' = \Re [\hat{\rho} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}], \quad (6.20)$$

$$\mathbf{v}' = \Re [\hat{\mathbf{v}} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}], \quad (6.21)$$

を仮定すると<sup>1</sup>，(6.14)，(6.15) から圧力の振幅  $\hat{p}$  と速度の振幅  $\hat{\mathbf{v}}$  との関係， $\hat{p}$  と密度の振幅  $\hat{\rho}$  との関係が決まる．ここで， $\mathbf{k}$  は波数ベクトルで，その  $x, y, z$  成分はそれぞれ， $k, l, m$  とする．また， $\mathbf{r}$  は位置ベクトルである．実際に代入することにより，

$$\omega \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho_0} (k^2 + l^2 + m^2) \hat{p}, \quad (6.22)$$

$$c_s^2 \hat{\rho} = \hat{p}, \quad (6.23)$$

ここで， $\omega^2 = c_s^2 (k^2 + l^2 + m^2)$  である．

#### 演習問題

(6.22)，(6.23) を導出しなさい．

<sup>1</sup> のついた量は複素振幅である． $\Re[\bullet]$  は括弧の中の実部を取ることを意味する．

## 6.4 縦波・横波と圧縮条件の関係

流体粒子の変位の方向と波の伝播する方向が同じであるとき，そのような波は縦波と呼ばれる．一方，それらの方向が垂直のときそのような波は横波と呼ばれる．流体粒子の変位の方向は速度ベクトルの揺らぎ  $v'$  (または  $\hat{v}$ ) の方向と一致しており，また波の伝播方向は波数ベクトル  $k$  に平行である．したがって，縦波では  $k \cdot \hat{v} \neq 0$ ，であり，横波では  $k \cdot \hat{v} = 0$  となる．上で求めた波動解は，(6.22) より縦波であることがわかる．<sup>2</sup>

一方，もし非圧縮性流体を考察の対象とした場合，非圧縮条件は  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  なので，これと連続の式から

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

となる．これに再び平面波解 (6.21) を代入すると，

$$k \cdot \hat{v} = 0 \quad (6.24)$$

を得る．(6.24) は非圧縮条件を満足する平面波解は，横波であることを表している．

## 6.5 波動解の種類

6.3 節では波動方程式を導く際に，変数を次々に消去して， $p'$  だけの方程式に帰着させた．ここでは，別の方法を用いて波動解を議論する．

まず，(6.13) を (6.10) を用いて，

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (6.25)$$

の形に書き直しておく．(6.9), (6.10), (6.25) に平面波解 (6.19) ~ (6.21) を代入すると，以下の代数方程式が得られる．

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 0 & 0 & i\frac{p_0}{\rho_0}k & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & i\frac{p_0}{\rho_0}l & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & i\frac{p_0}{\rho_0}m & 0 \\ i\gamma k & i\gamma l & i\gamma m & -i\omega & 0 \\ ik & il & im & 0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \frac{p'}{p_0} \\ \frac{\rho'}{\rho_0} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.26)$$

<sup>2</sup>(6.22) で  $\hat{p} \neq 0$  である． $\hat{p} = 0$  のとき， $p' = \rho' = 0$ ， $\mathbf{v}' = 0$  なのでそのような解は自明な解である．

$(u', v', w', \frac{p'}{\rho_0}, \frac{\rho'}{\rho_0})^T$  が自明でない解を持つためには，(6.26) の係数行列の逆行列が存在してはいけない．即ち，(6.26) の係数行列の行列式がゼロである必要がある．この条件は，以下の様な  $\omega$  に関する 5 次方程式になる：

$$\omega^3 \left\{ \omega^2 - \frac{p_0}{\rho_0} \gamma (k^2 + l^2 + m^2) \right\} = 0. \quad (6.27)$$

5 次方程式の解は全部で 5 個あるが，今考察している状況設定ではそのうちの 3 つが  $\omega = 0$  に縮退している．残りの 2 つが互いに逆向きに伝播する音波である．

上の解析からわかるように，流体力学方程式には 5 種類の平面波解が存在することになる．そのうちの 2 つが音波であり，安定な密度成層の効果を考慮すると， $\omega = 0$  の縮退が一部解けて，前章で議論した Brunt – Väisälä 振動数に比例した波動が 2 つ（音波の場合と同様に，互いに逆向きに伝播する）出てくる．これは重力波と呼ばれるものである．また，地球上の流体運動のように座標系の回転の効果を考慮すると最後のひとつのモードも zero でない振動数をもつ．なお，音波や重力波では互いに逆向きに進む 2 つの波で構成されているのに対して，この最後のモードは一方向にしか伝播しない．

## 第7章 回転系上の運動方程式

我々は大気・海洋の運動を地球の上で観測している．そこで，大気・海洋の運動を理論的に考察するには，地球上に固定された座標系を用いるのが適当であろう．これまでの議論は（暗黙の了解として）慣性系で流体现象を記述してきた．本章では地球は回転する球面である事を基礎方程式の記述に取り込むことにより，地球流体力学における基礎方程式の導出を行うことにする．先ず始めに地球の自転効果を考慮するため，回転座標系で運動方程式を書き下す．次にベクトル形式で書かれた運動方程式を球面座標系における各成分の方程式に書き直す．これにより，地球流体力学におけるもっとも一般的な運動方程式が提示される事になる．しかしながら，この方程式は非常に複雑であるために，理論的考察を行うには少々不便である．そこで，地球が回転する球面であるという効果をデカルト座標系のような直線直交座標系にうまく取り込んだ近似的方程式を導出する．

基礎方程式のうち，地球の自転の効果によって変更を受けるのは運動方程式のみである．そこで，本章の議論は運動方程式のみに限定する．話を簡単化するために，流体は非粘性とする<sup>1</sup>．

### 7.1 Coriolis の力

問題設定 Newton の第一法則の状況を考える<sup>2</sup>．すなわち，単位質量の物体が慣性系（ $Oxyz$  系，単位ベクトル  $i, j, k$ ）では何の力の影響も受けずに運動しているとする．すなわち，

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0. \quad (7.1)$$

<sup>1</sup>Newton 流体を考察する場合には，粘性力項は全て  $\mathcal{K}$  に含まれていると考えれば，本節の議論は粘性流体にも適用できる．極座標系における粘性力項の表現は，Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*. 2nd. Ed. Pergamon Press. 1987. p.48 – 49. を参照の事． $\beta$  平面近似方程式における粘性力項の表現は，デカルト座標系における表現と一緒である．

<sup>2</sup>Newton の第一法則とは慣性の法則とも呼ばれ，“すべての物体は力が働いていなければ静止状態，又は等速直線運動を保つ”ことを述べている．Newton の法則は絶対静止系での観測を仮定している．今ある座標系  $Oxyz$  で Newton の第一法則が成り立っているとすると，このとき  $Oxyz$  に対して等速で運動する座標系  $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  でも Newton の法則が成り立つ．このような座標系  $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  を慣性系という．

この現象を  $z$  軸を回転軸として一定の角速度  $\Omega$  で回転している座標系 ( $Ox'y'z'$ 系, 単位ベクトル  $i', j', k'$ ) から眺める.

位置ベクトル  $r$  は2つの座標系で

$$\begin{aligned} r &= x i + y j + z k \\ &= x' i' + y' j' + z' k' \end{aligned} \quad (7.2)$$

と表現できる. また2つの座標系における単位ベクトルの関係は

$$i' = \cos \Omega t i + \sin \Omega t j \quad (7.3)$$

$$j' = -\sin \Omega t i + \cos \Omega t j \quad (7.4)$$

$$k' = k, \quad (7.5)$$

である.

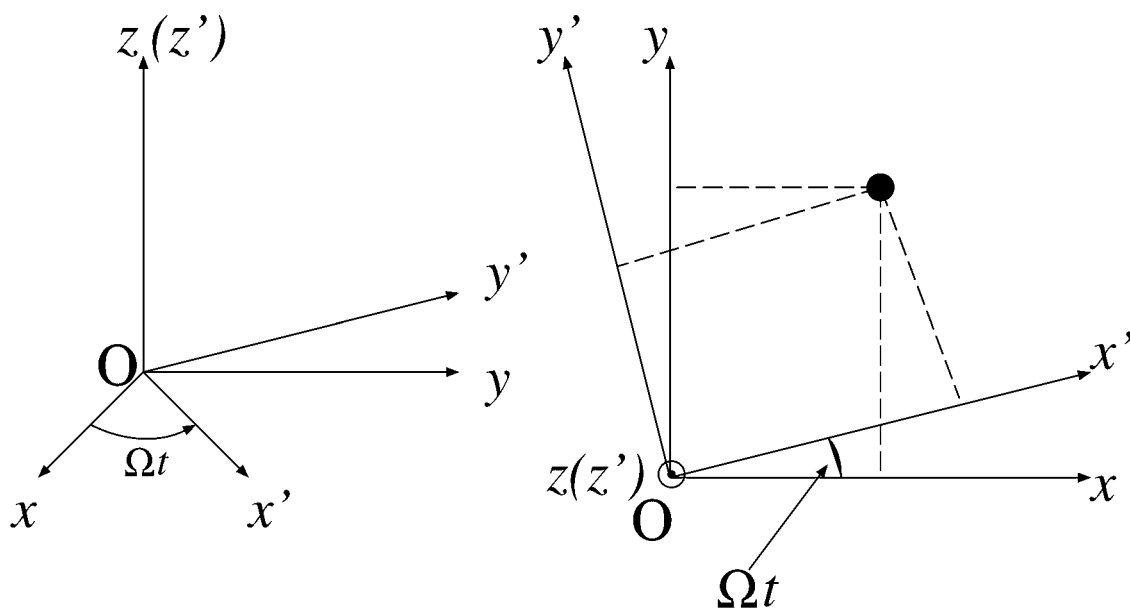


図 7.1:  $Oxyz$  系と  $Ox'y'z'$  系の関係.

位置ベクトル  $r$  の時間微分は次式のように与えられる:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \\ &= \frac{dx'}{dt} i' + \frac{dy'}{dt} j' + \frac{dz'}{dt} k' + x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

ベクトルの微分に関する 極めて重要な注意：(7.6) の第一の表現に注意しなければならない．特に断りがない場合には，ベクトルの微分はベクトルの各成分に対して微分が作用し，単位ベクトルには微分は作用しない．そこで，(7.6) の第一の表現は極めて自然であるように見える．

しかしながら微分の chain rule に従うならば，(7.6) の第一の表現において， $i, j, k$  の時間微分

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (7.7)$$

となるはずである．なぜ，単位ベクトルの微分は現れないのか．それはデカルト座標系では単位ベクトルは大きさも向きも変化しない座標系であるからである．そこで(7.6) の第一の表現において， $i, j, k$  の時間微分はゼロである．しかしながら，回転座標系の単位ベクトルは，慣性系から眺めたときには時間と共にその向きを変化させている．そこで，(7.6) の第2の表現では単位ベクトルの時間微分が残っているのである．

このことから，ベクトルを微分する場合にはどの座標系で眺めた微分なのかをきちんと区別しておく必要がある．ここでは微分に添え字をつけることによってどの座標系で現象を観測した場合の微分なのかを明示することにする．(7.6) の微分は慣性座標系の単位ベクトルの微分を伴わないものなので，慣性系の時間微分と解釈するべきである．そこでこれを

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_I = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (7.8)$$

と表す．一方，回転座標系で現象を眺めたときの時間微分は，回転座標系の単位ベクトルの時間微分を伴わない．そこで

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_R = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \quad (7.9)$$

である．

もし高校数学で教わっていたようにベクトル  $\mathbf{r}$  を  $(x, y, z)$  や  $(x', y', z')$  と表現していたならば，このような単位ベクトルの違いに気づかない．そこで，高校数学で習っていたようなベクトルの成分表示は直ちに捨て，直ちに単位ベクトルを用いた表現に改宗するべきである．

(7.6) の最後の表式の第4～6項は  $Ox'y'z'$  系が  $Oxyz$  系に対して回転しているために， $Ox'y'z'$  系の単位ベクトルの向きが変化することを表している．回転系の単

位ベクトルの時間微分は (7.3), (7.4) より,

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_I = -\Omega \sin \Omega t \mathbf{i} + \Omega \cos \Omega t \mathbf{j} = \Omega \mathbf{j}', \quad (7.10)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_I = -\Omega \cos \Omega t \mathbf{i} - \Omega \sin \Omega t \mathbf{j} = -\Omega \mathbf{i}', \quad (7.11)$$

となる. したがって

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R + \Omega(x' \mathbf{j}' - y' \mathbf{i}')$$

を得る. 角速度ベクトル  $\Omega = \Omega \mathbf{k}$  を導入すると上式は,

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R + \Omega \times \mathbf{r} \quad (7.12)$$

と書き換えられる. そこで, 任意のベクトルに対し慣性系での時間微分と回転系での時間微分に間には

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_I = \left(\frac{d}{dt}\right)_R + \Omega \times \quad (7.13)$$

の関係がある事になる.<sup>3</sup> (7.12) の左辺は慣性座標系における速度ベクトル, 右辺第1項は回転座標系における速度ベクトルと解釈できる. そこで, これらをそれぞれ  $v, v'$  と表すことにする. (7.13) に (7.12) を代入すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_I &= \left\{ \left(\frac{d}{dt}\right)_R + \Omega \times \right\} (\mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_R + \Omega \times \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R}_{=\mathbf{v}'} + \Omega \times \mathbf{v}' + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_R + 2\Omega \times \mathbf{v}' + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

したがって式 (7.1) は,

$$\left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_R = -2\Omega \times \mathbf{v}' - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) \quad (7.15)$$

となる. すなわち慣性系では物体にはなんの力も作用していなかったが, 回転座標系でこの現象を眺めると, あたかも物体に力 (式 (7.15) の右辺の二つの項) が働い

<sup>3</sup>ここでは回転軸を  $z$  方向として議論したが, 回転軸が任意の方向のときでも, ベクトル形式で書かれたこの公式は成り立つ.

ているように見える。このような見かけの力は二種類に分けられ、式 (7.15) の右辺第一項、第二項はそれぞれ Coriolis の力、遠心力と呼ばれる。

Coriolis の力の特徴は、

- 回転軸および回転系に相対的な物体の速度に直交する方向に働く。したがってこの力は仕事をしない。
- 回転系に相対的な物体の速さに依存した大きさを持つ。

いっぽう、遠心力の特徴は、

- 回転軸から物体を結ぶ直線上で外向きに働く。
- 回転軸からの距離に依存する大きさを持つ。

## 7.2 回転系における運動方程式

7.1 節で述べたように、慣性系に対して一定の角速度  $\Omega$  で回転している座標系で質点の運動を観測すると、慣性系では存在していなかった見掛けの力（遠心力と Coriolis の力）が物体に働いているように見える。即ち、回転系上の質点の運動方程式を構築するには、慣性系上の質点の運動方程式の加速度  $\left(\frac{dv}{dt}\right)_I$  を回転系に相対的な速度の回転系上での時間微分  $\left(\frac{dv'}{dt}\right)_R$  に置き換え、質点に働いている力に Coriolis 力と遠心力を付け加えればよい ((7.15) 式参照)。流体力学の場合には、質点の運動に関する時間微分  $\frac{d}{dt}$  に対応するものは Lagrange 微分  $\frac{D}{Dt}$  である。そこで回転系における Euler 的記述の運動方程式は速度  $v$  の Lagrange 微分を次のように置き換えればよいことが分かる：

$$\frac{Dv}{Dt} \rightarrow \frac{Dv}{Dt} + 2\Omega \times v + \Omega \times (\Omega \times r). \quad (7.16)$$

ここで 7.1 節で、慣性系で観測される速度と回転系に相対的な速度を区別するために導入した prime, および、慣性系での時間微分と回転系上での時間微分を区別するために導入した添字 R は省略した。したがって、回転系上の Euler 的記述の運動方程式は、Lagrange 微分を Euler 的表記に書き直して

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + 2\Omega \times v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathcal{K} - \Omega \times (\Omega \times r) \quad (7.17)$$

となる。しかしながら、重力と地球の形に付いて考えると、(7.17) 式をもう少し簡単化することができる。



### 7.3 球座標系

0.1 節において、本講義ではデカルト座標系、即ち、直線座標系を用いて現象を記述すると述べたが、重力を考察する場合や地球が球である効果をデカルト座標系のような直線座標系の方程式に導入するために、本節と引き続くいくつかの節において曲線座標系を使うことにする。まず、気象学においてよく用いられる曲線座標系として球座標系に付いて説明する。

球座標系  $(\lambda, \phi, r)$  とは、3次元極座標系  $(r, \theta, \phi)$  に類似するものであるが、子午線方向の測りかたを極軸からではなく赤道面から測った座標系である（図 7.2 参照）。ここで、 $\lambda, \phi, r$  はそれぞれ、経度、緯度、動径である。 $\lambda, \phi, r$  方向の単位ベクトルはそれぞれ  $e_\lambda, e_\phi, e_r$  とあらわす。動径方向の距離は地球の中心からの距離  $r$  の代わりに、惑星を半径  $a$  の球と仮定し、地表からの幾何学的高度  $z = r - a$  を用いる場合もある。特に地球の大気・海洋では実用的見地から動径方向には幾何学的高度を使った方が便利である。

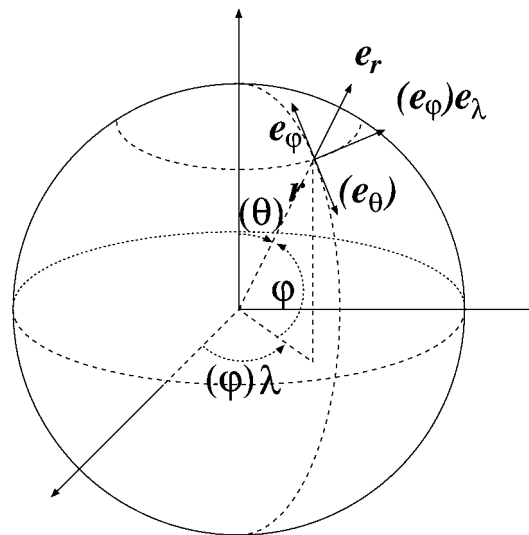


図 7.2: 極座標と球座標の関係. 括弧付の量は極座標における量である.

### 7.4 実効重力

いま地球が半径  $a$ 、一定の角速度  $\Omega$  で自転する密度が一様な質量  $M$  の剛体球であると仮定する。地球上のある緯度  $\phi$ 、高度  $z$  に単位質量の質点が静止していた

極座標		球座標
$r$ : 動径	$\iff$	$r$ : 惑星中心からの距離
$\theta$ : 余緯度	$\iff$	$\phi$ : 緯度, $(\theta + \phi = \frac{\pi}{2})$
$\phi$ : 方位角	$\iff$	$\lambda$ : 経度

表 7.1: 極座標と球座標の対応関係

とする. このとき質点に働く力は地球との間に働く万有引力と遠心力である.<sup>4</sup> いまこの2つの力の合力を実効重力 (effective gravity) と呼び  $\mathbf{g}$  で表そう.<sup>5</sup> 即ち

$$\mathbf{g} \equiv -\frac{a^2}{(a+z)^2} g^* \mathbf{e}_r + \Omega^2 (a+z) \cos \phi \mathbf{e}_\rho. \quad (7.18)$$

ここで  $\mathbf{e}_r$  は球座標系  $(\lambda, \phi, r)$  における動径方向の単位ベクトル,  $\mathbf{e}_\rho$  は円筒座標系  $(\rho, \theta, z)$  における動径方向の単位ベクトルを表す. 球座標系における動径方向の単位ベクトルと緯度方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_\phi$  との間には

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \quad (7.19)$$

の関係がある. また  $g^*$  は万有引力定数  $G$  を用いて

$$g^* = \frac{GM}{a^2} \quad (7.20)$$

と表される.

図7.3からわかるように, 実効重力は遠心力があるために地球の中心の方向  $(-\mathbf{e}_r)$  を向かず, 緯度  $\phi$ , 経度  $\lambda$  に張られた接平面 (局所的平面,  $\mathbf{e}_r$  を法線とする平面) にたいして垂直になっていない. どのくらい傾いているかここで見積もってみる. ある緯度  $\phi$ , 高度  $z = 0$  で議論をする. 万有引力の方向  $\mathbf{e}_r$  と実効重力の方向との傾きを  $\delta$  とするとそれは

$$\begin{aligned} \delta &= \cos^{-1} \frac{\mathbf{g} \cdot (-g^* \mathbf{e}_r)}{g^* |\mathbf{g}|} \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi}{\sqrt{(g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi)^2 + (\Omega^2 a \cos \phi \sin \phi)^2}} \right) \end{aligned} \quad (7.21)$$

<sup>4</sup>Coriolis 力は回転系に相対的な速度に比例するので, 今考察している状況で現れて来ない.

<sup>5</sup>万有引力による重力を英語では gravitational force と呼び, いっぽう, 万有引力と遠心力の合力を gravity force, もしくは gravity と呼んで区別している.

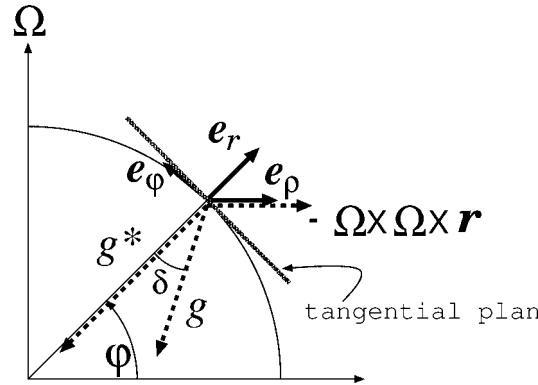


図 7.3: 万有引力, 実効重力, 遠心力, 局所平面の関係.

で与えられる.<sup>6</sup> いま  $a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ ,  $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $g^* = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  として (7.21) を数値的に見積もってみると, その値は緯度 45 度で最大値  $\delta = 9.9 \times 10^{-2}$  度 (約 6 分) となる. これは 1 km につき約 1.7 m 昇る, もしくは下る坂に等しい. つまり, 地球を完全な球であるとすると, その上に住んでいる我々が地面と思っている接平面は, 重力に対して垂直でなく, 地表が至るところ  $\delta$  の角度を持った坂になっていることになる.

実際の地球は剛体ではなく力を受けると変形をする. 遠心力のために回転軸から外向きに引っ張られて極半径よりも赤道半径が長くなっている.<sup>7</sup> そこであらためて地球の形を「至るところで実効重力と垂直になっている一続きの面の形」と定義しなおす. この面の表面は 回転球体の全表面を水で覆ったとき, その水面がとる形に等しい. 地球の形をこのように定義すると, 緯度  $\phi$  に張られた接平面では平面の法線方向と実効重力の方向が一致する.<sup>8</sup>

重力の値  $|g|$  は (7.18) 式にあるように緯度・高度, さらには実際の地球内部の質量分布の非一様性のために経度にも依存する.<sup>9</sup> しかしながら地球の大気・海洋の

<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}
 g \cdot (-g^* e_r) &= (-g^* e_r + \Omega^2 a \cos \phi e_\rho) \cdot (-g^* e_r) \\
 &= g^{*2} - \Omega^2 a \cos \phi (\cos \phi e_r - \sin \phi e_\phi) \cdot g^* e_r \\
 &= g^{*2} - g^* \Omega^2 a \cos^2 \phi, \\
 |g| &= \sqrt{(g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi)^2 + (\Omega^2 a \cos \phi \sin \phi)^2}
 \end{aligned}$$

<sup>7</sup> 極半径  $6.356 \times 10^6 \text{ m}$ , 赤道半径  $6.378 \times 10^6 \text{ m}$ .

<sup>8</sup> 実際, 我々は実効重力のかかっている方向を, 鉛直と定めている.

<sup>9</sup> (7.18) から  $|g|$  を見積もると赤道と極との間で  $3.4 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  の差がある. 実際の観測された重力は赤道で  $9.78 \text{ m s}^{-2}$ , 極で  $9.83 \text{ m s}^{-2}$  である. (例えば, M.L. Salby, “Fundamentals of

場合, それが存在する領域  $z$  は地球の半径  $a$  に比べて極めて小さいのでこのような場合には  $|g|$  の高度依存性はほとんど無視してよい.<sup>10</sup> また, 緯度・経度依存性も考慮せず, 定数 ( $g \simeq g_0 = 9.806 \text{ m s}^{-2}$ ) として扱う.

**演習問題:**

万有引力の方向と実効重力の方向の成す角 (7.21) の厳密な表式を,  $\sin \phi \sim \cos \phi \sim O(10^{-1})$ ,  $\Omega^2 a / g^* \ll 1$  であるとして近似すると,  $\Omega^2 a \sin(2\phi) / (2g^*)$  となる. このことを確かめなさい. (Taylor 展開のいい演習問題である.)

## 7.5 球座標系での運動方程式

前節で議論したように, 地球は完全な球ではない. しかしながら, 地球の赤道半径と極半径との差は僅かであるため, 地球流体力学では地球を完全な球とみなしても実用上差し支えない. また万有引力と遠心力との合力である実効重力が球と見做した地球の中心に向く (球の接平面と垂直に交わる) として, 遠心力の項は万有引力の項に繰り込み,

$$\mathbf{g} = -\frac{a^2}{(a+z)^2} g_0 \mathbf{e}_r \quad (7.22)$$

とする. このとき地球 (惑星) が回転している効果, もしくは座標系が回転している効果, は Coriolis 力項の有無のみに集約される. このような場合の Euler の運動方

---

*Atmospheric Physics*, (Academic Press, 1996) や坪井忠二, “重力 第2版”, (岩波全書, 岩波書店, 1979) を参照.

<sup>10</sup>地球大気は, せいぜい  $O(10^2)$ km 程度領域にしか存在しない. 海洋の最も深いところは  $O(10)$ km 程度である. それに対して, 地球の半径は約 6400 km である.

程式 (7.17) を球座標系の成分で書くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_\lambda v_r}{r} - \frac{v_\lambda v_\phi \tan \phi}{r}}_{*1} \\ - 2\Omega \sin \phi v_\phi + \underbrace{2\Omega \cos \phi v_r}_{\dagger 1} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{K}_\lambda, \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\lambda^2 \tan \phi}{r}}_{*2} \\ + 2\Omega \sin \phi v_\lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mathcal{K}_\phi, \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \underbrace{\frac{v_\phi^2 + v_\lambda^2}{r}}_{*3} \\ - \underbrace{2\Omega \cos \phi v_\lambda}_{\dagger 2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \mathcal{K}_r, \end{aligned} \quad (7.25)$$

となる。ここで  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{K}_\phi, \mathcal{K}_r)$  は前出の  $\mathcal{K}$  から重力を除いたものを改めて  $\mathcal{K}$  とした。\*を付けた項は、座標が曲率  $r$  で曲がっているという効果を表し、曲率項 (curvature term) と呼ばれる。<sup>11</sup>

<sup>11</sup>(7.23) ~ (7.25) の導出をここでは示さないが、極座標系における運動方程式を適当なテキストを参照し、球座標に変換することで確かめられる。また球座標系における運動方程式の heuristic な導出の仕方は J. R. Holton, "An Introduction to Dynamic Meteorology, 3rd Ed.", (Academic Press, 1992) の第2章に詳しく書かれている。キーポイントは7.1節では、単位ベクトルの時間微分が生じることに注意を喚起したが、極座標系、円柱座標系、球面座標系では単位ベクトルの空間微分が生じてくることである。単位ベクトルの微分の結果だけを記しておく、

$$\frac{D\mathbf{e}_\lambda}{Dt} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} (\sin \phi \mathbf{e}_\phi - \cos \phi \mathbf{e}_r) \quad (7.26)$$

$$\frac{D\mathbf{e}_\phi}{Dt} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\frac{v_\lambda \tan \phi}{r} \mathbf{e}_\lambda - \frac{v_\phi}{r} \mathbf{e}_r \quad (7.27)$$

$$\frac{D\mathbf{e}_r}{Dt} = \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \frac{v_\lambda}{r} \mathbf{e}_\lambda + \frac{v_\phi}{r} \mathbf{e}_\phi \quad (7.28)$$

である。

スケール	記号	特徴的大きさ
水平スケール	$L$	$10^6$ m, (1000 km)
鉛直スケール	$H$	$10^4$ m, (10 km)
水平風速のスケール	$U$	$10$ m s $^{-1}$
鉛直風速のスケール	$W$	$10^{-2}$ m s $^{-1}$
時間スケール	$T$	$10^5$ s, (1 day)
気圧の変動のスケール	$\delta P$	$10^3$ Pa
地表における密度	$\rho$	$1$ kg m $^{-3}$

表 7.2: 地球大気の総観規模運動の代表的スケール

## 7.6 $\beta$ 平面近似

球座標系における運動方程式は、デカルト座標系のような直線座標系の式に比べて複雑で理論的には取り扱いにくい。そこで、地球が回転する球であるという効果を残した直線座標系近似として、地球流体力学では  $\beta$  平面近似がよく用いられる。これは緯度  $\phi_0$ 、経度  $\lambda_0$  に張られた接平面上で流体の運動を記述するものである。<sup>12</sup>  $\beta$  平面近似では、以下に示す手順にしたがって (7.23) ~ (7.25) を単純化したものである。

ここでは注目する現象として、総観規模程度の現象を念頭に置く。この現象に付随した物理量の特徴的な大きさは表 7.2 のとおりである。

手順 1: 東西, 南北, 鉛直方向を, それぞれ  $x, y, z$  方向,  $x, y, z$  方向の速度成分をそれぞれ  $u, v, w$  と定義する。すなわち,

$$x = r \cos(\phi_0)(\lambda - \lambda_0), \quad y = r(\phi - \phi_0), \quad z = r - a, \quad (7.29)$$

$$u = v_\lambda, \quad v = v_\phi, \quad w = v_r. \quad (7.30)$$

このとき微分作用素は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r \cos \phi_0} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad (7.31)$$

と表現される。この変数変換は、近似ではなく正確な表現である。このとき、

<sup>12</sup>実際われわれは、この接平面を水平面と認識して生活している。

(7.23) ~ (7.25) は

$$\frac{Du}{Dt} - \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \phi}\right) (v \sin \phi - w \cos \phi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{K}_x, \quad (7.32)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{wv}{r} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \phi}\right) u \sin \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{K}_y, \quad (7.33)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \mathcal{K}_z, \quad (7.34)$$

となる。ここで、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.35)$$

である。

手順 2: 地球の大気や海洋のように、惑星の半径に比べて流体の存在する領域が極めて薄い場合には、球座標系で書かれた方程式 (7.32) ~ (7.34) に現れる  $1/r$  の項は、よい近似で  $1/a$  に置き換えられる。<sup>13</sup>

手順 3: (7.32) の右辺第 2 項, (7.33) の左辺第 3 項において、東西方向の風速は一般的に  $100\text{ms}^{-1}$  よりも遅いので、極付近 ( $\phi = \pi/2$ ) を除いて、

$$\frac{u}{a \cos \phi} \ll \Omega \quad (7.36)$$

が成り立つ。また、鉛直速度も水平速度に比べて非常に遅いので、赤道を除いて

$$|w \cos \phi| \ll |v \sin \phi| \quad (7.37)$$

が成り立つ。したがって、(7.32) の右辺第 2 項, (7.33) の左辺第 3 項は

$$-2\Omega v \sin \phi \quad (7.38)$$

$$-2\Omega u \sin \phi \quad (7.39)$$

と近似される。さらに、(7.24) の曲率項  $vw/r$  を Coriolis 力項と比べると小さいことがわかる。

手順 4: このような置き換えを行った場合には、もとの方程式が保持していた基本的な保存則が近似後の方程式において破られないように注意しなければいけ

<sup>13</sup>大気の存在する領域はせいぜい 100 km 程度なのに対し、地球半径  $a$  は  $a \sim 6400\text{km}$  である。

ない。ここでは運動エネルギーに注目する。(7.23)に $u$ , (7.24)に $v$ , (7.25)に $w$ をかけて全てを足してエネルギー方程式を作る。Coriolis力項は見かけの力であるためにこのエネルギー方程式には陽には現れてこない。本来(7.34)のCoriolis力項は(7.32)の $2\Omega w \cos \phi$ の項と相殺するが、手順3でこの項は小さいとして無視したので、(7.25)のCoriolis力項と相殺する項がなくなってしまった。運動エネルギーの保存則が満足されるためには、手順3で $2\Omega w \cos \phi$ を無視するのと同時に、(7.25)のCoriolis力項も無視する必要がある。

さらに、曲率項も運動エネルギーに寄与しないので、(7.32), (7.33)に現れた曲率項を手順3で無視したことが運動エネルギーの保存則と抵触しないためには、(7.34)の曲率項も無視する必要がある。<sup>14</sup>

手順5: Coriolis力項に現れる $2\Omega \sin \phi$ は、Coriolisパラメータと呼ばれ、記号 $f$ で表すのが慣例である。接平面上の記述であることを考慮して、緯度 $\phi_0$ からの南北方向の変位が微小であるとして、 $f$ を $\phi_0$ の周りにTaylor展開して $y$ の1次の項のみ残すという近似を行う。

$$f = 2\Omega \sin \phi \simeq 2\Omega \sin(\phi_0 + y/a) \simeq f_0 + \beta y, \quad (7.40)$$

$$f_0 \equiv 2\Omega \sin \phi_0, \quad (7.41)$$

$$\beta \equiv \frac{2\Omega \cos \phi_0}{a}. \quad (7.42)$$

なお、 $\beta = 0$ とした記述は、 $f$ 平面近似と呼ばれる。<sup>15</sup>

以上の考察により、運動方程式は成分で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{K}_x, \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{K}_y, \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{K}_z - g, \quad (7.45)$$

ベクトル形式では、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathcal{K}, \quad (7.46)$$

<sup>14</sup>(7.25)の曲率項とCoriolis力項の大まかな大きさを重力加速度と比べると、これら項が小さいことがわかる。

<sup>15</sup> $f$ の展開の2次の項 $f = f_0 + \beta y - \frac{1}{2} \delta y^2$ ,  $\delta = \frac{2\Omega \sin \phi_0}{a^2}$ までを残した近似は、 $\delta$ 曲面近似と呼ばれる (Yang, H., *Wave Packets and Their Bifurcations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, 1990, 247pp.)



と書ける。ここで、 $f = (f_0 + \beta y)k$  である。

以上をまとめると、回転系上の運動方程式は、座標系が回転している効果を水平方向の運動方程式の Coriolis 力項の有無によって表した (7.46) を基礎方程式とする。また、地球が球であることを平面的記述に取り込むために、Coriolis 力が南北方向 ( $y$  方向) に依存するとして、(7.46) の Coriolis パラメーター  $f$  を (7.40) ~ (7.42) で表現した式を用いる。

補足：上記の手順 3 ~ 4 の単純化に付いては、注目したい現象に特徴的な時間・空間スケールから、方程式の各項の大きさを見積もり、記述する現象に寄与する項を残すという操作を行っている。これは、スケール解析といって、流体力学的に厳密な方程式から、注目する現象を記述する方程式を導出する時に用いられる常套手段である。スケール解析とは、単なる方程式の数学的単純化ではなく、注目したい現象に適切な方程式を導出するための物理的考察である。例えば、流体力学的に厳密な方程式には音波のような地球流体現象を起こす素過程とはなりえない現象まで含まれている。スケール解析ではこのような現象を取り除き、方程式を単純化していくのである。ただし、スケール解析で重要な点は、現象の観測がきちんと行われていて、注目したい現象の時間空間スケールが既知である必要がある。幸い、地球の大気海洋現象は長年にわたり広範囲な観測が行われてきたので、スケール解析を行うだけの情報が既に揃っている。それに対して、他惑星の大気を扱う場合には、観測が十分に行われていないのでスケール解析を行うだけの情報がないのが現状である。

**演習問題:**

表 7.2 を参考にしてスケール解析を行い、地球大気の大規模運動に対しては、(7.23) において Coriolis 力項  $2\Omega \sin \phi v_\phi$  に比べて、曲率項と  $2\Omega \cos \phi v_r$  が小さい事を確かめよ。同様に (7.24) において Coriolis 力項に比べて、曲率項が小さい事を確かめなさい。

## 第8章 運動方程式の簡単な応用

前節までに提出された回転系上の運動方程式をもとに，その応用として簡単な流れ場を考察する．

### 8.1 バランスした流れ：傾度風平衡

状況設定：鉛直軸  $z$  の周りに一定の角速度  $f/2$  で回転している系の上の流体運動を考察する．流体運動はこの回転系上の座標系で記述する．

流体は，非圧縮・非粘性流体とし，ある点  $O$  を中心に時間的に一定の速度  $V$  で旋回する水平 2 次元的運動をしているとする．

ここで考察する流れ場は，大きなスケールでは，高気圧や低気圧の周りを廻る風の場合，小さなスケールでは竜巻に伴う旋回する風，コーヒーカップやティーカップ内の流体を掻き回したときの流れ場を想定して，上記のような問題設定をしている．

上記のような流れ場を考察する場合には， $O$  を原点とする 3 次元円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を用いるのが便利である．この座標系の動系方向，方位角方向，鉛直方向の単位ベクトルはそれぞれ  $e_r, e_\theta, e_z$  である．

注意：3次元円筒座標系の3つの単位ベクトル  $e_r, e_\theta, e_z$  のうち  $e_\theta$  は  $\theta$  の関数である事に注意せよ．

議論の出発点である運動方程式はベクトル形式で

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{e}_z \quad (8.1)$$

である．3次元円筒座標系では微分演算子  $\nabla$  は次のように表現される：

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (8.2)$$

流体の速度  $\mathbf{v}$  は円筒座標系では一般に

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \quad (8.3)$$

とかけるが、今の状況設定のもとでは

$$\boldsymbol{v} = V(r, \theta, z)\boldsymbol{e}_\theta \quad (8.4)$$

である。

方位角方向の流れ  $V$  は連続の式を考慮すると以下のように方位角  $\theta$  に依存しないことがわかる。非圧縮性流体の連続の式は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (8.5)$$

である。(8.5) に (8.2), (8.4) を代入すると、

$$\begin{aligned} \left( \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (V\boldsymbol{e}_\theta) &= \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial V}{\partial r} + V\boldsymbol{e}_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} \\ &\quad + \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \boldsymbol{e}_\theta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} \\ &\quad + \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial V}{\partial z} + V\boldsymbol{e}_z \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial z} \\ &= V\boldsymbol{e}_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \boldsymbol{e}_\theta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} + V\boldsymbol{e}_z \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial z}. \end{aligned}$$

単位ベクトルの直交性および、単位ベクトル  $\boldsymbol{e}_\theta$  の微分は

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial z} = 0, \quad (8.6)$$

であることを考慮すると、(8.5) は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (8.7)$$

となる。この式から、 $V$  は  $\theta$  に依存しないことがわかる。

運動方程式 (8.1) に (8.2), (8.4) を代入し、 $V(r)$  の従う方程式に書き換える。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} \boldsymbol{e}_\theta = 0,$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V\boldsymbol{e}_\theta) = -\frac{V^2}{r} \boldsymbol{e}_r,$$

$$f\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{v} = -fV\boldsymbol{e}_r,$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \boldsymbol{e}_z,$$

より,  $r, \theta, z$  方向の運動方程式はそれぞれ

$$\frac{V^2}{r} + fV - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (8.9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \quad (8.10)$$

となる。(8.8) の左辺第1項は流体粒子が旋回運動を行うことによる遠心力を表し, 第2項は Coriolis 力, 第3項は動径方向の気圧傾度力を表す。動径方向にはこの3つの力がバランスして定常的な流れが実現している。このようなバランスは傾度風平衡 (gradient wind balance) と呼ばれている。(8.9) は圧力  $p$  が  $\theta$  に依存しないことを示しており, このことから水平面内では等圧線は同心円状になることがわかる。(8.10) は鉛直方向の流れがないことから, 鉛直方向の気圧傾度力と重力がバランスした静力学平衡が成り立っていることを示している。

## 8.2 傾度風平衡の吟味

前節で得られたバランスの式, 特に動径方向の式 (8.8), を吟味してみる。(8.8) は気圧場が与えられたときの速度場  $V$  に関する2次方程式とみなすことができる。そこで2次方程式の解の公式を適用し  $V$  を求めてみる:

$$V = \frac{1}{2} \left\{ -fr \pm \sqrt{(fr)^2 + \frac{4r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}} \right\}. \quad (8.11)$$

注意:  $\frac{\partial p}{\partial r}$  の符号によって, 高気圧的気圧分布と低気圧的気圧分布が表現できることに注意しなさい。前節で述べたように水平面内では等圧線は同心円状である。そこで  $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$  の時は原点  $O$  から遠ざかるにしたがって気圧は増えていくことを表しており, したがってこのときは台風や低気圧のような気圧分布になっている。同様に  $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$  は高気圧的気圧分布を表している。

吟味1: 速度場  $V$  は実数でなければいけない。

このことから (8.11) の根号のなかは正の値でなければいけない。すなわち判別式

$$\frac{\partial p}{\partial r} > -\frac{\rho f^2 r}{4} \quad (8.12)$$

を得る。(8.12) は動径方向の気圧傾度には下限が存在することを示している。 $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$  は高気圧に対応するが高気圧の気圧傾度の値  $|\frac{\partial p}{\partial r}|$  には制限があるのに対し、低気圧のそれには制限はない。

### 吟味2： 低気圧の周りを廻る風の向き

低気圧的な気圧分布を考える，すなわち  $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$  である．このとき (8.11) の2つの解は

$$\begin{aligned} V_+ &= \frac{1}{2} \left\{ -fr + \sqrt{(fr)^2 + \left| \frac{4r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right|} \right\}, \\ V_- &= \frac{1}{2} \left\{ -fr - \sqrt{(fr)^2 + \left| \frac{4r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right|} \right\} \end{aligned} \quad (8.13)$$

と表現できる． $f > 0$  のとき， $V_+ > 0$ ， $V_- < 0$  である．つまり低気圧的気圧分布の周りを廻る風は反時計回り ( $V_+$ ) も時計回り ( $V_-$ ) も可能である．このことは日常経験的に知られている（もしくは初等教育で習った）北半球では低気圧の周りを廻る風は反時計回りであることと対比される． $V_+$  の解は日常経験に合致するが， $V_-$  の解は日常経験と矛盾する．しかしながら日常経験と一見矛盾するような解は，ある特別の場合を考えることにより実現できることがわかる．なお，速度の大きさは  $|V_-| > |V_+|$  の関係がある．

### 吟味3： 高気圧の周りを廻る風の向き

高気圧的な気圧分布を考える，すなわち  $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$  である．このとき (8.11) の2つの解は

$$\begin{aligned} V_+ &= \frac{1}{2} \left\{ -fr + \sqrt{(fr)^2 - \left| \frac{4r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right|} \right\}, \\ V_- &= \frac{1}{2} \left\{ -fr - \sqrt{(fr)^2 - \left| \frac{4r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right|} \right\} \end{aligned} \quad (8.14)$$

と表現できる． $f > 0$  のとき， $V_+ < 0$ ， $V_- < 0$  である．つまり高気圧的気圧分布の周りを廻る風は常に時計回りである．反時計回りの風は吹かない．このことは日常経験的に知られている（もしくは初等教育で習った）北半球では高気圧の周りを廻る風は時計回りであることに合致している．ただし，速度の大きさは低気圧的気圧分布のときと同様に  $|V_-| > |V_+|$  の関係がある．

## 8.3 幾つかの特殊な場合

### 8.3.1 Rossby 数

(8.8) の左辺第 1 項は、速度場の Lagrange 微分 (慣性項と呼ばれる) から生じた項である。一方、(8.8) の左辺第 2 項は Coriolis 力項である。慣性項の大きさと Coriolis 力項の大きさの相対的な卓越性は Rossby 数と呼ばれる無次元の量で特徴付けることができる。今の場合、Rossby 数は

$$Ro \equiv \frac{[\text{慣性項}]}{[\text{Coriolis 力項}]} = \frac{V^2/r}{fV} = \frac{V}{fr} \quad (8.15)$$

である。 $Ro \gg 1$  は Coriolis 力項に比べて慣性力項が支配的である場合を表し、 $Ro \ll 1$  は慣性力項に比べて Coriolis 力項が支配的である場合を表す。

以下ではそれぞれの場合について考察する。

### 8.3.2 旋衡風平衡 : ( $Ro \gg 1$ の場合)

$Ro \gg 1$  のとき、慣性力項に比べて Coriolis 力項は相対的に小さい。そこで、Coriolis 力項を無視する。これは (8.11) において  $f = 0$  とおいた場合に相当する。(8.11) は

$$V = \pm \sqrt{\frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}} \quad (8.16)$$

となる。根号のなかは正でなければいけないので、したがってこの場合には  $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ 、すなわち低気圧的な気圧分布しか実現できない。これは、コーヒーや紅茶をかき回したときに時計回りにかき回しても反時計回りにかき回しても中心付近の水面が凹むことから理解できる。この場合のように遠心力と気圧傾度力がバランスした状態は旋衡風平衡 (cyclostrophic balance) と呼ばれる。

### 8.3.3 地衡風平衡 : ( $Ro \ll 1$ の場合)

$Ro \ll 1$  のとき、Coriolis 項に比べて遠心力項は相対的に小さい。そこで、遠心力項を無視する。これは (8.8) において  $r \rightarrow \infty$  とおいた場合に相当する。(8.11) は

$$V = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (8.17)$$

となる．この場合のように Coriolis 力項と気圧傾度力項がバランスした状態は地衡流平衡 (geostrophic balance) と呼ばれる． $f > 0$  の場合には低圧部を右に見るように流体は流れる．

### 8.3.4 慣性振動

いままでの議論では気圧傾度力は常に存在し，Coriolis 力項と遠心力項の相対的な大きさの違いをもとに流れの性質を見てきた．最後に，気圧傾度力が無視できる場合を考察しよう．このときには，(8.11) で自明でない解は，

$$V = -fr \quad (8.18)$$

となる．このような流れによって流体粒子が半径  $r$  の円周上を一周する時間 (周期) を見積もると， $T = 2\pi r/|V| = 2\pi/|f|$  となる．座標系の回転角速度が  $f/2$  なので，この  $T$  は座標系の回転周期の半分の周期である．この周期は慣性周期，このような周期現象 (振動現象) は慣性振動 (inertial oscillation) と呼ばれている．このような振動運動は海洋で観測されている．<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>慣性振動は大気では観測されていないらしい．何故観測されないのか明確な説明はまだない．