

## 第5章 大気の鉛直構造

本章では地球大気の平均的な鉛直構造について述べる。地球大気は理想気体であると仮定し、流体に働く外力  $\mathcal{K}$  は重力のみ、 $\mathcal{K} = -g\mathbf{k}$  とする。<sup>1</sup>

流体が静止しているときの力のバランスは、運動方程式 (3.19b) より、気圧傾度力と外力がバランスした状態である：

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -g \mathbf{k}. \quad (5.2)$$

この状態では、水平方向の気圧傾度力は0であり、水平方向に気圧は一様である。また、鉛直方向には静水圧平衡がなりたっている：

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g. \quad (5.3)$$

静水圧平衡の式 (5.3) と理想気体の状態方程式 (4.1) から得られる幾つかの考察を行う。<sup>2</sup>

### 5.1 測高公式

平均海水面から高度  $z$  まで単位質量あたりの空気塊を上昇させたときに、それにする仕事  $\Phi$  をジオポテンシャル (geopotential) ,  $Z \equiv \Phi/g_0$  をジオポテンシャル高度 (geopotential height) と呼ぶ：

$$\Phi(z) \equiv \int_0^z g \, dz. \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>ここで、 $g$  は定数でなく高度依存性があってもよい。そのような  $g$  の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2}. \quad (5.1)$$

ここで、 $G$  は万有引力定数、 $M$  は地球の質量、 $a$  は地球の平均半径、 $z$  は平均海水面からの高度である。

<sup>2</sup>(5.3) は鉛直方向の運動方程式をある高度  $z$  において、水平方向全球にわたり平均した式とみなすことも出来る。

ここで,  $g_0$  は平均海水面における全球平均重力加速度  $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  である. ジオポテンシャル高度は対流圏や下部成層圏では幾何学的高度  $z$  とほぼ同じ数値をとる.

### 演習問題

1. 高度  $z = 0$  において重力加速度が  $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$  であるとする. このとき幾何学的高度  $z = 100 \text{ km}$  におけるジオポテンシャル高度  $Z$  と幾何学的高度  $z$  との差を求めなさい.

(5.4) の積分変数を静水圧平衡の式を用いて  $z$  から  $p$  に変換する. このとき理想気体の状態方程式を用いて, (5.3) の密度  $\rho$  を圧力  $p$  と温度  $T$  で書きかえておく. 結果は

$$\Phi(z) - \Phi(0) = -R \int_{p(0)}^{p(z)} T \, d \ln p. \quad (5.5)$$

(5.5) は測高方程式 (hypsonometric equation) と呼ばれる. (5.5) より, 気圧面  $p_1$  と  $p_2$  の厚さ (ジオポテンシャルの差, 層厚 (thickness))<sup>3</sup> は

$$Z_T \equiv Z(p_2) - Z(p_1) = -\frac{R}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p, \quad (5.6)$$

で与えられる. 気球に観測機器 (ラジオゾンデ) を係留して放球し, 大気の気温や気圧を観測したとき, その値と (5.6) を用いてその温度, 気圧の値が観測された高度を求めることができる.

ここで, ある気圧  $p_1$  と  $p_2$  の間にある大気のアverage温度  $\langle T \rangle$  を

$$\langle T \rangle \equiv \frac{\int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p} \quad (5.7)$$

で定義する. このとき  $p_1$  面と  $p_2$  面の層厚は

$$Z_T = -H \ln(p_2/p_1) \quad (5.8)$$

$$H \equiv \frac{R \langle T \rangle}{g_0}, \quad (5.9)$$

で与えられる. 即ち, ある与えられた2つの気圧面の層厚はその気層の平均温度に比例する.

<sup>3</sup> $p_1 > p_2$  即ち,  $p_1$  面が  $p_2$  面よりも下層にあるとする.

もし大気が等温であるとすれば, 気圧の鉛直プロファイルは

$$p(Z) = p(0) e^{-Z/H} \quad (5.10)$$

となり, 高度と共に指数関数的に減少していく.  $H$  はスケールハイト (scale height) と呼ばれ, 気圧が  $e^{-1}$  になる高度である. 地球を温度 255K の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である.

スケールハイトは鉛直方向の大気の質量分布の重心の位置と解釈することができる. 等温大気の場合には, 気圧の鉛直分布 (5.10) と同様に, 密度も

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-z/H} \quad (5.11)$$

という鉛直プロファイルを持つ. 鉛直方向の質量分布の重心  $z_G$  は

$$z_G \equiv \frac{\int_0^\infty z \rho(z) dz}{\int_0^\infty \rho(z) dz} \quad (5.12)$$

で計算される. 実際に (5.12) に (5.11) を代入すると

$$z_G = H \quad (5.13)$$

が得られる

### 演習問題

1. 重力加速度  $g$  を定数と仮定する. 気温が高さとともに

$$T(z) = T_0 - \Gamma z \quad (5.14)$$

と一定の減率で減少するとき, 静水圧平衡の式, 理想気体の状態方程式を用いて気圧と高度との間の関係を求めなさい. さらに, このような温度分布を持つ大気は有限の高さで終わる (有限の高度で気圧が 0 になる) ことを証明しなさい.

## 5.2 乾燥大気の鉛直方向の安定性

密度成層した鉛直 1 次元の水蒸気を含まない静止大気を考える. 今, 初期に高度  $z$  にある流体粒子を  $z + \Delta z$  まで断熱的に変位させることを考える.<sup>4</sup> ただし,

<sup>4</sup>水蒸気を含む場合, 気圧や気温の変化によって水蒸気が凝結し潜熱の解放が起こるので, この議論のように断熱という仮定が成り立たなくなる.

流体粒子の持つ圧力は，その外界の圧力と常に等しくなるように変位させるとする．このとき，流体粒子の持つ温位

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^\square, \quad (5.15)$$

は変位の前後で一定に保たれる．ここで  $\square = \frac{R}{C_p}$  である．なぜならば，温位はエントロピー  $S$  と (4.18) の関係で結ばれ，エントロピーは断熱過程において一定に保たれるからである．なお，温位は  $\theta$  は状態方程式 (4.1) を用いると，

$$\theta = \frac{p_0}{R\rho} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad (5.16)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (5.17)$$

と表現できる．

流体粒子を  $z$  から  $z + \Delta z$  に仮想的に変位させたときの運動について考察する．流体粒子の持つ物理量を添え字  $p$  であらわし，一方，流体粒子の外界の物理量を添え字  $env$  であらわすことにする．変位に伴って，流体粒子の持つ密度は  $\rho_p \rightarrow \rho_p + \Delta\rho_p$  へと変化する． $\Delta\rho_p$  は (5.16) を用い， $\theta_p, p_0, R$  が定数であることに注意すると，

$$\begin{aligned} \Delta\rho_p &= \Delta \left[ \frac{p_0}{R\theta_p} \left( \frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{p_0}{R\theta_p} \left( \frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \frac{1}{p_p} \Delta p_p \\ &= \left( \frac{\rho_p}{\gamma} \frac{d \ln p_p}{dz} \right)_z \Delta z, \end{aligned} \quad (5.18)$$

となる．ここで，空気塊の圧力変化  $\Delta p_p$  は鉛直変位に伴って起こるので， $\Delta p_p = \frac{dp_p}{dz} \Delta z$  を用いた．仮定より，外界と流体粒子の持つ圧力 ( $p_p = p_{env}$ ) は等しく，さらに流体粒子の初期位置  $z$  では流体粒子内の物理量と外界の物理量は等しい（流体粒子と外界の区別はない）ので， $\rho_p(z) = \rho_{env}(z)$  である．このことを用いて，高度  $z + \Delta z$  における流体粒子の密度および，外界の密度を求めると以下のようなになる：

$$\begin{aligned} \rho_p(z + \Delta z) &= \rho_p + \Delta\rho_p \\ &= \rho_p(z) + \left( \frac{\rho_{env}}{\gamma} \frac{d \ln p_{env}}{dz} \right)_z \Delta z, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \rho_{env}(z + \Delta z) &= \rho_{env}(z) + \Delta\rho_{env} \\ &= \rho_{env}(z) + \left( \frac{d\rho_{env}}{dz} \right)_z \Delta z = \rho_p(z) + \left( \frac{d\rho_{env}}{dz} \right)_z \Delta z \end{aligned} \quad (5.20)$$

である．したがって流体粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{D^2\Delta z}{Dt^2} &= -\frac{1}{\rho_p(z+\Delta z)}\frac{dp_{\text{env}}}{dz} - g \\ &= \frac{\rho_{\text{env}}(z+\Delta z)}{\rho_p(z+\Delta z)}g - g.\end{aligned}$$

ここで，流体粒子の外界は静止大気であり，そこでは静水圧平衡が成り立つので，

$$\frac{dp_{\text{env}}}{dz} = -\rho_{\text{env}}g$$

を用いた．さらに，(5.19), (5.20) を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{D^2\Delta z}{Dt^2} &= \frac{g}{\rho_p(z+\Delta z)}(\rho_{\text{env}}(z+\Delta z) - \rho_p(z+\Delta z)) \\ &= g\frac{\rho_{\text{env}}(z)}{\rho_p(z+\Delta z)}\left(\frac{d\ln\rho_{\text{env}}}{dz} - \frac{1}{\gamma}\frac{d\ln p_{\text{env}}}{dz}\right)_z\Delta z.\end{aligned}$$

(5.16) を用いると運動方程式は  $\mathcal{O}(\Delta z)$  のオーダーで

$$\frac{D^2\Delta z}{Dt^2} = -g\left(\frac{d\ln\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z\Delta z \quad (5.21)$$

となる．この方程式は，流体粒子の外界の温位の鉛直プロファイルに依存して，流体粒子の運動の形態が異なることを示している． $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z > 0$  であれば，流体粒子は変位に伴って復元力を受け，高度  $z$  を中心とした振動運動を起こす．一方， $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z < 0$  であれば流体粒子の変位は時間とともに指数関数的に増大してしまう．したがって，微小擾乱に対して鉛直方向に大気が安定であるためには， $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z > 0$  でなければいけない． $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z = 0$  が安定と不安定の境となる．

### 5.2.1 乾燥断熱減率

水蒸気を含まない大気について，鉛直方向の安定性の境となる温度プロファイルを求めて見る．先の温位の鉛直プロファイルを温度で表現すると，

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dz} &= \frac{d}{dz}\left\{T\left(\frac{p_0}{p}\right)^\square\right\} \\ &= \left(\frac{p_0}{p}\right)^\square\left(\frac{dT}{dz} - \frac{\square T}{p}\frac{dp}{dz}\right).\end{aligned}$$

安定性の境は  $\frac{d\theta}{dz} = 0$  であり，また静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると，上式から

$$\Gamma_d \equiv -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \quad (5.22)$$

が得られる． $\Gamma_d$  は乾燥断熱減率と呼ばれ，地球大気の場合， $\Gamma_d = 9.8 \text{ K/km}$  の値をとる．

### 5.2.2 Brunt–Väisälä 振動数

(5.21) の形の微分方程式は  $\frac{d \ln \theta}{dz} > 0$  の時，

$$\Delta z = C_+ e^{iNt} + C_- e^{-iNt} \quad (5.23)$$

$$N \equiv \sqrt{g \frac{d \ln \theta}{dz}} \quad (5.24)$$

のような振動数  $N$  で振動する解をもつ．このような振動数は Brunt–Väisälä 振動数と呼ばれるものである．

観測によると Brunt–Väisälä 振動数は対流圏で  $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  である．