2003年度　地球流体力学　中間試験 解答例

担当：岩山隆寛

平成15 年 6 月 10 日

1(a) (A): 質量保存則．(1) 式: 連続の方程式

(b) (B)：運動量保存則．(2) 式：運動方程式

(c) • Euler 的記述：物理量を時間，空間の場の関数として捉え，流体運動を記述する方法.

• Lagrange 的記述：流体を無数の仮想的な粒子（流体粒子と呼ぶ）の集団とみなし，流体粒子の運動を追跡することにより，流体運動を特徴付ける記述法.

(d) • $\dfrac{\partial}{\partial t}$ について．

空間的に固定された点における場の時間変化率を表す.

• $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ について．

名称：Lagrange 微分．流体粒子に付随した物理量の時間変化率を表す.

• 互いを結びつける関係式：

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \\
&= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}
\end{aligned}$$

(f)

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

(g) ● (1) について．

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\\ &= \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで，第 1 式の左辺第 2 項の変形は (e) の結果を，第 1 式から第 2 式への変形は (d), (f) の結果を用いた．
したがって

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

(2) について，(d) の関係式を用いれば，直ちに

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p-g\boldsymbol{k}.$$

2. (コメント：ベクトルとスカラーの区別がついていない人がかなり多数いました．もう一度ベクトル解析の復習をすることを薦めます．)

(a) 静止流体中では $\boldsymbol{v}=0$ なので，これを (2) に代入すると

$$-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p-g\boldsymbol{k}=0.$$

上式を x, y, z 成分について書き下すと，それぞれ

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=0,\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=0,\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g&=0,\end{aligned}$$

となる．第 1，第 2 式は p が x, y に依存しないことを示しており，したがって第 3 式の偏微分は常微分として書くことができる．すなわち，(若干整理して)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g.$$

(b) 静水圧平衡の式

(c) $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$ は単位体積当たりの流体粒子に働く，圧力に伴う力（気圧傾度力）．ρg は単位体積当たりの流体粒子に働く重力．

(d) 静力学平衡の式を $z \sim \infty$ まで積分すると

$$\int_z^\infty \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z = -\int_z^\infty \rho g\,\mathrm{d}z$$
$$p(\infty) - p(z) = -\int_z^\infty \rho g\,\mathrm{d}z$$

ここで，$z \to \infty$ では大気は存在しないと仮定すると，$p(\infty) = 0$ そこで，

$$p(z) = \int_z^\infty \rho g\,\mathrm{d}z$$

を得る．

上式左辺はある高度 z における気圧を表し，右辺は，底面積が 1 [m^2] で高度 z よりも上空に存在する流体の重さになっている．

もしくは $z=0$ として地上気圧は地上の面積 1 [m^2] の上空にある流体の重さ，と表現してもよい．

3. $\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T$ の関係式を使って，$\frac{\partial T}{\partial t}$ を求める．観測所で観測している人は Euler 的視点で物事を眺めている事になる．

東，北向きをそれぞれ x, y 軸の正の向きとする．x, y 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, 風速 $\boldsymbol{v}$ の x, y 成分をそれぞれ u, v とすると北東風は MKS 単位で $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$, $u = -10\sqrt{2}\,[\mathrm{ms}^{-1}]$, $v = -10\sqrt{2}\,[\mathrm{ms}^{-1}]$ と表される．

温度は北向きに $3/50\,\mathrm{K\,km}^{-1}$ で減少していくので，$\boldsymbol{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{j}$, $\frac{\partial T}{\partial y} = -6\times10^{-4}\,[\mathrm{Km}^{-1}]$ となる．したがって，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T = v\frac{\partial T}{\partial y} = 6\sqrt{2}\times10^{-4}\,[\mathrm{Ks}^{-1}]$

空気塊は $1\,[\mathrm{K\,h}^{-1}]$ の率で温まっているので，$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = 1\,\mathrm{K\,h}^{-1}$．これより，

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - v\frac{\partial T}{\partial y} \\ &= -5.7\times10^{-4}\,[\mathrm{Ks}^{-1}]. \end{aligned} \tag{2}$$

観測所では $5.7\times10^{-4}\,[\mathrm{Ks}^{-1}]$（または $2.1\,[\mathrm{Kh}^{-1}]$）で気温が下がる．