# 第4章　状態方程式

前章で導出した連続の方程式, 運動方程式, 熱力学的エネルギー方程式の 3 種類, 5 個の方程式には, 未知変数として, 密度 $\rho$, 速度 $\boldsymbol{v}$, 圧力 $p$, 内部エネルギー $\mathcal{U}$ の 6 つが含まれている.[1] したがって, 方程式は閉じていないように見える. しかし熱力学的な物理量の間には一定の関数関係 (状態方程式) が存在し, ある熱力学的な変数は別の 2 つの熱力学的変数で表現することが可能である. したがって, 流体力学の基礎方程式は上記の 5 つで十分である. ここでは, 状態方程式の具体的な形を議論することにする.

## 4.1　状態方程式の例

地球流体力学では以下のような状態方程式に従う流体を考察の対称とする場合が多い.[2]

### 4.1.1　理想気体

希薄な気体では, 以下のような状態方程式がよい近似で成り立つ:

$$p = \rho RT. \tag{4.1}$$

**注意：** (4.1) は単位体積の理想気体の方程式である. 化学で習う $n$ kmol の理想気体の状態方程式は

$$PV = nR^*T \tag{4.2}$$

である. ここで, $R^*$ は普遍定数 ($R^* = 8.314 \times 10^3 \mathrm{J\,K^{-1}\,kmol^{-1}}$) である. 体積 $V$ に含まれる理想気体の分子の質量を $m$ kg, 理想気体の分子量を $M$ す

[1] 熱流 $\boldsymbol{\theta}$ が Fourier の法則で表せるとすれば温度 $T$ もあわせて, 7 個の未知変数がある.

[2] 気象力学では地球大気を理想気体と扱い, 海洋力学では海洋を Boussinesq 流体として扱うことが多い.

ると, (4.2) は

$$P = \frac{m}{V}\frac{R^*}{M}T \tag{4.3}$$

となる. $\rho = m/V$ であるから, (4.1) と (4.3) を見比べると

$$R = \frac{R^*}{M} \tag{4.4}$$

という関係がなりたつことがわかる.

- 地球大気は窒素 (分子量 28) 75.5 %, 酸素 (分子量 32) 23.1 %, アルゴン (分子量 40) 1.3 %の混合気体なので[3], 質量数は $M = 28 \times 0.755 + 32 \times 0.231 + 40 \times 0.013 = 28.96$. したがって $R = R^*/28.96 = 287.1 \mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$ である.

**演習問題：**

金星大気, 火星大気の大気組成を調べ, これらの大気を理想気体とみなしたときの気体定数 $R$ を求めなさい.

### 4.1.2 Boussinesq 流体

一般的な状態方程式 $\rho = f(p, T)$ をある基準の温度 $T_0$, 圧力 $p_0$ の周りで Taylor 展開して, 展開の 1 次の項までをとる：

$$\begin{aligned}
\rho = f(p,T) &= f(p_0, T_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\
&= \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\
&= \rho_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \right\}
\end{aligned}$$

圧縮率 がゼロ, $\dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = 0$, であるとすると,

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha(T - T_0)\right], \tag{4.5}$$

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \tag{4.6}$$

[3]高度約 80 km あたりまでこのような成分比に保たれている.

を得る. (4.5) の状態方程式に従う流体は Boussinesq 流体と呼ばれ, 水のように, 密度が圧力と独立であるような流体の状態方程式として用いられる. ここで, $\alpha$ は体膨張係数, もしくは体膨張率と呼ばれる.[4]

海洋の場合には, 密度は塩分にも依存するので,

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)\right], \qquad (4.7)$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{p,T} \qquad (4.8)$$

が用いられる. ここで, $s$ は塩分 (salinity) である. $s$ の単位は, 海水 1 kg あたりの塩分のグラム数として計られる. また, $\beta$ は, $\alpha$ との対応から, 塩分圧縮係数 (coefficient of saline contraction) と呼ばれる.

## 4.2 順圧流体の状態方程式

連続の方程式に現れる未知変数は, 密度 $\rho$ と速度 $\boldsymbol{v}$ である. 一方, 運動方程式には上記のほかに圧力 $p$ が未知変数として現れている. したがって, もし圧力と密度との間に一定の関数関係

$$\rho = \mathcal{F}(p) \qquad (4.9)$$

が存在するとき, もしくは状態方程式の形で

$$f(p,\, \rho) = 0 \qquad (4.10)$$

という流体を考えるならば, エネルギー方程式を持ち出さなくても, 連続の式と運動方程式のみで方程式は閉じるさせることができ, 流体の運動を決定できる. (4.9) あるいは (4.10) を満足するような流体を**順圧流体** (barotropic fluid) と呼ぶ. これは (4.10) 式で与えられる流体の等圧面と等密度面が平行であることからこのように呼ばれている. いっぽう一般の流体は密度, 圧力以外に例えば温度にも依存するので等密度面と等圧面は平行ではなく傾いている. このような流体は**傾圧流体** (baroclinic fluid) と呼ばれる. 順圧と言ういいかたは, 地球流体力学特有の呼び名で通常の流体力学では, barotropic fluid のことをバロトロピー流体と呼び (例えば今井功 : 流体力学 (岩波書店) 参照), 一方, baroclinic や傾圧と言う言葉はでてこない.

先に述べた順圧流体として例えば以下のような 3 つの場合が考えられる.

---

[4] (4.6) にマイナス符号を付けて, 膨張率を定義する理由は, 一般に気体は等圧下で温度を加えれば膨張し密度は減るからである. すなわち, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$. 従って, 膨張率を正の量として定義するために, マイナス符号をつけている. $\rho_0$ で除する理由は「率」にするためである.

### 4.2.1　非圧縮一様流体

非圧縮 $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$ で, 至るところ密度が一様な流体 (incompressible homogeneous fluid) では,

$$\rho = const. \tag{4.11}$$

このとき, 流体力学の基礎方程式は極めて簡単になる. 例えば Newton 流体の場合には, 運動方程式は

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} P + \nu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\mathcal{K}}, \tag{4.12}$$

ここで, $P = p/\rho$ である. また連続の方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{4.13}$$

である. 上記のような方程式に従う流体の運動は, 現実的な流れの予報や解析という目的ではなく, Navier-Stokes 方程式が持つ数理物理的性質を調べる目的で研究されている.

### 4.2.2　断熱変化する流体

流体の熱伝導性が悪い場合には, 運動に際して状態変化は断熱的となる. 理想気体の状態変化を圧力 $p$, 密度 $\rho$, エントロピー $S$ で記述すると

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}\, \rho^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{C_v}\right) \tag{4.14}$$

と書ける. ここで添字 0 の付いた物理量は, ある基準となる状態を表す. また $\gamma$ は定積比熱 $C_v$ と定圧比熱 $C_p$ の比 $\gamma = C_p/C_v$ である. 断熱過程ではエントロピーが状態変化中で保存される ($S = S_0$) ので, (4.14) は

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \tag{4.15}$$

となる. (4.15) は Poisson の関係式と呼ばれる.

**演習問題：**

熱力学の第一法則 $d\mathcal{U} = T\,dS - p\,d(\rho^{-1})$, 理想気体の状態方程式 $p = \rho\,RT$, さらに $d\mathcal{U} = C_v\,dT$ を用いて, (4.14) を導きなさい.

**演習問題：**

Poisson の関係式を理想気体の状態方程式を使って, $T$, $p$ で表現すると,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{4.16}$$

となることを示しなさい. ここで, $T_0$ は $p_0$ における温度である.

**補足：ポリトロープ大気**

惑星大気の構造を議論をする場合に，圧力，密度，温度の間に適当な関数関係を仮定する場合がある．そのうちの代表的なものはポリトロープ大気の近似と呼ばれ，仮定する温度，圧力，密度間の関数関係は，(4.15) や(4.16) である．ただし，この場合には $\gamma$ は**ポリトロピック指数** (polytropic exponent) と呼ばれる量である．ポリトロープ大気においては，(4.15) や (4.16) は状態方程式とみなすべきではなく，熱輸送に関する近似とみなすべきである．[5]すなわち， 状態方程式とみなせば $\gamma$ は比熱比で自動的に与えられてしまうが，ポリトロープ大気の場合には状況に応じて値が変わりえる．例えば，熱効率のよい等温大気では $\gamma = 1$ とおき，大気の鉛直温度勾配が断熱温度勾配になっているような場合には $\gamma$ は比熱比にとる.

## 4.3 温位

(4.16) は熱力学においては

$$p^{R/C_p} T = \mathrm{const} \tag{4.17}$$

などと表現される場合が多く, $T_0$, $p_0$ という量を導入してそれを問題にすることはほとんどないが, 地球流体力学では, $T_0$ は温位 (potential temperature) と呼ばれ, 重要な役割を果たす物理量である.

鉛直方向にある温度プロファイルを持った大気を考え, ある高度 $z$ において気圧 $p(z)$, 温度 $T(z)$ を持った空気塊を気圧が $p_0$ を持つ高度まで (通常 $p_0 = 1000$hPa が用いられる), 断熱的に移動させたとき, 空気塊が持つ温度 $T_0$ を, 高度 $z$ にある空気塊が持っている温位と定義する. 通常, 温位は記号的に $\theta$ と表される. 安定性の議論を行うと, 温位の鉛直分布 $\theta(z)$ により, 鉛直方向の大気の安定度を見積もることが出来ることがわかる.

[5]この場合の基礎方程式は，連続の式，運動方程式，状態方程式，そして (4.15) もしくは(4.16) である．つまり，熱エネルギー方程式の代わりに (4.15) もしくは(4.16) を用いる.

この量はエントロピー $S$ との間に

$$S = C_p \ln\theta + \mathrm{const} \tag{4.18}$$

の関係がある. 地球流体力学ではエントロピーよりも温位を使って現象を表現することが通例である.

**演習問題：**

(4.18) を導出しなさい.

## 4.4　大気の鉛直構造

本節では地球大気の平均的な鉛直構造について述べる. 地球大気は理想気体であると仮定し, 流体に働く外力 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ は重力のみ, $\boldsymbol{\mathcal{K}} = -g\boldsymbol{k}$ とする.[6]

流体が静止しているときの力のバランスは, 運動方程式 (3.19b) より, 気圧傾度力と外力がバランスした状態である：

$$\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla} p = -g\,\boldsymbol{k}. \tag{4.20}$$

この状態では, 水平方向の気圧傾度力は 0 であり, 水平方向に気圧は一様である. また, 鉛直方向には静水圧平衡がなりたっている：

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho\, g. \tag{4.21}$$

静水圧平衡の式 (4.21) と理想気体の状態方程式 (4.1) から得られる幾つかの考察を行う.[7]

平均海水面から高度 $z$ まで単位質量あたりの空気塊を上昇させたときに, それにする仕事 $\Phi$ を **ジオポテンシャル** (geopotential) , $Z \equiv \Phi/g_0$ を**ジオポテンシャル高度** (geopotential hight) と呼ぶ：

$$\Phi(z) \equiv \int_0^z g\, dz. \tag{4.22}$$

---

[6] ここで, $g$ は定数でなく高度依存性があってもよい. そのような $g$ の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2}. \tag{4.19}$$

ここで, $G$ は万有引力定数, $M$ は地球の質量, $a$ は地球の平均半径, $z$ は平均海水面からの高度である.

[7] (4.21) は鉛直方向の運動方程式をある高度 $z$ において, 水平方向全球にわたり平均した式とみなすことも出来る.

ここで, $g_0$ は平均海水面における全球平均重力加速度 $g_0 = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である．ジオポテンシャル高度は対流圏や下部成層圏では幾何学的高度 $z$ とほぼ同じ数値をとる.

(4.22) の積分変数を静水圧平衡の式を用いて $z$ から $p$ に変換する．このとき理想気体の状態方程式を用いて, (4.21) の密度 $\rho$ を圧力 $p$ と 温度 $T$ で書きかえておく．結果は

$$\Phi(z) - \Phi(0) = -R \int_{p(0)}^{p(z)} T\, d\ln p. \tag{4.23}$$

(4.23) は**測高方程式** (hypsometric equation) と呼ばれる．(4.23) より, 気圧面 $p_1$ と $p_2$ の厚さ (ジオポテンシャルの差, 層厚 (thickness))[8]は

$$Z_T \equiv Z(p_2) - Z(p_1) = -\frac{R}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} T\, d\ln p, \tag{4.24}$$

で与えられる．気球に観測機器 (ラジオゾンデ) を係留して放球し, 大気の気温や気圧を観測したとき, その値と (4.24) を用いてその温度, 気圧の値が観測された高度を求めることができる.

ここで, ある気圧 $p_1$ と $p_2$ の間にある大気の平均温度 $\langle T \rangle$ を

$$\langle T \rangle \equiv \frac{\int_{p_1}^{p_2} T\, d\ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d\ln p} \tag{4.25}$$

で定義する．このとき層厚は

$$Z_T = -H \ln(p_2/p_1) \tag{4.26}$$

$$H \equiv \frac{R\,\langle T \rangle}{g_0}, \tag{4.27}$$

で与えられる．もし大気が等温であるとすれば, 気圧の鉛直プロファイルは

$$p(Z) = p(0)\, e^{-Z/H} \tag{4.28}$$

となり, 高度と共に指数関数的に減少していく．$H$ は**スケールハイト** (scale hight) と呼ばれ, 気圧が $e^{-1}$ になる高度である．地球を温度 255K の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である.

スケールハイトは鉛直方向の大気の質量分布の重心の位置と解釈することができる．等温大気の場合には，気圧の鉛直分布 (4.28) と同様に，密度も

$$\rho(z) = \rho(0)\, e^{-z/H} \tag{4.29}$$

[8] $p_1 > p_2$ 即ち, $p_1$ 面が $p_2$ 面よりも下層にあるとする.

という鉛直プロファイルを持つ．鉛直方向の質量分布の重心 $z_{\mathrm{G}}$ は，

$$z_{\mathrm{G}} \equiv \frac{\int_0^\infty z\,\rho(z)\,\mathrm{d}z}{\int_0^\infty \rho(z)\,r dz} \tag{4.30}$$

で計算される．(4.30) に (4.29) を代入すると，

$$Z_{\mathrm{G}} = H \tag{4.31}$$

が得られる．