第2章　流れの記述

2.1　流れを表す物理量

流体の運動状態を指定するための物理量には

- 運動学的な量（動的な量）:　流速 $\boldsymbol{v}$,
- 熱力学的な量（静的な量）:　応力（圧力）p, 温度 T, 密度 ρ, 内部エネルギー E, エントロピー S, . . .

が考えられる.[1]　このうち熱力学によると, 第二のカテゴリーに属する物理量は, 任意の 2 つが独立であることが知られている. したがって, 流れの記述に必要な物理量の個数は, 流速の 3 成分と熱力学的量 2 個のあわせて 5 個である.[2]

注： 1.1 節において流体力学では，流体を構成する個々の原子・分子の運動は考慮せず，連続体として流体を扱うと述べた．しかしながら，ここでは流体を構成する原子・分子の運動状態を完全に記述することを考えよう．各分子の位置，及び運動量（速度）が任意の時刻で分かれば，分子の運動状態を完全に指定できることに注意しておく．連続体近似は，ある空間中の一点 P（位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする） を中心とした微小体積 δV に渡って，物理量を平均することにより得られるので，分子の運動状態を完全に指定するこれらの物理量を平均化してみる．そのときえられる物理量で，流体の運動状態が完全に指定できるはずである．いま δV 内に N 個の分子があり，i 番目の分子の速度は $\boldsymbol{v}_i$, $(i=1,\ldots N)$ であり，その質量は m_i とする．連続体近似によって，点 P の近傍にある分子の個々の位置は 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ へと縮約されてしまう．したがって分子の位置は情報として失われてしまう．その代わりに，空間中のあらゆる点 $\boldsymbol{r}$ において物理量を指定する必要がでてくる．すなわち，物理量は場の量となる．次に，運動量，もしくは，質量と速度の情報についてであるが，1.1 節で述べたように，質量の情報は $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i$ と密度に置き換わる．また流体粒子 δV の速度は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i$ で与えられる．ただし，個々の分子の速度は $\boldsymbol{v}$ の値の周りで揺らいでおり，その揺らぎの大きさ $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v})^2$

[1] 気象通報では, ある地点のある時刻における風向, 風速, 気温, 気圧, 天気を放送している. このうち, 風向, 風速, が速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ であり, 気温, 気圧がそれぞれ T, p である. 天気は物理量ではないことに注意.

[2] d 次元空間中であれば, $d+2$ 個の変数が必要である. ここでは、取りあえず最も日常的な 3 次元空間の場合で話をすすめている.

> は気体分子運動論，もしくは統計物理学より，温度に比例することがわかる．したがって，このような考察から，密度 ρ，温度 T，速度 $\boldsymbol{v}$ で流体の運動が完全に指定できることが分かる．なお，分子運動論的には，流体内のある面に働く応力（圧力）とは，その面を通過する分子が輸送する運動量の平均値として計算されが，これは，揺らぎの運動エネルギーもしくは温度と関係付けられる．

流体の運動状態を記述するために必要な変数の個数は 5 個, すなわち未知変数が 5 個であるから, これらを決定するためには 5 つの方程式をたてて, それを解く必要がある. 5 つの方程式とは何であろうか？流体の運動も物理現象であり, 物理法則にしたがっているので, 物理学における基本的な保存則は満足されている. その保存則は, **運動量保存則**, **エネルギー保存則**, **質量保存則**である. 運動量はベクトル量であるから 3 成分ある. またエネルギー, 質量はスカラー量であるからそれぞれ 1 個である. すなわちこれら 5 つの量に対する保存則が成り立つ. この 5 個の保存則を具体的に数式で表したものが, **流体力学の基礎方程式**であり, それを解くことによって流体の運動を決定することができる.

2.2　流れを表す方法

流体の運動状態を記述する方法には通常二通りの方法が用いられる.

2.2.1　Lagrange の方法 (Lagrange 的記述)

この方法では, 流体を無数の流体粒子の集団と見なし, 各粒子の運動を追跡することにより流体の運動を記述する. すなわち, ある時刻 $t = t_0$ に (a, b, c) に存在していた流体粒子が時刻 t に (x, y, z) に来たとする. このとき x, y, z は a, b, c, t の関数として,

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(a, b, c, t), \\
y &= f_2(a, b, c, t), \\
z &= f_3(a, b, c, t),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

のように表される. これら f_1, f_2, f_3 の関数形がわかれば, 流体の運動が完全に知れたことになる. t_0 は任意であるが通常 $t_0 = 0$ が選ばれる. (2.1) は (a, b, c) という名前（もしくはラベル）の流体粒子の運動を表しており, (a, b, c) は**物質座標**（material coorinates）と呼ばれる. ある時刻における空間の一点 (a, b, c) に存在する流体粒子は唯一であるために, これを持ってして流体粒子を識別することができる, すなわち, (a, b, c) を流体粒子の名前として用いることができるのである.

	流体力学 (Lagrange 的記述)	古典力学 (質点系)
粒子の識別子	物質座標 (a, b, c)：連続的量	i： 離散的量
時間微分	$\frac{D}{Dt}$	$\frac{d}{dt}$

表 2.1: 流体力学における Lagrange 的記述と質点系の力学との対応関係.

この記述方法は質点系の力学と非常によい対応関係がある.[3] たとえば N 個の質点系の運動を考えたときに, 質点系の力学では i 番目 $(i = 1, 2, \ldots N)$ の質点の任意の時刻 t における位置 (x_i, y_i, z_i) を問題にする. ここで i は粒子の名前 (粒子の識別子) である.

質点系と流体系の大きな違いは次の 2 点である.

- 質点の名前 i は離散的量であるが, 流体粒子の名前 (a, b, c) は連続的量である.
- 質点系の場合には各質点はバラバラに運動をする. 一方流体の運動では, 流体は連続体であるから隣り合う流体粒子 (近い名前の流体粒子) は互いに似た運動をする.

〜 Lagrange 微分 〜

各流体粒子に付随した物理量の時間的変化, 時間微分, を**Lagrange 微分**（または物質微分, material differentiation）と呼び

$$\frac{D}{Dt}$$

で表す. Lagrange の方法では, 物理量 F の Lagrange 微分は

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{a,b,c} \tag{2.2}$$

と表せる. これは古典力学でいうところの $\dfrac{d}{dt}$ に対応するものである.

2.2.2 Euler の方法 (Euler 的記述)

この方法では任意の時刻 t において, 空間の各点 (x, y, z) で物理量 $\boldsymbol{v}, T, \rho, p, \ldots$ を指定することによって流体の運動を記述する. すなわち, 場の立場である. 物理学

[3] Lagrange 的記述がもっとも naive に（質点系の Hamilton 力学の延長として）流体力学を Hamilton 形式で記述できる.

において, 場の立場で現象を記述する代表的分野として, 電磁気学があげられる. 電磁気学と流体力学ではしばしば同じ方程式が登場する. 歴史的には電磁気学よりも先に流体力学が学問的に体系化されており, 流体力学の体系を参考にして電磁気学が体系化されたのである.

Euler 的記述と Lagrange 的記述の大きく異なる点は, 変数 x, y, z が Lagrange 的記述では従属変数なのに対し, Euler 的記述では独立変数であることである.

〜 Lagrange 微分の Euler 的表現 〜

流体粒子に付随したある物理量 F の Euler 的表記は $F(x, y, z, t)$ である. この量の Lagrange 微分を Euler の方法で記述することを考える. ある時刻 t で $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$ にあった流体粒子が, 時刻 $t + \Delta t$ において $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\Delta t = (x + u\Delta t,\, y + v\Delta t,\, z + w\Delta t)$ に移動したとする. このとき流体粒子に付随した F の変化 ΔF は,

$$
\begin{aligned}
\Delta F &= F(x + u\Delta t,\, y + v\Delta t,\, z + w\Delta t,\, t + \Delta t) - F(x,\, y,\, z,\, t) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z} \right) \Delta t + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 \right), \\
\frac{DF}{Dt} &= \lim_{t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

と計算される. ここで $\mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right)$ は Δt の二次以上の項を表す. F は任意であるから, Lagrange 微分の Euler 的表現として

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} + w\,\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

を得る.

注意： (2.4) の第 2 の表現に特に注意すること. $\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ は決して $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ とは等しくない！∇ は演算子であるから演算の順序を入れ換えては意味が違ってくる. 例年, 両者の区別ができない人が非常に多い. $\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ は演算子で, 何か関数に食いついて初めて数値をとりえる (つまり $\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ は**飢えている**) のに対し, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ はそれ自身で明確な数値を持ちえる.

以下に 2 つの記述を表にしてまとめておく.

	Langrange の方法	Euler の方法
立場	粒子的	場
独立変数	a, b, c, t	x, y, z, t
従属変数	$x, y, z; p, \rho, T, \ldots$	$u, v, w; p, \rho, T, \ldots$
Lagrange 微分, $\dfrac{D}{Dt}$	$\dfrac{\partial}{\partial t}$	$\dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$

演習問題:

1. ある三変数関数 $f(a, b, c)$ があったとき, 偏微分は $\partial f/\partial a$ とは, 独立変数 b, c を一定とおき, 独立変数 a で f を偏微分するという意味である. 一定とおく独立変数を添え字として明示的に $(\partial f/\partial a)_{b,c}$ と示すほうが, より親切な表記であるが, 独立変数の組がよくわかっている場合には, しばしば一定とおく変数を省略してしまう. Lagrange 的記述における $\partial/\partial t$ と Euler 的記述における $\partial/\partial t$ ではそれぞれ何を一定として偏微分を行っているかを述べなさい.
2. Lagrange 微分の Euler 的表現(2.4) で登場した $\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ を和の規約を使って表しなさい.
3. 地表気圧が東方向に行くにしたがって 0.3 kPa/180 km で減少しているとする. 東向きに 10 km/h で航行する船の上で気圧を測ったところ 0.1kPa/3 h であった. この海域に島が存在するとし, 島の上で気圧を測ったときの気圧の時間変化率を以下の手順に従って求めなさい.
   (a) 船の上で観測された気圧変化率は 気圧の Euler 的な時間微分か？それとも Lagrange 的な時間微分か答えなさい.
   (b) 島の上で観測された気圧変化率は 気圧の Euler 的な時間微分か？それとも Lagrange 的な時間微分か答えなさい.
   (c) x を東方向, x 方向の船の速度を u としたときに $\boldsymbol{u} \cdot \nabla p$ はどのように表現されるか.
   (d) 以上の考察から島の上で観測された気圧変化率を求めなさい.
4. 地表気圧が北東方向に行くにしたがって 5 kPa km^{-1} で増加しているとする. 北東向きに 10 km h^{-1} で航行する船の上で気圧を測ったところ変化率は 100Pa/3 h であった. この海域に島が存在するとしたときに, 島の上で観測された気圧の時間変化率を求めなさい.
5. ある観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3 K 気温が低いとする. もし 20m s^{-1} の北東風が吹いていて, 空気塊は放射によって 1 K h^{-1} で温まっているとき, 観測所における気温の時間変化率を求めなさい.

2.3 保存則

ある物理量 A が時間変化しないとき，すなわち A の時間微分がゼロであるとき，”A は保存する” と言い表す．流体力学では 2.2 節で述べたように 2 種類の時間微分が存在するので注意が必要である．

A の Lagrange 的時間微分がゼロ

$$\frac{DA}{Dt} = 0 \tag{2.5}$$

のとき，”A は Lagrange 的に保存される”，もしくは “A は運動にしたがって保存される（A is a conserved quantity following the motion）” という．このような物理量 A は **Lagrange 的保存量**，もしくは単に保存量と呼ばれる．

例：

物質が不生不滅であれば，流体粒子の質量は Lagrange 的保存量である．いま流体粒子の質量を δm，体積を δV とすると，

$$\begin{aligned} \frac{D\delta m}{Dt} &= \frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = \delta V\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{D\delta V}{Dt} = 0 \\ \Longrightarrow \qquad \frac{D\rho}{Dt} &= -\frac{\rho}{\delta V}\frac{D\delta V}{Dt} \end{aligned} \tag{2.6}$$

すなわち，流体粒子の密度は保存されない．なぜならば，流体粒子は流されるにしたがって膨張・圧縮され，体積変化を伴うからである．(2.6) の右辺 $\frac{D\delta V}{Dt}$ の項が体積変化を表し，$\frac{D\delta V}{Dt} > 0$ ならば膨張を， $\frac{D\delta V}{Dt} < 0$ ならば圧縮を表す．質量が一定のとき，物質を圧縮すると密度は増大し，膨張させると密度は減少するが，(2.6) はこのような日常経験と合致している．

2.4 流線と流跡線

流れの場を幾何学的に表現する方法として，流線と流跡線というものがある．流線は Euler 的な概念であるのに対して，流跡線は Lagrange 的概念である．

2.4.1 流線

流れの中に一本の曲線を考える．曲線上の各点における流速 $\boldsymbol{v}$ の方向とその点における曲線の接線が一致するときに，そのような曲線を流線という．曲線上の

一点 $\boldsymbol{r}$ における曲線の微小部分の長さを $\mathrm{d}r$，その点での接線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{l}$ で表す．このとき $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{l}\mathrm{d}r$ を曲線の線要素と呼ぶ．定義より流線は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{v} \tag{2.7}$$

なので，

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w} \tag{2.8}$$

である．

電磁気学において，電場を幾何学的に表示する方法として，電気力線という概念がある．電場を速度場に対応させると，電気力線は流線に対応する．

2.4.2　流跡線

任意の一つの流体粒子が時間の経過と共に描く軌跡を流跡線という．流跡線は流体粒子をある有限時間にわたって観測して描かれるものである．流体粒子が微小時間 $\mathrm{d}t$ の間に流跡線に沿って線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ だけ動いたとすれば，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t \tag{2.9}$$

である．

定常流においては，流線と流跡線は一致する．