地球流体力学講義ノート

岩山隆寛

平成 15 年 4 月 15 日

目次

第-1章　はじめに

-1.1　授業のテーマと目標

本講義で扱う地球流体力学とは大気・海洋の運動を理解するために必要となる基本的な力学的概念を考察する学問分野である.[1]

物質の三態, 即ち, 固体, 液体, 気体のうち, 液体と気体は力を加えると変形し, 流れるという共通の性質を持っている. そこで, 気体と液体を一括して流体（fluid）と呼び, その運動を調べる学問分野として**流体力学**(fluid dynamics) が Newton の時代より発展し続けている. 地球上に存在する気体・液体である大気・海洋（これらを一括して地球流体 (geophysical fluid) と呼ぶ）も共通の流体力学的特性を持っている，と考えるのは，ごく自然な推論であろう. また, 大気と海洋は共に地球という**回転系**上で**重力場**中に存在し，重力の効果によって軽い流体が重い流体の上に積み重なった**密度成層**状態にある．このように考察の対象である大気・海洋が同様な環境に存在しているという点からも，それらの運動が統一的に記述・理解できるであろうことは容易に想像がつく.

地球流体力学は，通常，流体力学を学んだあとに，そのひとつの応用（回転密度成層流体力学）として論じられる．すなわち，地球流体力学のテキストや講義では，流体力学は既知であるとして議論を進めていくのである．しかしながら，本講義では, 密度成層や回転の効果を考慮しない流体力学の基礎から話を始める．まず，流体現象を記述するための方法を解説し，基礎方程式の導出を行う．さらに地球流体現象を記述する上で基本的概念となる**渦**と**波**の解説を行う. [2] 特に本講義では流体力学や地球流体力学の物理学的学問体系に力点を置く．そこで，本講義で述べた基本概念を用いて大気・海洋現象がどのように記述できるのか, については,「大気水圏科学」の受講や, 以下に挙げる参考書を参照して欲しい.

---

[1] 最近では地球流体力学は大気や海洋のみならず，地球内部に存在するマントルの運動など，一般に回転系上の流動現象を扱う学問と拡張され，位置づけられている.

[2] 地球流体力学におけるその他の重要な基本概念である「不安定性」については, 修士課程対象の「大気水圏科学特論 II」で,「乱流」については博士課程対象の「地球流体物理学」で講述する.

-1.2　成績の評価方法

学期中，学期末に行う二度の試験と授業中に適宜出すレポートを，試験 60% レポート 40 % の比率で採点し，単位の認定を行う.

-1.3　教科書・参考書

教科書は特に指定しない. 幾つか推薦図書を挙げておく. 将来, 気象学の勉強や研究を志す者は流体力学のテキストを一冊ぐらいは手元に持っておくことを勧める.

- 流体力学
  1. 今井功, 「流体力学 (前編)」(裳華房)
     著者は航空力学の専門家で, 文化勲章受賞者である. 応用数学にも強く, 特殊関数などの本も執筆している. 残念ながら前編出版後 30 年経っても後編は出版されていない. この本では粘性のない流体（完全流体）の力学から説き起こし, 渦のない流れ, 渦運動の力学，そして粘性流体へと議論を進めている. 渦運動の章は特に詳しく，世界的に見てもこの本ほど詳しく渦運動を詳しく扱っている本は他にない. 波を扱った章は残念ながらない（後編に掲載される予定である）. なお, この書籍のコンパクト版的な書籍として," 今井功, 「流体力学」（岩波書店）" が出版されている. (私はまずこの全書版で流体力学の勉強をした．)
  2. 巽友正, 「流体力学」(培風館, 新物理学シリーズ 21)
     著者は乱流理論の専門家で, 準正規理論と呼ばれる乱流の解析的理論の基礎を提唱した. 今井との大きな違いは, 粘性流体の運動方程式から話をはじめ, 比較的初めの章で波の運動を扱っている点である. また, 今井では書かれていない「乱流への遷移」や「乱流の統計理論」についての章が設けられていることも特徴のひとつである. [3]
     最近，この本に準じた内容で初学者向けの" 巽友正, 「連続体の力学」(岩波書店, 岩波基礎物理シリーズ）" が出版されている.
  3. G. K. Batchelor, 「An Introduction to Fluid Mechanics」(Cambridge U. P.)

[3] 実在の流体は少なからず粘性を持っているために，まず実在する流体としての粘性流体を記述する上での概念や基礎方程式の導出を行い，数学的に扱いやすい理想的な非粘性流体の運動は，粘性流体の近似として位置づけている．しかしながら，このような構成にするとテンソルがテキストのはじめの方に登場し，たいていの人はこのテンソルの理解に苦しみ，流体力学の勉強をあきらめるようである.

著者は乱流理論の専門家で, 流体力学で最も権威ある雑誌 Journal of Fluid Mechanics の創刊者である．残年ながら 1999 年に亡くなった. 日本語訳が電機大学出版会から発行されている（訳者：橋本英典, 松信八十男）.

4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz,「Fluid Mechanics」(Pergamon Press)
   物理学を学ぶ者は必ず手にする Landau - Lifshitz 理論物理学教程の 1 冊. Landau は 1962 年のノーベル物理学賞受賞者. 東京書籍から翻訳が出版されている.
5. S. H. Lamb, 「Hydrodynamics」 (Cambridge U. P.)
   1879 年に初版が発行された流体力学の教科書の古典中の古典. 著者は Sir の称号を持つ. 現在手に入る版は第 6 版. 東京書籍から翻訳が出版されている.

- 地球流体力学（気象力学）
  1. 小倉義光, 「総観気象学入門」（東京大学出版会）
     昨年出版された教科書. 総観気象学とは, 総観規模現象（高気圧や低気圧などの天気図に描かれる程度の大きさを持った気象現象）を扱う気象学の一分科である. このテキストは文科系・理科系を問わず大学１～２年生程度の学生の気象学のテキストとして名高い小倉義光「一般気象学（第 2 版）」（東京大学出版会）を読み終えた人を対象に, 流体力学と熱力学を基礎に気象現象を解説している. 程度は理科系の大学３～４回生向け.
  2. J. Pedlosky, 「Geophysical Fluid Dynamics」(Springer)
     地球流体力学のテキストとしては最も有名.
  3. R. Salmon「Lecture on Geophysical Fluid Dynamics」(Oxford U. P.)
     数年前に出版された地球流体力学のテキスト. Hamilton 形式の流体力学の章が特徴. Review 以外で Hamilton 形式の流体力学が書かれているのはこの本だけ.
  4. 小倉義光, 「気象力学通論」（東京大学出版会）
  5. 木村龍治, 「地球流体力学入門: 大気と海洋の流れのしくみ」(東京堂出版, 気象学のプロムナード 13)

- 気象学一般
  1. 小倉義光, 「一般気象学 (第 2 版)」(東京大学出版会)
     大学の教養課程科目としての気象学のテキストとしては最も有名.

-1.4　連絡先

授業に対する質問や要望がある人は授業中（講義を中断してもかまわない）にするか，居室（自然科学研究科棟 3 号館西 502 号室）にくること．

```
e-mail:iwayama@kobe-u.ac.jp
```

へ電子メールを送ってもかまわない．ともかく遠慮なくどうぞ．講義に使う資料は授業中に配布するが，私のホームページ

```
http://www.ahs.scitec.kobe-u.ac.jp/~iwayama/
```

からもダウンロードできるようにする（つもりである）．

-1.5　その他

学生の授業評価を総合すると，私の講義は，**“板書の量が極めて多く，また速いために，授業中はノートに板書を書き写すのが精一杯で，理解にいたるには程遠い”**, そうである．講義中に板書する内容は本ノートのようにプリントとして配るので，積極的に活用してほしい．

第0章　種々雑多な補足

0.1　座標系

本講義ではほぼ全体を通じてデカルト座標系 (Cartesian coordinate) をもちいて現象を記述する．地球の流体現象の記述には, 流体が球面上に束縛されているから本来ならば球面座標系を用いて記述するべきであるが, 数学的取り扱いの簡単化のためにデカルト座標系を用いることにする.[1]その他の座標系を用いる場合には，その都度それを説明することにする．

0.2　表記（nonation）

0.2.1　ベクトル

ベクトル量は, 高校数学で習った上付きの矢印ではなく，太字であらわす．すなわち，$\vec{A}$ ではなく $\boldsymbol{A}$ である．

0.2.2　単位ベクトル

デカルト座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルは，慣例にしたがってそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表す．また，時として $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ という表記を用いる．ここで

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}, \tag{1}$$

である．

地球流体力学では慣例として x, y, z 方向をそれぞれ，東，北，鉛直向きに取る．

[1]運動が球面上の比較的狭い領域に限られている場合には, 球面上に局所的にデカルト座標系を張ることができる．

0.2.3　位置ベクトル

位置ベクトルは，慣例にしたがって $\boldsymbol{r}$ もしくは $\boldsymbol{x}$ と表す.[2]
デカルト座標系では, $\boldsymbol{r}$ を成分表示すると

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

と表される．ここで，x, y, z はそれぞれ，$\boldsymbol{r}$ の x, y, z 成分である．高校数学で習ったように $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ という表記よりも，(2) のような表記を用いる方を薦める.[3]
なお，(1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{3}$$

と表記する.

0.2.4　速度場

速度場は $\boldsymbol{v}$ で表す．デカルト座標系で成分表示すると，

$$\boldsymbol{v} = u\,\boldsymbol{i} + v\,\boldsymbol{j} + w\,\boldsymbol{k} \tag{4}$$

である. u, v, w はそれぞれ $\boldsymbol{u}$ の x, y, z 方向の成分である.[4]
なお，(1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$\boldsymbol{v} = v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{5}$$

と表記する.

[2] これは記述する座標系には依存しないことに注意するべきである.

[3] デカルト座標系のような直線直交座標系では，どちらの表記を用いても大差ないが，曲線座標系を用いる場合には，顕著である. この例は後の章でで示す.

[4] 気象学の慣例に拠れば, 西風 (westerly: $u > 0$)，東風 (easterly: $u < 0$)，北風 (northerly: $v < 0$)，南風 (southerly: $v > 0$) と風（流体）の流れてくる方向を指し示すのに対し, 海洋では, これらはそれぞれ東向き流れ (eastward: $u > 0$)，西向き流れ (westward: $u < 0$)，南向き流れ (southward: $v < 0$)，北向き流れ (northward: $v > 0$)，と流体の流れる向きを指し示す, という違いがある.

0.2.5　偏微分

偏微分記号，$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために，$\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある．$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ の場合には，$\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と書く．このような表記では微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} &= \boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, &(6)\\ &= \boldsymbol{i}\,\partial_x + \boldsymbol{j}\,\partial_y + \boldsymbol{k}\,\partial_z, &(7)\\ &= \boldsymbol{e}_1\,\partial_1 + \boldsymbol{e}_2\,\partial_2 + \boldsymbol{e}_3\,\partial_3 &(8)\end{aligned}$$

となる.

0.3　和の規約（summation rules, Einstein's notation）

一つの項の中に同じアルファベットの添字が 2 回用いられているとき, その添字について 1 から 3 までの和をとる. すなわち,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3,\\ &= \sum_{i=1}^{3} x_i\,\boldsymbol{e}_i,\\ &= x_i\,\boldsymbol{e}_i. &(9)\end{aligned}$$

最後の表式に注目！和の規約とはつまり $\sum$ を省略することである.

注意 1:　添字はどんな記号でも良い．とにかく 2 回繰り返して出てきたら和をとればよい．つまり $x_i\,\boldsymbol{e}_i = x_j\,\boldsymbol{e}_j = x_k\,\boldsymbol{e}_k$ である.

注意 2:　2 次元空間であれば, 和は $1 \sim 2$ にわたってとる.

例:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= v_i\,\boldsymbol{e}_i. &(10)\\ \nabla\psi &= \boldsymbol{e}_i\,\partial_i\psi. &(11)\\ \mathrm{d}f(x_1, x_2, x_3) &= \mathrm{d}x_1\,(\partial_1 f) + \mathrm{d}x_2\,(\partial_2 f) + \mathrm{d}x_3\,(\partial_3 f)\\ &= \mathrm{d}x_i\,(\partial_i f). &(12)\end{aligned}$$

0.4 Kroneckerのデルタ

2 つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Kronecker のデルタという:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & (i, j \text{が異なる値を持つとき}). \\ 1, & (i, j \text{が同じ値を持つとき}). \end{cases} \tag{13}$$

Kronecker のデルタの別の定義は

$$\delta_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{14}$$

である.

例：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{e}_i\, \partial_i) \cdot (A_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= \delta_{ij}\, \partial_i A_j = \partial_j A_j. \end{aligned} \tag{15}$$

演習問題:

Kronecker のデルタの定義と和の規約を用いて, 以下の量を計算しなさい.

1. δ_{ii}
2. $\delta_{ij} A_j$

0.5 Eddingtonのイプシロン

3 つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Eddington のイプシロンという:

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i,j,k) = (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2) \text{ のとき}. \\ -1, & (i,j,k) = (3,2,1),\ (2,1,3),\ (1,3,2) \text{ のとき}. \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases} \tag{16}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}. \tag{17}$$

$\varepsilon_{ijk} = 1$ となる場合は $(i,j,k) = (1,2,3)$ の偶置換, $\varepsilon_{ijk} = -1$ となる場合は $(i,j,k) = (1,2,3)$ の奇置換のという.

例

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式は, Eddingtonのイプシロンを用いると

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}. \end{aligned} \tag{18}$$

とあらわせる．また二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とのベクトル積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}_i\, A_j\, B_k. \end{aligned} \tag{19}$$

となる．同様にして回転演算は

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}_i\, \partial_j A_k \end{aligned} \tag{20}$$

と表現できる．

演習問題

1. (18) を確かめなさい．
2. ベクトル解析に現れる公式は, δ_{ij}, ε_{ijk} や和の規約を使うと容易に証明できる．次にあげる公式を, δ_{ij}, ε_{ijk} や和の規約を使って証明しなさい．
   (a) ベクトル積に関する公式 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$,
   (b) ベクトル三重積に関する公式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}),$$

3. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を確かめなさい．

0.6 Gaussの定理

閉曲面 S で囲まれた体積 V について, 以下の 2 つの定理が成り立つ.[5]

I: 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して以下の式がなりたつ:

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{21}$$

ここで, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は法線 $\boldsymbol{n}$, 微小面積 $\mathrm{d}S$ を持つ面積要素である.

II: 任意のスカラー Q に対して以下の式がなりたつ:

$$\iint_S Q\,n_i\,\mathrm{d}S = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V, \tag{22}$$

ここで, n_i は法線 $\boldsymbol{n}$ の i 方向の成分である.

Iが通常の（電磁気学で登場する）Gauss の定理である.

演習問題:

(22) を証明しなさい.

0.7 Stokesの定理

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し, 以下の式が成り立つ:

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathrm{S}} (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{23}$$

ここで S は C を縁とする任意の曲面である. つまり, C は固定されているのに対して, S はどんな形でもよい. また, S は閉曲面でないことに注意せよ. $\boldsymbol{n}$ は S 上に立てられた外向き法線である. 曲面 S 上に立てられた法線は, 線積分において C 上を右回りに進むときに, 右ネジの進む方向にとる.

演習問題

S を任意の閉曲面とするとき, 積分

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{24}$$

を証明しなさい. ここで $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである.

[5] 部分積分を行うことにより, 証明できる.

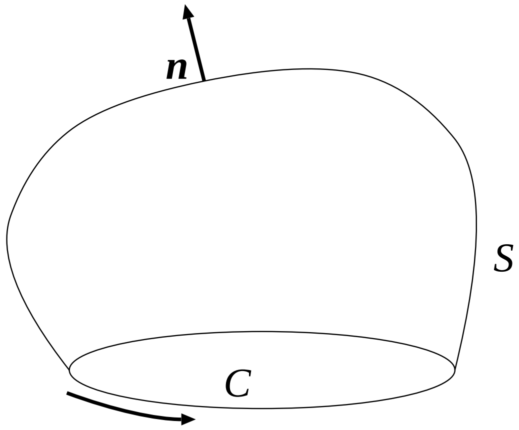

図 1: Stokesの定理を適用する閉曲線 C, C を縁とする曲面 S, および曲面上の法線ベクトルの関係.

ヒント 1： Stokesの定理を使って計算をする. 通常 Stokesの定理は閉曲線 C に沿った線積分を面積積分に直すときに用いる. すなわち, (23) を左から右にたどる. しかし, ここではその逆をたどる.

ヒント 2： Stokesの定理を使うためには, 問題の閉曲面を 2 つに割る. 例えば, 閉曲面として球 (地球) を想像し, それを大円 (赤道) で 2 つに割る. そうすると各々の半球 (北半球と南半球) は, Stokes の定理が要求している閉曲線 (赤道) を縁とする曲面になる. 北半球側で面積積分を実行するとき, 面積積分を Stokesの定理を用いて線積分に変換する. 赤道上で積分する際の積分経路の向きに注意する. (東向きか西向きか)

即ち, (24) 式の積分を 2 つに分割し, それぞれに付いて Stokesの定理を適用して積分値を見積もる. (任意の閉曲面として, このヒントのような球 (地球) を想像してもよい.)

ヒント 3：(あるいは別解)： デカルト座標系を採用し, (24) の積分を具体的に書き表すと

$$\int\!\!\int_{\mathrm{S}} (\partial_x v - \partial_y u)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{25}$$

となる. 上記の積分を実行し, S が閉曲面, 即ち物理量は x, y に付いて周期的であるとして値を見積もる. (これは閉曲面をドーナツ様のものと考えている場合に相当する.)