

地球惑星科学基礎 III 中間テスト

岩山 隆寛

2016年10月7日

1 問題

質量 m の質点が、重さの無視できる長さ l の伸びない紐によって吊るされているとする (図 1 参照). 質点を平衡の位置から、角度 θ だけ変位させたときに、質点の運動は以下の運動方程式によって記述される:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (1)$$

ここで、 g は重力加速度である. この方程式に関する以下の設問に答えなさい.

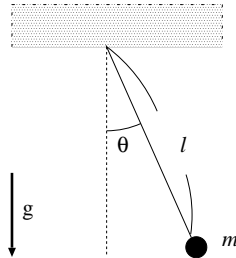


図 1 質量 m の質点が、重さの無視できる長さ l の伸びない紐の端に吊るされた振り子.

1. (1) は線形の微分方程式か、それとも非線形の微分方程式か、を調べなさい.*¹
2. (1) において θ が小さい場合 ($\theta \ll 1$), 即ち、微小振動の微分方程式は

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\theta \quad (2)$$

となることを示しなさい.

3. (2) は線形の微分方程式か、それとも非線形の微分方程式か、を調べなさい.
4. (2) の一般解を求めなさい.
5. 初期条件 $t = 0$ において、 $\theta = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$ を満足する (2) の解を求めなさい.

*¹ ヒント: 線形の微分方程式であれば、もし (1) を満足する解が 2 つ、それらを θ_1, θ_2 とする、が見つかったとき、 c_1, c_2 を任意定数として、 $c_1\theta_1 + c_2\theta_2$ も (1) の解になる.

2 模範解答