大気水圏科学実習のための予習について

大気水圏科学実習では，レーウィンゾンデやパイロットバルーンを用いて上層大気の気象状態（気温，圧力，風向，風速）を観測し，さらに観測されたデータを解析して，気象状態の成り立ちを理論的・観測的に理解することを目指します．そのための基礎的知識の修得や整理のために，大気水圏科学（山中担当）や地球流体力学（岩山担当）の講義で紹介された教科書や講義ノートなどを参考にして，以下の演習問題 (I) を解いてきてください．（余力があれば (II) にも挑戦してください．）

(I) 鉛直 1 次元の静止大気を考える．座標軸は，鉛直上向きを z 軸の正の向きとする．以下の問いに答えなさい．

(i) 静水圧平衡の式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g \tag{1}$$

の意味を簡単に説明しなさい．ここで，p, ρ, g はそれぞれ，圧力，密度，重力加速度である．必要であれば模式図等を用いなさい．

(ii) 静水圧平衡の式 (1) および単位質量あたりの理想気体の状態方程式

$$p = \rho R T \tag{2}$$

を用いて, 気圧と温度から任意の気圧面の高度を計算する式 (測高公式)

$$z = -\int_{p(0)}^{p(z)} \frac{RT(p)}{g}\,\mathrm{d}\ln p \tag{3}$$

を導きなさい. ここで，R, T はそれぞれ気体定数 [J/K/kg] と温度である．なお，R および重力加速度 g は定数であるとする．

コメント： 結果の式 (3) を用いると，気圧と気温の鉛直分布から，その気圧，気温が観測された場所の高度を知ることができる．

課題： レーウィンゾンデ観測によって得られた気圧の気温のデータの組から，その値が観測された高度を測高公式 (3) を用いて計算しなさい．

(iii) 大気が一様な温度 T_0 であると仮定する．このとき，気圧の鉛直プロファイル (p の z 依存性) は指数関数

$$p(z) = p(0)\exp(-z/H), \tag{4}$$
$$H = \frac{RT_0}{g}, \tag{5}$$

となることを示しなさい．ここで，H はスケールハイトと呼ばれる．

コメント： 対流圏では気温は高度とともに線形的に減少するので，このような気温を一定とおく問題設定は現実的ではない．しかしながら，実際に気圧を観測してみると高さとともに (4) のように近似的に指数関数的に減少しており，その気圧の鉛直変化に比べると気温の変化は緩やかであり，一定とみなす仮定は決して悪くはないことがわかる．

課題： 実際に観測された気温の鉛直変化が近似的に指数関数的であることを確かめなさい．

(iv) 気圧の鉛直プロファイルが (4) で与えられるとき，密度の鉛直プロファイルも気圧と同様に指数関数的

$$\rho(z) = \rho(0)\exp(-z/H), \tag{6}$$

になることを示しなさい．

コメント： 大気が等温であると仮定すると，気圧のスケールハイトと密度のスケールハイトは一致する．

課題： 実際に観測された気温と気圧のデータから理想気体の状態方程式を用いて密度を計算し，密度の鉛直変化が近似的に指数関数的であることを確かめなさい．また気圧のスケールハイトと密度のスケールハイトをそれぞれ求めて比べなさい．

(v) 密度の分布が (6) で与えられるとき，鉛直方向の大気の重心

$$z_{\mathrm{G}} \equiv \frac{\int_0^\infty z\rho(z)\,\mathrm{d}z}{\int_0^\infty \rho(z)\,\mathrm{d}z} \tag{7}$$

はスケールハイト H になることを示しなさい．

コメント： (5), (6) では，スケールハイトは物理量が e^{-1} になる高さとして定義している．この問題は，スケールハイトが重心と物理的に解釈できることを示している．

(vi) 乾燥断熱減率を表す式

$$\Gamma_{\mathrm{d}} = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{g}{c_p} \tag{8}$$

を導きなさい．ここで，c_p は定圧比熱である．地球大気において，Γ_{d} の値を求めなさい．

(vii) 温度の鉛直分布が

$$T = T_0 - \Gamma_{\mathrm{d}} z, \tag{9}$$

$$\Gamma_{\mathrm{d}} = \frac{g}{c_p} \tag{10}$$

で与えられるとき，温位の鉛直プロファイルを求めなさい．ここで温位は

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\square}, \tag{11}$$

$$\square = \frac{R}{c_p} \tag{12}$$

で定義される．

課題： レーウィンゾンデ観測で得られたデータから，温位 θ の鉛直プロファイルを計算しなさい．

(viii) 乾燥大気（水蒸気を含まない大気）はどのような時に (静的に) 安定, 中立, 不安定と言えるか．乾燥断熱減率を用いて説明しなさい．（図を用いて説明してもよい．）

(ix) 気圧座標系の利点について説明しなさい．

(x) 気圧座標系では，静水圧平衡の式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p} \tag{13}$$

で与えられることを示しなさい．ここで，Φ は ジオポテンシャルと呼ばれ,

$$\Phi(z) \equiv \int_0^z g \,\mathrm{d}z \tag{14}$$

で定義される物理量である．

コメント： 鉛直座標として幾何学的高度 z の代わりに圧力 p を用いた場合, 気圧傾度力の項にはジオポテンシャル Φ の勾配が現れる．（例えば (22) 参照．）

(xi) Φ を用いて定義される高さ，ジオポテンシャルハイト

$$Z \equiv \frac{\Phi}{g_0}, \tag{15}$$

は幾何学的高度 z と近似的にほぼ等しい．ここで，g_0 は地上における重力加速度で $g_0 = 9.807\,\mathrm{m^2/s}$ の値を持つ．高度 $z = 100\,\mathrm{km}$ における ジオポテンシャルハイトの値 Z を求めなさい．

コメント： 重力加速度の鉛直依存性を考慮すると，先の問題の測高公式 (3) の z はジオポテンシャルと解釈できる．なぜなら，

$$g_0 \mathrm{d}Z = \mathrm{d}\Phi = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -\frac{RT}{p}\mathrm{d}p$$

$$Z = -\frac{1}{g_0}\int_{p(0)}^{p(Z)} RT(p)\,\mathrm{d}\ln p \tag{16}$$

となる．(3) の計算で g を一定とみなすと，(3) は (16) と一致する．

(II) 次に水平方向の大気の状態について考える．

(i) 気圧座標系では，単位体積あたりの空気塊に働く水平方向の気圧傾度力

$$\left(-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z,\, -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z\right) \tag{17}$$

は

$$\left(-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p,\, -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_p\right) \tag{18}$$

で与えられることを示しなさい．

ヒント： 右辺と左辺で独立変数の組が何であり，そのうちのどの変数を一定とおいて偏微分を行っているかに注意すること．

偏微分の計算に関するメモ： 偏微分 $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z$ を計算するときは以下のルールを用いるとよい．$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \frac{\partial(p,z)}{\partial(x,z)}$ とかく．$\partial(A,B)$ は Jacobian で分数のように扱える．即ち，分母，分子に共通のものがあれば約分できる：

$$\frac{\partial(A,B)}{\partial(A,B)} = 1. \tag{19}$$

また，$\partial(A,B) = -\partial(B,A)$ である．これをつかって，例えば x 成分については

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,z)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial(\Phi,p)}{\partial(x,p)} \tag{20}$$

を示せばよい．静水圧平衡の式は x 成分を議論するときには，$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_x = -\rho g$ と見る．このような偏微分の計算は熱力学で頻繁に出てくる．例えば，上記のルールに従うと，状態方程式 $f(p,\rho,T)=0$ を満足する圧力 p, 密度 ρ, 温度 T の間には,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho = -1 \tag{21}$$

が満たされる．ここで，f は任意の関数である．常微分のセンスでは (21) は 1 になりそうである．この例は偏微分の計算では何の変数を一定と置いているかが結果に重要な影響を与えることを示している．

(ii) 地衡風平衡について説明しなさい．

コメント： 鉛直方向のバランスである静水圧平衡と，水平方向のバランスである地衡風平衡は，大規模な気象現象では第ゼロ近似的に成立している重要な状態である．

(iii) 気圧座標系における地衡風の式（東西方向）

$$f u_{\mathrm{g}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{22}$$

と静水圧平衡の式 (14) を用いて，温度風の関係式

$$\frac{\partial u_{\mathrm{g}}}{\partial \ln p} = \frac{R}{f} \frac{\partial T}{\partial y} \tag{23}$$

を導きなさい．ここで，u_{g} は東西方向の地衡風である．

コメント： 温度風の関係式を気圧座標でなく幾何学的高度を用いて議論すると，

$$f \frac{\partial u_{\mathrm{g}}}{\partial z} = RT \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} \frac{\partial \ln p}{\partial y} + g \frac{\partial \ln p}{\partial y} - g \frac{\partial \ln T}{\partial y} \tag{24}$$

となる．$\frac{\partial \ln \rho}{\partial z} < 0$ なので第 1 項，第 2 項はほぼ相殺される，$f \frac{\partial u_{\mathrm{g}}}{\partial z}$ は最終項のみで近似できる．一方，(23) は正確な式である．このように，幾何学的高度を用いるよりも気圧を鉛直座標に用いた方が計算が容易になる場合があり，これも気圧座標系の利点である．

(iv) 中緯度上部対流圏に偏西風が存在することは, どのような温度の子午面分布と対応しているか. 簡単に述べなさい.

(v) 気圧座標系における連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{25}$$

で与えられることを証明しなさい．ここで，u, v は東西，南北方向の風速で，$\omega \equiv \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}$ で定義される，気圧座標系における鉛直風速に対応するものである．

ヒント： 微小な立方体 δV を考える．立方体の体積は $\delta x \, \delta y \, \delta z$ であるとする．この立方体内に含まれる流体粒子の質量は Lagrange 的に保存される．なお，静水圧平衡の式から導かれる

$$\delta z = -\frac{1}{\rho g} \, \delta p \tag{26}$$

の関係式を用いて，$\delta x \, \delta y \, \delta z$ を圧力 δp を含む形に変形する．