

# 大気水圏科学特論 II

岩山隆寛<sup>\*1</sup>

平成 17 年度 神戸大学 大学院自然科学研究科 地球惑星科学専攻

<sup>\*1</sup> iwayama@kobe-u.ac.jp



# 目次

第 0 章	ガイダンス	5
0.1	アウトライン	5
0.2	参考文献	5
第 1 章	準地衡流渦位方程式	7
1.1	基礎方程式系	7
1.2	無次元パラメター	8
1.3	無次元化された基礎方程式系	10
1.4	地衡流近似	12
1.5	安定性の概念	15
1.6	準地衡流渦位方程式	17
第 2 章	順圧・傾圧不安定理論	23
2.1	不安定問題の定式化	23
2.2	擾乱の構造：エネルギー論	26
2.3	不安定のための必要条件	29
2.4	Charney–Stern の定理の考察	32
2.5	傾圧不安定の物理的機構：パーセル法	36
2.6	Eady 問題	36



## 第0章

# ガイダンス

### 0.1 アウトライン

地球大気の中緯度の総観規模現象 (synoptic scale phenomena) を流体力学に基づいて解説をする。先ず, 総観規模現象を記述するために必要な方程式系 (準地衡流渦位方程式) をスケージングの議論を用いて系統的に導出する。引き続いて, 東西平均流が水平・鉛直シアを持つ場合に, 流体中に発達する擾乱の構造や必要条件, さらにモード解の議論を行う。

### 0.2 参考文献

- 高薮出, 2000 温帯低気圧の力学, 日本気象学会, 気象研究ノート 198, 154 pp.
- Holton, J. R. 2004 *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 4th Edn. Academic Press, 535pp.
- Pedlosky, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd Edn. Springer. (chap. 6 ~7)
- Vallis, G. K. 2006 *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. Press. (chap. 6)



# 第 1 章

## 準地衡流渦位方程式

傾圧不安定論を議論するために必要な方程式系を系統的なスケージングの議論によって導出する。

### 1.1 基礎方程式系

半径  $a$  の球面上の流体方程式系を議論の出発点とする。この方程式系は、連続の式、運動方程式、熱力学方程式からなる。これらはそれぞれ以下のように表される：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \tan \phi - 2\Omega \sin \phi v + 2\Omega \cos \phi w = -\frac{1}{\rho r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{K}_\lambda, \quad (1.2)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r} \tan \phi + 2\Omega \sin \phi u = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mathcal{K}_\phi, \quad (1.3)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega \cos \phi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \mathcal{K}_r, \quad (1.4)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = J. \quad (1.5)$$

ここで、 $\rho$  は密度、 $u, v, w$  は  $\lambda$  (経度)、 $\phi$  (緯度)、 $r$  (動径) 方向の流速、 $p$  は圧力、 $\Omega$  は地球の自転角速度、 $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{K}_\phi, \mathcal{K}_r)$  は単位質量あたりの流体に働く粘性力項である。 $\frac{D}{Dt}$  は Lagrange 微分で

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r}, \quad (1.6)$$

と表され,  $\theta$  は温位で

$$\theta \equiv T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p} \quad (1.7)$$

で定義される. ここで  $T$  は温度,  $p_0$  はある基準となる圧力で, 通常は  $p_0 = 1000 \text{ hPa}$  にとる.  $R$  は乾燥空気の気体定数で,  $R = 287 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$  である.  $C_p = \frac{7}{2}R$  は定圧比熱.  $J$  は単位質量あたりの流体粒子に対する加熱率である. また, 流体は理想気体でその状態方程式は

$$p = \rho RT \quad (1.8)$$

で与えられる.

以下では大気の運動が中緯度で生じるものとする. ここで中緯度 (ある緯度  $\phi_0$ ) に注目し, 新しい座標系 (局所直交座標系) を導入しておく. 東西方向, 南北方向, 鉛直方向の距離を

$$x \equiv \lambda a \cos \phi_0, \quad (1.9)$$

$$y \equiv a(\phi - \phi_0), \quad (1.10)$$

$$z \equiv r - a, \quad (1.11)$$

で定義すると, 基礎方程式中に現れる空間的な微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = a \cos \phi_0 \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = a \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.14)$$

となる.

## 1.2 無次元パラメーター

先に提示した基礎方程式系を無次元の形式に直すために, まず, 変数の無次元化について考える. 注目する現象の水平空間スケールを  $L$ , 鉛直空間スケールを  $D$ , 水平風速の代表的大きさを  $U$  とする. このとき, これらのスケールを用いて, 変数を無次元化する:

$$x = Lx', y = Ly' \quad (1.15)$$

$$z = Dz', \quad (1.16)$$

$$t = \frac{L}{U}t', \quad (1.17)$$

$$u = Uu', v = Uv' \quad (1.18)$$

$$w = \frac{D}{L}Uw'. \quad (1.19)$$



プライムの付いた量が無次元変数である．圧力，密度の代表的な大きさは次のような考察から決定する．まず，全球平均したときに鉛直風速は  $w = 0$  になるであろう．そこで，第一近似として

$$\frac{dp_s(z)}{dz} = -\rho_s(z)g \quad (1.20)$$

という静水圧平衡が成り立っているであろう．(1.20) を満足する  $p_s, \rho_s$  を用いて，圧力，密度を静水圧平衡状態とそれからのズレという形で表現する：

$$p = p_s(z) + \tilde{p}, \quad (1.21)$$

$$\rho = \rho_s(z) + \tilde{\rho}, \quad (1.22)$$

$\tilde{p}$  の大きさは，とりあえず  $\tilde{p}$  に伴う水平方向の気圧傾度力が，水平風速に働く Coriolis 力の水平成分とバランスすると考えて（中緯度では実際にそのようになっている），

$$(-2\Omega v \sin \phi_0, 2\Omega u \sin \phi_0) \simeq -\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{p}$$

より，

$$\mathcal{O}(\tilde{p}) = \mathcal{O}(\rho_s LU f_0)$$

となる．ここで， $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$  は Coriolis パラメターと呼ばれる．したがって，

$$p = p_s + \rho_s LU f_0 p'. \quad (1.23)$$

次に  $\tilde{p}, \tilde{\rho}$  の間にも静水圧平衡の関係が成り立っていると仮定して， $\tilde{\rho}$  の大きさを決める：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &\simeq -\tilde{\rho}g, \\ \mathcal{O}\left(\frac{\tilde{p}}{D}\right) &= \mathcal{O}\left(\frac{\rho_s U f_0 L}{D}\right) = \mathcal{O}(\tilde{\rho})g. \end{aligned}$$

これより

$$\tilde{\rho} = \rho_s U \frac{f_0 L}{gD}. \quad (1.24)$$

ただし，以下で定義される無次元数である Rossby 数  $\epsilon$  Froude 数  $F$  を用いて，

$$\epsilon \equiv \frac{U}{f_0 L}, \quad (1.25)$$

$$F \equiv \frac{(f_0 L)^2}{gD}, \quad (1.26)$$

密度は最終的に

$$\rho = \rho_s (1 + \epsilon F \rho') \quad (1.27)$$

と表現される．

### 1.3 無次元化された基礎方程式系

(1.15) ~ (1.19), (1.23), (1.27) を運動方程式と連続の式に代入し, これらの方程式を無次元変数で記述する. なお, ここでは次元のある変数には \* をつけ, 無次元変数にはプライムや\*をつけないことにする. すなわち, (1.15) は  $x_* = Lx, y_* = Ly$  とかくことにする.

(1.2) に (1.15) ~ (1.19), (1.23), (1.27) を代入し,  $f_0U$  で割ると,

$$\begin{aligned} \epsilon \left\{ \frac{Du}{Dt} + \frac{L}{r_*} (\delta uw - uv \tan \phi) \right\} - \frac{\sin \phi}{\sin \phi_0} v + \frac{\cos \phi}{\sin \phi_0} \delta w \\ = -\frac{\cos \phi_0}{\cos \phi} \frac{a}{r_*} \frac{1}{(1 + \epsilon F \rho)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mathcal{K}_{*\lambda}}{f_0 U} \end{aligned} \quad (1.28)$$

を得る. ここで Lagrange 微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{a \cos \phi_0}{r_* \cos \phi} \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{a}{r_*} \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.29)$$

となり,  $\delta$  はアスペクト比

$$\delta \equiv \frac{D}{L} \quad (1.30)$$

である. 同様に, (1.3) は

$$\begin{aligned} \epsilon \left\{ \frac{Dv}{Dt} + \frac{L}{r_*} (\delta vw + u^2 \tan \phi) \right\} + \frac{\sin \phi}{\sin \phi_0} u \\ = -\frac{a}{r_*} \frac{1}{(1 + \epsilon F \rho)} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mathcal{K}_{*\phi}}{f_0 U}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

鉛直方向の運動方程式 (1.4) は (1.15) ~ (1.19), (1.23), (1.27) を代入したあと,  $\frac{D(1+\epsilon F \rho)}{LU f_0}$  をかけて,

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon F \rho) \left\{ \epsilon \delta^2 \frac{Dw}{Dt} - \epsilon \delta \frac{L}{r_*} (u^2 + v^2) - \frac{\cos \phi}{\sin \phi_0} \delta u \right\} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial(\rho_s p)}{\partial z} \\ - \rho + \frac{(1 + \epsilon F \rho) \delta}{f_0 U} \mathcal{K}_{*r} \end{aligned} \quad (1.32)$$

となる. 最後に, 連続の式 (1.1) は (1.15) ~ (1.19), (1.23), (1.27) を代入したあと,  $\frac{L}{\rho_s U}$  をかけて,

$$\epsilon F \frac{D\rho}{Dt} + (1 + \epsilon F \rho) \left\{ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial(\rho_s w)}{\partial z} + \frac{2L}{r_*} \delta w + \frac{a}{r_*} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{L}{r_*} v \tan \phi + \frac{a \cos \phi_0}{r_* \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = 0. \quad (1.33)$$

熱力学の式の無次元化はあとの節で取り扱うことにする．

方程式 (1.28), (1.31), (1.32), (1.33) は今のところ何の近似も行っていない．引き続き節では，中緯度に卓越する現象に対して，上で導いた式に現れる独立なパラメータ  $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $L/a$ ,  $F$  の大きさを見積もり，卓越する項を抜き出すという作業を行い，近似方程式系を導く．その前準備として，以下では三角関数の近似公式とその他の独立な無次元パラメータを導入しておく．

三角関数の近似公式:

$$\begin{aligned}\sin \phi &= \sin \left( \phi_0 + \frac{Ly}{a} \right) \\ &= \sin \phi_0 + \frac{Ly}{a} \cos \phi_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{Ly}{a} \right)^2 \sin \phi_0 + \dots\end{aligned}\quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \cos \left( \phi_0 + \frac{Ly}{a} \right) \\ &= \cos \phi_0 - \frac{Ly}{a} \sin \phi_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{Ly}{a} \right)^2 \cos \phi_0 + \dots\end{aligned}\quad (1.35)$$

$$\begin{aligned}\tan \phi &= \tan \left( \phi_0 + \frac{Ly}{a} \right) \\ &= \tan \phi_0 + \frac{Ly}{a} \frac{1}{\cos^2 \phi_0} + \left( \frac{Ly}{a} \right)^2 \frac{\tan \phi_0}{\cos^2 \phi_0} + \dots\end{aligned}\quad (1.36)$$

粘性項: 粘性項は  $\mathcal{O}(L)$ ,  $\mathcal{O}(D)$  よりも小さなスケールの乱流によって運動量がそれぞれ水平，鉛直に混合されることに伴って発生するものであり，以下の  $A_H$ ,  $A_V$  はそれぞれ，水平渦粘性係数，鉛直渦粘性係数と呼ばれる．

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{*\lambda} &= A_H \left( \frac{\partial}{\partial x_*^2} + \frac{\partial}{\partial y_*^2} \right) u_* + A_V \frac{\partial}{\partial z_*^2} u_* \\ &= \mathcal{O} \left( \frac{A_H U}{L^2}, \frac{A_V U}{D^2} \right)\end{aligned}\quad (1.37)$$

粘性力項を  $f_0 L$  で割った量は無次元数となる．

$$\mathcal{O} \left( \frac{\mathcal{K}_{*\lambda}}{f_0 L} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{A_H}{f_0 L^2}, \frac{A_V}{f_0 D^2} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{E_H}{2}, \frac{E_V}{2} \right)\quad (1.38)$$

ここで， $E_H$ ,  $E_V$  はそれぞれ水平 Ekman 数，鉛直 Ekman 数と呼ばれる．

その他の無次元数 Colioris パラメータの南北微分は地球流体力学にとって重要な外的パラメータの一つである．

$$\beta_0 \equiv \left( \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi_0} = \frac{2\Omega}{a} \cos \phi_0.\quad (1.39)$$

$\beta_0$  に関連した幾つかの無次元量が定義でき、それぞれ次のような大きさを持つ。

$$\frac{\beta_0 L}{f_0} = \frac{L}{a} \cot \phi_0 = \mathcal{O}\left(\frac{L}{a}\right), \quad (1.40)$$

$$\frac{\beta_0 L / f_0}{\epsilon} = \frac{\beta_0 L}{f_0} \frac{f_0 L}{U} = \frac{\beta_0 L^2}{U} = \mathcal{O}\left(\frac{L}{a\epsilon}\right). \quad (1.41)$$

なお、Rossby 数は惑星渦度と相対渦度の比

$$\epsilon = \frac{U/L}{f_0} \quad (1.42)$$

と解釈することができる。一方、惑星渦度の勾配と相対渦度の勾配との比という無次元パラメター  $\beta^{-1}$  が定義でき、この大きさは (1.41) より

$$\beta^{-1} = \frac{U/L^2}{\beta_0} = \mathcal{O}\left(\epsilon \frac{a}{L}\right) \quad (1.43)$$

である。あとで見るように中緯度総観規模の現象では、 $\epsilon \ll 1$  であるが、 $a/L \ll 1$  ではないので、 $\beta^{-1} \ll 1$  ではない。

## 1.4 地衡流近似

中緯度総観規模現象の特徴的な大きさは観測から

- $a = 6.4 \times 10^6$  m
- $L = 10^6$  m
- $U = 10$  ms<sup>-1</sup>
- $f_0 = 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>
- $\beta_0 = \frac{f_0}{a} = 10^{-11}$  m<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>
- $D = 10^4$  m

と見積もることができる。これらの値を使って、前節で現れた様々な無次元数の大きさを見積もってみる。

$$\epsilon = \frac{U}{f_0 L} = 10^{-1}$$

$$\frac{L}{a} = 10^{-1} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (1.44)$$

$$\beta^{-1} = \frac{U}{\beta_0 L} = 10^0 \quad (1.45)$$

$$F = \frac{(f_0 L)^2}{gD} = 10^{-1} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (1.46)$$

$$\delta = \frac{D}{L} = 10^{-2} = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.47)$$

$$\frac{r_*}{a} - 1 = \mathcal{O}\left(\frac{\delta L}{a}\right) = \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (1.48)$$

上で見積もったように，無次元数は Rossby 数  $\epsilon$  で表現することができる．いま  $\epsilon$  が微小なので未知変数を  $\epsilon$  で

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z, t) + \epsilon u_1(x, y, z, t) + \dots \quad (1.49)$$

のように漸近展開して支配方程式に代入し， $\epsilon$  の各次数の式を作る．このとき， $\epsilon$  は任意のパラメータなので，各次数の方程式の係数がバランスしていなければいけない．このような要請から， $\epsilon$  の各次数に対して以下のような式が導かれる．

$\epsilon^0$  次の式： (1.28) より

$$v_0 = \frac{\partial p_0}{\partial x}. \quad (1.50)$$

(1.31) より

$$u_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial y}. \quad (1.51)$$

(1.32) より

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial(\rho_s p_0)}{\partial z} + \rho_0 = 0 \quad (1.52)$$

(1.33) より

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial(\rho_s w_0)}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (1.53)$$

(1.50), (1.51) は Coriolis 力と気圧傾度力がバランスした状態で，地衡流を表している．いっぽう，(1.52) は鉛直方向の気圧傾度力と重力とのバランスで，静水圧平衡を表す．

地衡流の式は水平非発散

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (1.54)$$

なので, (1.53) から

$$\frac{\partial(\rho_s w_0)}{\partial z} = 0, \quad (1.55)$$

すなわち  $\rho_s(z)w_0$  が高さに依存しないことになる. ある高度で  $w_* = 0$  であれば, この性質は満足される. もし上端もしくは下端に水平の固体境界面があれば, ここでは  $w_* = 0$  なので, 流体内のいたるところで  $w_0 = 0$  となる. また, 下端に高さ  $h_B$ , 水平スケール  $L_B$  の山があるにも  $w_* = \mathcal{O}\left(U \frac{h_B}{L_B}\right)$  なので,  $w = \mathcal{O}\left(\frac{L}{L_B} \frac{h_B}{D}\right)$  とみつもられ  $w = \mathcal{O}(\epsilon)$  であれば,  $w_0 = 0$  となって上で行った解析は正当である. なお,  $w = \mathcal{O}(1)$  であれば, 地衡流近似は破綻する. このような考察から鉛直速度  $w$  の漸近展開は  $\epsilon$  の 1 次のオーダーから始まる:

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon w_2 + \dots \quad (1.56)$$

$\epsilon$  の 0 次のオーダーの式は, 時間微分を含まない. そこで, 初期値を与えて将来の場の値を求めるという予報ができない. しかしながら以下で見るように  $\epsilon$  の 1 次のオーダーの式を求め, 変形することにより,  $\epsilon$  の 0 次のオーダーの時間発展方程式導出される.

$\epsilon^1$  次の式: (1.28), (1.31), (1.33) よりそれぞれ

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 - \left(\frac{L}{\epsilon a}\right) y \cot \phi_0 v_0 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{L}{\epsilon a} y \tan \phi_0 \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_1 + \left(\frac{L}{\epsilon a}\right) y \cot \phi_0 u_0 = -\frac{\partial p_1}{\partial y}, \quad (1.58)$$

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w_1) + \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{L}{\epsilon a} v_0 \tan \phi_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{L}{\epsilon a} y \tan \phi_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (1.59)$$

が得られる. (1.57), (1.58) の左辺最終項は地球の自転角速度 (Coriolis パラメター) の緯度依存性によって生じた項で, いわゆる  $\beta$  項と呼ばれるものである. また, (1.57) の右辺最終項は, 球面上に局所直行座標系を張ったときに, 座標系の曲がりによって生じた項で, 曲率項と呼ばれるものである. このような曲率項は  $\phi_0 \simeq 0$  すなわち赤道域ではゼロになり,  $\beta$  平面近似された方程式と上式は等価な形になる. しかしながら,  $\phi_0 \simeq 0$  では地衡流近似が成り立たないので, ( $\epsilon$  の最低次の式が地衡流であるという) 上で展開した議論は正しくない. つまり,  $\epsilon$  の漸近展開によって厳密に議論を行うと  $\mathcal{O}(\epsilon)$  の方程式の議論では  $\beta$  平面近似は正しくな

いことになる．しかしながら，あとで見るように， $\mathcal{O}(\epsilon)$  の式から渦度方程式を作ると，この気圧傾度力に現れた曲率項は消え，結局  $\beta$  平面近似された方程式から出発した議論と等価な結果が導かれる．

渦度方程式： (1.57), (1.58) より渦度

$$\zeta_0 \equiv \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad (1.60)$$

の発展方程式を求める． $\partial_x(1.58) - \partial_y(1.57)$  の演算を行い，(1.40), (1.43), (1.54) を用いると，

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \beta v_0 = \frac{L}{\epsilon a} \tan \phi_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{L}{\epsilon a} y \tan \phi_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad (1.61)$$

となる．さらに連続の式 (1.59) および，地衡流の関係式 (1.50), (1.51) を考慮すると，(1.61) は

$$\frac{D_0}{Dt} \{\zeta_0 + \beta y\} = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w_1) \quad (1.62)$$

$$\frac{D_0}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.63)$$

となる．(1.62) は渦度方程式と呼ばれる．渦度は地衡流の関係式を用いると

$$\zeta_0 = \nabla^2 p_0 \quad (1.64)$$

と書けるので，もし  $p_0$  と  $w_1$  の間の関係がわかれば，(1.62) は  $p_0$  だけの閉じた方程式になる．実際に，熱力学の方程式を用いると， $p_0$  と  $w_1$  の間の関係が導ける．

## 1.5 安定性の概念

前節で導いた渦度方程式において，鉛直速度と圧力場の関係がわかれば，系の支配方程式は閉じる．このことは熱力学方程式を考慮することによって実現されるが，その前に，鉛直方向の大気安定性について復習しておく<sup>\*1</sup>

密度成層した鉛直 1 次元の静止大気を考える．今，初期に高度  $z$  にある流体粒子を  $z + \Delta z$  まで断熱的に変位させること考える．ただし，流体粒子の持つ圧力は，その外界の圧力と常に等しくなるように変位させるとする．このとき，流体粒子の持つ温位

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p}$$

<sup>\*1</sup> 本節では，添え字 \* のない変数は，次元のある量であるとする．なぜなら，本節では，次元のある量のみを取り扱うので，添え字をつけるのが煩雑だからである．

は変位の前後で一定に保たれる．なぜならば，温位はエントロピー  $S$  と

$$S = C_p \ln \theta \quad (1.65)$$

の関係で結ばれ，エントロピーは断熱過程において一定に保たれるからである．なお，温位は  $\theta$  は状態方程式 (1.8) を用いると，

$$\theta = \frac{p_0}{R\rho} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad (1.66)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (1.67)$$

と表現できる．

流体粒子を  $z$  から  $z + \Delta z$  に変位させたときの運動について考察する．流体粒子の持つ物理量を添え字 A であらわし，一方流体粒子の外界の物理量を添え字 B であらわすことにする．変位に伴って，流体粒子の持つ密度は  $\rho_A \rightarrow \rho_A + \Delta\rho_A$  へと変化する． $\Delta\rho_A$  は (1.66) を用いると，

$$\begin{aligned} \Delta\rho_A &= \Delta \left[ \frac{p_0}{R\theta_A} \left( \frac{p_A}{p_0} \right)^{1/\gamma} \right] \\ &= \left( \frac{\rho_A}{\gamma} \frac{\partial \ln p_A}{\partial z} \right)_z \Delta z, \end{aligned} \quad (1.68)$$

となる．外界と流体粒子のもつ圧力は等しく，さらに  $\rho_A(z) = \rho_B(z)$  なので，したがって，

$$\rho_A(z + \Delta z) = \rho_A + \Delta\rho_A = \rho_A(z) + \left( \frac{\rho_B}{\gamma} \frac{\partial \ln p_B}{\partial z} \right)_z \Delta z. \quad (1.69)$$

一方， $z + \Delta z$  における，外界の密度は

$$\rho_B(z + \Delta z) = \rho_B(z) + \left. \frac{\partial \rho_B}{\partial z} \right|_z \Delta z = \rho_A(z) + \left. \frac{\partial \rho_B}{\partial z} \right|_z \Delta z \quad (1.70)$$

である．したがって流体粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} &= -\frac{1}{\rho_A(z + \Delta z)} \frac{\partial p_B}{\partial z} - g \\ &= \frac{\rho_B(z + \Delta z)}{\rho_A(z + \Delta z)} - g \end{aligned}$$

ここで，流体粒子の外界は静止大気であり，そこでは静水圧平衡が成り立つので，

$$\frac{\partial p_B}{\partial z} = -\rho_B g$$



を用いた．さらに，(1.69), (1.70) を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} &= \frac{g}{\rho_A(z + \Delta z)} (\rho_B(z + \Delta z) - \rho_A(z + \Delta z)) \\ &= g \frac{\rho_B(z)}{\rho_A(z + \Delta z)} \left( \frac{\partial \ln \rho_B}{\partial z} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln p_B}{\partial z} \right)_z \Delta z\end{aligned}$$

(1.66) を用いると運動方程式は  $\mathcal{O}(\Delta z)$  のオーダーで

$$\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} = -g \left( \frac{\partial \ln \theta_B}{\partial z} \right)_z \Delta z \quad (1.71)$$

となる．この方程式は， $g \left( \frac{\partial \ln \theta_B}{\partial z} \right)_z > 0$  であれば，流体粒子は変位に伴って復元力を受け，元の高度を中心とした振動運動を起こす． $g \left( \frac{\partial \ln \theta_B}{\partial z} \right)_z < 0$  であれば流体粒子の変位は時間とともに指数関数的に増大してしまう．したがって，微小擾乱に対して鉛直方向に大気が安定であるためには， $g \left( \frac{\partial \ln \theta_B}{\partial z} \right)_z > 0$  でなければいけない．

$$N \equiv \sqrt{g \left( \frac{\partial \ln \theta_B}{\partial z} \right)_z} \quad (1.72)$$

とすると，流体粒子は振動数  $N$  で鉛直方向に振動する．このような振動数は Brunt–Väisälä 振動数と呼ばれるものである．

観測によると Brunt–Väisälä 振動数は対流圏で  $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  である．したがって中緯度における Colioris パラメータ  $f$  ( $\sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ) に比べてはるかに大きい．一方，地衡流運動の特徴的な時間スケール  $T$  は  $T^{-1} \ll f$  なので，地衡流理論では  $N$  で特徴付けられる運動は明確には扱わない．ただし， $N$  の存在は大規模な大気の鉛直運動を抑制しており，このことは Rossby 数の最低次の鉛直速度場が小さいことと関連している．

## 1.6 準地衡流渦位方程式

### 1.6.1 熱力学方程式の無次元化

熱力学方程式を無次元形式で書き表すために，まず温位  $\theta_*$  の無次元化を考える．(1.66)，および，(1.23), (1.27) より

$$\begin{aligned}\ln \theta_* &= \frac{1}{\gamma} \ln p_* - \ln \rho_* - \ln \left( R p_0^{1/\gamma-1} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \ln \left\{ p_s \left( 1 + \frac{\epsilon f_0^2 L^2 \rho_s}{p_s} p \right) \right\} - \ln \{ \rho_s (1 + \epsilon F \rho) \} - \ln \left( R p_0^{1/\gamma-1} \right) \\ &\simeq \frac{1}{\gamma} \ln p_s - \ln \rho_s - \ln \left( R p_0^{1/\gamma-1} \right) + \frac{1}{\gamma} \epsilon \frac{f_0^2 L^2 \rho_s}{p_s} p - \epsilon F \rho.\end{aligned} \quad (1.73)$$

ここで  $\theta$  のスケーリングは,  $p_*$ ,  $\rho_*$  のスケーリングと同様に

$$\theta_* = \theta_s(z) \{1 + \epsilon F\theta(x, y, z)\} \quad (1.74)$$

とする. ここで,

$$\ln \theta_s(z) = \frac{1}{\gamma} \ln p_s(z) - \ln \rho_s(z) - \ln \left( R p_0^{1/\gamma-1} \right) \quad (1.75)$$

である.  $\theta$  を  $\epsilon$  で以下のように漸近展開する:

$$\theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1 + \dots \quad (1.76)$$

(1.73) および  $F$  の定義を用いると  $\theta_0$  は,  $p_0$ ,  $\rho_0$  と以下のように関係付けられる:

$$\theta_0 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{gD\rho_s}{p_s} \right) p_0 - \rho_0. \quad (1.77)$$

温位  $\theta_0$  は静水圧平衡の式を考慮すると, もっと簡単な表現にすることができる. 基本場の静水圧平衡の式

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\rho_s g D$$

を用いると, (1.77) は

$$\theta_0 = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{d \ln p_s}{dz} \right) p_0 - \rho_0. \quad (1.78)$$

一方,

$$\frac{d}{dz} \ln \theta_s = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dz} \ln p_s - \frac{d}{dz} \ln \rho_s, \quad (1.79)$$

$\epsilon$  の 0 次の静水圧平衡の式 (1.52) より

$$\begin{aligned} \theta_0 &= - \left( \frac{d}{dz} \ln \theta_s + \frac{d}{dz} \ln \rho_s \right) p_0 + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s p_0) \\ &= \frac{\partial p_0}{\partial z} - p_0 \frac{d}{dz} \ln \theta_s. \end{aligned} \quad (1.80)$$

最後の表式の最終項の大きさは

$$\mathcal{O} \left( \frac{d}{dz} \ln \theta_s \right) = \mathcal{O} \left( D \frac{d}{dz_*} \ln \theta_s \right) = \mathcal{O} \left( \frac{DN^2}{g} \right) \sim \mathcal{O}(\epsilon) \quad (1.81)$$

なので, したがって (1.80) は

$$\theta_0 = \frac{\partial p_0}{\partial z} \quad (1.82)$$

となる．(1.82) は静力学平衡の式の温位を用いた表現とみなせる．

(1.74) を用いると，断熱過程における熱力学方程式は

$$\frac{D\theta_*}{Dt_*} = \frac{D}{Dt_*} \{ \theta_s(z) (1 + \epsilon F\theta) \} = 0$$

より，

$$\frac{D\theta}{Dt} + \frac{w}{\epsilon F} \frac{d \ln \theta_s}{dz} (1 + \epsilon F\theta) = 0 \quad (1.83)$$

となる．未知変数を Rossby 数  $\epsilon$  で漸近展開したとき， $\epsilon$  の最低次の式は

$$\frac{D_0}{Dt} \theta_0 + S(z) w_1 = 0 \quad (1.84)$$

ここで

$$S(z) \equiv \frac{1}{F} \frac{d \ln \theta_s}{dz} \quad (1.85)$$

は静的安定性パラメーター (static stability parameter) と呼ばれるもので，前節で議論した Brunt-Väisälä 振動数  $N_s$  とは

$$S(z) = \frac{N_s^2 D^2}{f_0^2 L^2} \quad (1.86)$$

の関係で結ばれている．

### 1.6.2 温度風の関係式

鉛直方向に静力学平衡，水平方向には地衡風平衡が成り立つ場合には，温度場（もしくは温位場）の水平勾配と風速場の鉛直シアーの間に関係式が導ける．(1.50), (1.51) をそれぞれ  $z$  で偏微分し，(1.82) を用いると

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial \theta_0}{\partial x}, \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \theta_0}{\partial y}, \quad (1.88)$$

が得られる．(1.87), (1.88) の関係式は温度風の関係式 (thermal wind relation) と呼ばれている．

### 1.6.3 準地衡流渦位方程式の導出

(1.84) で  $w_0$  と温位  $\theta_0$  の間の関係が与えられ，さらに静水圧平衡の関係式 (1.82) で  $\theta_0$  と  $p_0$  の間の関係式が与えられた．したがって，これらを渦度方程式 (1.62) に考慮す

れば，渦度方程式は  $p_0$  に関する一本の閉じた方程式になる．このような一本の方程式の導出を行う．

(1.84) より

$$w_1 = -\frac{1}{S} \frac{D_0 \theta_0}{Dt}. \quad (1.89)$$

(1.62) の右辺に上式を代入する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w_1) &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{D_0 \theta_0}{Dt} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{D_0}{Dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \theta_0 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{S} \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta_0. \end{aligned}$$

ここで，温度風の関係式 (1.87), (1.88) を考慮すると上式の最終項はゼロになる．結局，

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w_1) = -\frac{1}{\rho_s} \frac{D_0}{Dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \theta_0 \right) \right\} \quad (1.90)$$

が得られる．この式を渦度方程式 (1.62) に代入すると，

$$\frac{D_0}{Dt} \left\{ \zeta_0 + \beta y + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \theta_0 \right) \right\} = 0 \quad (1.91)$$

が導かれる．Rossby 数  $\epsilon$  の最低次の圧力場  $p_0$  は速度場  $u_0, v_0$  との関係から流れ関数  $\psi$  とみなせるので，

$$\psi = p_0, \quad (1.92)$$

(1.91) は (1.50), (1.51), (1.82) を用いて

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \nabla^2 \psi + \beta y + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} = 0 \quad (1.93)$$

となる．この方程式が準地衡流渦位方程式と呼ばれるもので，断熱過程，非粘性状態では準地衡流渦位

$$q = \nabla^2 \psi + \beta y + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (1.94)$$

が地衡流に流され流されながら保存することを表している．

一般に，流体方程式系では Lagrange 的に保存するスカラー量  $\theta_*$ ,  $(\frac{d}{dt_*} \theta_* = 0)$  と渦度と密度によって作られる物理量

$$\Pi_* \equiv \frac{(\nabla_* \times \mathbf{v}_*) \cdot \nabla_* \theta_*}{\rho_*} \quad (1.95)$$

が断熱・非粘性過程において Lagrange 的に保存する． $\Pi_*$  は Ertel の渦位と呼ばれる．Ertel の渦位の保存則

$$\frac{D\Pi_*}{Dt_*} = 0 \quad (1.96)$$

から Rossby 数  $\epsilon$  の漸近展開を行うことにより，準地衡流渦位方程式 (1.93) が導出できる．

静的安定性パラメータ  $S$  は以下のように 2 つの長さスケールの比としても表現することができる：

$$S^{1/2} = \frac{N_s D / f_0}{L} = \frac{L_D}{L}, \quad (1.97)$$

$$L_D = \frac{N_s D}{f_0}. \quad (1.98)$$

ここで  $L_D$  は Rossby の内部変形半径と呼ばれるものである． $L_D$  の意味は，これを以下のように書くとわかりやすい．

$$L_D = \frac{\sqrt{g'D}}{f_0}, \quad (1.99)$$

$$g' \equiv \frac{gD}{\theta_s} \frac{d\theta_s}{dz_*}. \quad (1.100)$$

$g'$  は重力加速度と同じ次元をもつが数値は異なる．これは reduced gravity と呼ばれる．深さ  $D$  の浅水方程式系における表面重力波の位相速度が

$$c = \sqrt{g'D} \quad (1.101)$$

で与えられるが，上記の  $\sqrt{g'D}$  は連続成層系のそれに相当するものである．一方， $f_0$  は慣性振動の振動数であり，したがって， $L_D$  は重力波の位相速度と慣性振動の振動数との比で与えられる．なお，浅水系では外部変形半径

$$R = \frac{\sqrt{g'D}}{f_0} \quad (1.102)$$

と呼ばれる系に特徴的な長さが存在する．

中緯度の総観規模の気象現象を記述するために適切な方程式系，準地衡流渦位方程式系，が導出されたので，引き続き節ではこの方程式を出発点として，中緯度で観測される大気擾乱，波動の物理的性質について議論していくことにする．



## 第2章

# 順圧・傾圧不安定理論

### 2.1 不安定問題の定式化

#### 2.1.1 流体力学的不安定問題

流体力学方程式の解のひとつである定常状態

$$(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}, t)) = (\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}), \bar{p}(\mathbf{r}), \bar{\rho}(\mathbf{r}))$$

の安定性を考える．この定常状態が安定であるか，不安定であるかを判断するには，定常状態に擾乱を加えて，この擾乱が成長するか減衰するかを調べることによって判断できる．より数学的には未知変数が

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t), \\ p(\mathbf{r}, t) &= \bar{p}(\mathbf{r}) + p'(\mathbf{r}, t), \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \bar{\rho}(\mathbf{r}) + \rho'(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

のように，場を定常状態と擾乱との和に分解し，擾乱成分に関する支配方程式をつくり，擾乱成分が時間とともに成長するか減衰するかを調べる．しかしながら，このようにして作った擾乱成分の支配方程式は，非線型方程式になり，理論的・数学的取り扱いが極めて困難である．そこで，擾乱の振幅は定常状態の値に比べてきわめて小さいと仮定し，問題を線形化する．そして擾乱を

$$(\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t), p'(\mathbf{r}, t), \rho'(\mathbf{r}, t)) = e^{\sigma t} (\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}), \tilde{p}(\mathbf{r}), \tilde{\rho}(\mathbf{r}))$$

と表現して線形化した擾乱の支配方程式に代入すると，固有値問題に帰着される．この固有値  $\sigma$  は一般には，複素数であるがその実部  $\sigma_r$  が擾乱の振幅の指数成長率を表しており， $\sigma_r > 0$  のとき，定常状態は擾乱に対して不安定であり， $\sigma_r < 0$  のとき，定常状態は擾乱に対して安定である．

### 2.1.2 準地衡流方程式系の場合

地球の中緯度では偏西風に代表されるように，西風が卓越しており，上空にいくにしたがって強くなっている．そこで，定常状態（以下では基本状態とよぶ）として東西風のみを考え，場を基本状態とそれからのずれに分解する：

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(y, z) + \psi'(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

$$u_0(\mathbf{r}, t) = U(y, z) + u'(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$v_0(\mathbf{r}, t) = v'(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad (2.3)$$

$$w_1(\mathbf{r}, t) = w'(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

$$q(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\nabla^2 \Psi + \beta y + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)}_{\Pi} + \underbrace{\nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)}_{q'}, \quad (2.5)$$

$$= \Pi(y, z) + q'(\mathbf{r}, t), \quad (2.6)$$

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \Theta(y, z) + \theta(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial z} \quad (2.7)$$

このとき，準地衡流渦位方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) (\Pi + q') = 0 \quad (2.8)$$

であり，擾乱の渦位  $q'$  の支配方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + v' \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \left( u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) q' = 0 \quad (2.9)$$

で与えられる．ここで，第3項  $\left( u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) q'$  が非線形項であり，したがって，線形化された準地衡流渦位方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + v' \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0,$$

もしくは

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right\} + v' \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

と書ける．



(2.10) を解くために、境界条件として以下のようなものを設定する．東西 ( $x$ ) 方向は周期的であるとする．南北 ( $y$ ) 方向には  $y = \pm 1$  に剛体壁があるものと仮定する． $y = \pm 1$  では壁を貫く流れは存在し得ないので、

$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = \pm 1 \quad (2.11)$$

である．\*1 このように東西方向が周期的、南北方向に壁があるような状況設定は、地球流体で代表的なもののひとつであり、水路問題 (channel flow problem) と呼ばれている．また、鉛直 ( $z$ ) 方向は  $z = 0, 1$  にやはり剛体壁があるものと仮定して

$$w' = 0, \quad \text{at } z = 0, 1 \quad (2.13)$$

である．ここで、熱力学方程式 (1.84) と上記の条件を組み合わせると

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta_0 = 0, \quad \text{at } z = 0, 1.$$

さらに (1.82), (1.92) より

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) = 0, \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (2.14)$$

となる．上式を線形近似すると

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (2.15)$$

$z = 0$  における剛体壁の存在は地面に相当するが、 $z = 1$  に存在する剛体壁はかなり恣意的に感じるかもしれない．しかしながら、高低気圧は対流圏に特徴的な現象であることが知られており、さらに対流圏界面では大気の鉛直運動が強く抑制されることが知られているので、したがってこのような現実との対応から  $z = 1$  の剛体壁はそれほど非現実的ではない．

なお東西方向の運動方程式 (1.57) を東西方向に平均すると、周期的境界条件から  $x$  に関する微分が消去される．さらに結果として得られた式を  $y = \pm 1$  に対して適用すると、(2.11) から結局

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \text{at } y = \pm 1 \quad (2.16)$$

が得られる．ここで、 $\bar{u}_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_0 dx$  である．

\*1 (2.11) 式を  $x$  について積分すると、 $\psi' = \text{const}$  が得られるが、流れ関数は微分することにより速度場と結びつくので、定数分の不定さ (下駄) がある．ここではこの定数分の下駄をゼロと置く．すなわち

$$\psi'(y = \pm 1) = 0 \quad (2.12)$$

## 2.2 擾乱の構造：エネルギー論

シアー流中に存在する不安定擾乱の空間構造について，エネルギー論的に考察してみる．

(2.10) に  $\rho_s \psi'$  をかけて全空間で積分を行う．

$$\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \psi' \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right\} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right] = 0. \quad (2.17)$$

この式の各項は部分積分を用いて，以下のように変形される．ここで  $\rho_s$ ,  $S$  は  $z$  のみの関数， $\Pi$  は  $y, z$  のみに依存することに注意．

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}}_{x \text{ について部分積分}} &= \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \left[ \rho_s \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right]_{-L}^L}_{x \text{ 方向の周期性より } 0} \\ &\quad - \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 \\ &= - \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2}}_{y \text{ について部分積分}} &= \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_0^1 dz \left[ \rho_s \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right]_{-1}^1}_{\psi'(y = \pm 1) = 0 \text{ より } 0} \\ &\quad - \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 \\ &= - \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)}_{z \text{ について部分積分}} &= \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \left[ \psi' \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right]_0^1}_{z \text{ の境界条件を考慮}} \\ &\quad - \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

上式右辺第 1 項は (2.15) より

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \left[ \psi' \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right]_0^1 &= \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \left[ \psi' \frac{\rho_s}{S} \left\{ -U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \right]_0^1 \\
&= \underbrace{- \int_{-1}^1 dy \left[ \psi' \frac{\rho_s}{S} \left\{ -U \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right\} \right]_{y=0}^1}_{x \text{ 方向の周期性より } 0} \Big|_{x=-L}^L \\
&\quad + \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \left[ \frac{\rho_s}{S} U \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right]_0^1}_{\dagger} \\
&\quad + \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \left[ \frac{\rho_s}{2S} \frac{\partial \psi'^2}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \right]_0^1}_{x \text{ 方向の周期性より } 0} \tag{2.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \psi' U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}}_{x \text{ について部分積分}} &= \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \left[ \rho_s \psi' U \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \right]_{-L}^L}_{x \text{ 方向の周期性より } 0} \\
&\quad - \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \left[ \frac{1}{2} \rho_s U \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 \right]_{-L}^L}_{x \text{ 方向の周期性より } 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \psi' U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2}}_{x \text{ について部分積分}} &= \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \left[ \rho_s \psi' U \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} \right]_{-L}^L}_{x \text{ 方向の周期性より } 0} \\
&\quad - \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s U \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2}}_{y \text{ について部分積分}} \\
&= \underbrace{- \int_{-L}^L dx \int_0^1 dz \left[ \rho_s U \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right]_{-1}^1}_{y \text{ 方向の境界条件より } 0} \\
&\quad + \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \\
&\quad + \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2}_{x \text{ の周期性より } 0} \\
&= \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y}. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \psi' U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)}_{x \text{ について部分積分}} &= \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \left[ \psi' U \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right]_{-L}^L}_{x \text{ の周期性より } 0} \\
&\quad - \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz U \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)}_{z \text{ について部分積分}} \\
&= - \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \left[ U \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right]_0^1}_{\dagger} \\
&\quad + \int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \\
&\quad + \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} U \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2}_{x \text{ 方向の周期性より } 0}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= \underbrace{\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial \psi'^2}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial y}}_{x \text{ の周期性を考慮すると } 0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

上式をまとめると

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \frac{\rho_s}{S} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2 \right\} &= \\
\int_{-L}^L dx \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left( \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} + \frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) &\tag{2.25}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \rho_s v'^2 = \frac{1}{2} \rho_s \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2$ ,  $\frac{1}{2} \rho_s u'^2 = \frac{1}{2} \rho_s \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2$  なので, (2.25) の左辺は擾乱のエネルギーの時間微分を表している.  $\frac{\rho_s}{2S} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2$  の項は有効位置エネルギーと呼ばれる. 東西平均値を上付きの bar で表すことにすると, (2.25) は

$$E' = \int_0^1 dz \int_{-1}^1 dy \frac{1}{2} \rho_s \overline{\left\{ \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{S} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2 \right\}}, \tag{2.26}$$

$$\frac{dE'}{dt} = \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \frac{\partial U}{\partial y} \overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y}} + \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial U}{\partial z} \overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z}} \tag{2.27}$$

と表現できる. (2.27) の右辺第1項は順圧項, 第2項は傾圧項と呼ばれ, 地衡流の関係式 (1.50), (1.51), 静力学平衡の式 (1.82), 温度風の関係式 (1.88) を用いると以下のように変

形できる．

$$\frac{dE'}{dt} = - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \frac{\partial U}{\partial y} \overline{u'v'} - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \overline{v'\theta'} \quad (2.28)$$

ここで擾乱のエネルギーの発展に寄与する各項（順圧項，傾圧項）の意味を考える．

順圧項の意味：  $\frac{\partial U}{\partial y} > 0$  の場合を考える．このとき，発達する擾乱では  $\overline{u'v'} < 0$  でなければならない． $\overline{u'v'}$  は Jacobian を用いると，

$$\begin{aligned} \overline{u'v'} &= - \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)_y \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)_x = - \frac{\partial(\psi', y)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(\psi', x)}{\partial(y, x)} \\ &= - \frac{\partial(\psi', y)}{\partial(x, y)} \left\{ \frac{\partial(\psi', x)}{\partial(y, x)} \right\}^2 \frac{\partial(y, x)}{\partial(\psi', x)} = \frac{\partial(y, \psi')}{\partial(x, \psi')} \left\{ \frac{\partial(\psi', y)}{\partial(y, x)} \right\}^2 \\ &= \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\psi'} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

と変形できるので， $u'v' < 0$  は  $\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\psi'} < 0$  を意味する．すなわち，発達する擾乱は  $\psi'$  の位相の傾きが  $U$  の傾きと逆向きでなければならない．

傾圧項の意味：  $\frac{\partial U}{\partial z} > 0$ ，もしくは  $\frac{\partial \Theta}{\partial y} < 0$  の場合を考える．このとき，発達する擾乱では  $\overline{v'\theta'} > 0$  でなければならない． $\overline{v'\theta'}$  は Jacobian を用いると，

$$\begin{aligned} \overline{v'\theta'} &= \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)_z \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)_x = \frac{\partial(\psi', z)}{\partial(x, z)} \frac{\partial(\psi', x)}{\partial(z, x)} \\ &= \left\{ \frac{\partial(\psi', x)}{\partial(z, x)} \right\}^2 \frac{\partial(z, x)}{\partial(\psi', x)} \frac{\partial(\psi, z)}{\partial(x, z)} = - \frac{\partial(z, \psi')}{\partial(x, \psi')} \left\{ \frac{\partial(\psi', x)}{\partial(z, x)} \right\}^2 \\ &= - \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi'} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 . \end{aligned}$$

つまり，発達する擾乱では  $\psi'$  の位相が上空ほど西に傾かなくてはならない．また， $v'\theta' > 0$  は高温の流体を北向きに低温の流体を南向きに輸送することを示している．

## 2.3 不安定のための必要条件

### 2.3.1 Charney–Stern の定理

(2.10), (2.15) を出発点として不安定が生じるような平均流の性質（条件）について議論する．

$x$  方向の境界条件から擾乱場を

$$\psi' = \hat{\Psi}(y, z) e^{ik(x-ct)} \quad (2.29)$$

と表現することにする．このような形の解は Normal mode 解と呼ばれている．ここで，

$$c = c_r + ic_i \quad (2.30)$$

である． $y$  方向の境界条件  $\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$  は， $\hat{\Psi}(\pm 1, z) = 0$  となる．

(2.10) に (2.29) を代入して整理すると，

$$(-ikc + ikU) \left\{ \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial y^2} - k^2 \hat{\Psi} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right) \right\} + ik \hat{\Psi} \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0. \quad (2.31)$$

同様に (2.15) に (2.29) を代入して整理すると，

$$(-ikc + ikU) \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} - ik \hat{\Psi} \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (2.32)$$

(2.31), (2.32) は固有値  $c$  に関する固有値問題である．ある特定の波数  $k$  に対して， $c_i > 0$  ならば，擾乱は成長し，基本状態は不安定である．ここでは，固有値問題を解かずに  $c_i > 0$  となるための基本状態の条件を求めてみる．

(2.31) に  $\{ik(U - c)\}^{-1} \rho_s \hat{\Psi}^*$  を乗じる：

$$\rho_s \hat{\Psi}^* \left\{ \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial y^2} - k^2 \hat{\Psi} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right) \right\} + \frac{\rho_s}{U - c} |\hat{\Psi}|^2 \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0.$$

この式を  $y, z$  について積分する．部分積分を行い，

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \left[ \rho_s \hat{\Psi}^* \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \right|^2 - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s k^2 |\hat{\Psi}|^2 \\ & \int_0^1 dy \left[ \frac{\rho_s}{S} \hat{\Psi}^* \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right]_0^1 - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\rho_s}{S} \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right|^2 + \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\rho_s |\Psi|^2}{U - c} \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

境界条件を考慮すると

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left\{ k^2 |\hat{\Psi}|^2 + \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{S} \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right|^2 \right\} = \\ & \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\rho_s |\Psi|^2}{|U - c|^2} (U - c)^* \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \int_{-1}^1 dy \left[ \frac{\rho_s |\Psi|^2}{S |U - c|^2} (U - c)^* \frac{\partial U}{\partial z} \right]_0^1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる．(2.33) の虚数部をとりだすと

$$c_i \left[ \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\rho_s |\Psi|^2}{|U - c|^2} \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial z} (\delta(z - 1) - \delta(z)) \right\} \right] = 0 \quad (2.34)$$

が得られる．(2.34) の非積分関数の一部分を以下のように定義する：

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial z} (\delta(z-1) - \delta(z)). \quad (2.35)$$

不安定波が存在するときには  $c_i \neq 0$  なので，したがって，(2.34) の積分がゼロでなければならない．非積分関数のうち， $\frac{\rho_s |\Psi|^2}{|U-c|^2}$  は正值なので，したがって積分がゼロになるためには (2.35) で定義された  $\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y}$  が流れの領域内で符号を変える必要がある．なお， $\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y}$  が流れの領域内で符号が変わっていても，流れは必ずしも不安定であるわけではない．流れが，不安定であれば，必ず  $\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y}$  が流れの領域内で符号を変える必要がある．これはもともと Charney & Stern (1962) によって導かれた定理の一般化されたもので，一般化された Charney–Stern の定理と呼ばれるもので，流れが不安定であるための必要条件である．original の Charney–Stern の定理は， $\frac{\partial U}{\partial z}$  が上下の境界で 0 になっている場合で，このときには不安定の必要条件は “ $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$  が流れの領域内で符号を変えること” となる．

### 2.3.2 Rayleigh-Kuo の定理

基本状態  $U$  が  $y$  のみの関数の場合，

$$\Pi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \beta y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \beta y \quad (2.36)$$

となるので，一般化された Charney–Stern の定理は “ $\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  が流れの領域内で符号を変えること” と表現される．この定理は Rayleigh–Kuo の定理と呼ばれるものである．さらに  $\beta = 0$  の場合には不安定の必要条件是，“ $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  が流れの領域内で 0 となるところがある” すなわち，“ $U$  が変曲点を持つこと” となる．この定理は Rayleigh (1880) によって与えられたもので，Rayleigh の変曲点定理と呼ばれている．

### 2.3.3 Fjørtoft の定理

上の議論では (2.33) の虚数部に関するものであった．(2.33) の実数部に関する議論をこの小節で紹介する．

不安定波が存在するときには，(2.33) の実数部および虚数部がそれぞれ 0 にならなければいけない．そこで，(2.33) の実数部を取り出すと，

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left\{ k^2 |\hat{\Psi}|^2 + \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{S} \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right|^2 - \frac{|\Psi|^2}{|U-c|^2} (U-c_r) \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y} \right\} = 0 \quad (2.37)$$

となる．いま，一般化された Charney–Stern の定理が成り立つ条件の下，即ち

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{\rho_s |\Psi|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y} = 0 \quad (2.38)$$

のもとで，(2.37) は

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left\{ k^2 |\hat{\Psi}|^2 + \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{S} \left| \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right|^2 - \frac{|\Psi|^2 U}{|U-c|^2} \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y} \right\} = 0 \quad (2.39)$$

となる．この積分が満足されるための必要条件は，流体内のどこかで

$$U \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y} > 0 \quad (2.40)$$

となる領域が存在することである．逆にもし流れが一般化された Charney–Stern の定理を満足するような性質を持っていたとしても，流体全層で

$$U \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y} \leq 0 \quad (2.41)$$

ならば (2.39) は満足されない．したがってこのような流れは中立安定でなければならない．

基本状態  $U$  が  $y$  のみの関数でなおかつ  $\beta = 0$  場合，上記の定理は，流れの領域内で “ $U \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \geq 0$  ならば，平行シア一流  $U(y)$  はノーマルモード型の摂動に対して安定である．” と言い換えられる．この定理は Fjørtoft (1950) によって与えられたもので，Fjørtoft の定理と呼ばれている．

## 2.4 Charney–Stern の定理の考察

前節で議論した Charney–Stern の定理は波の活動度 (wave activity) の保存則や擬運動量 (pseudo-momentum) 保存則と関係している．本節ではこの点について議論する．

### 2.4.1 wave activity とその保存則

平均流  $U(y, z)$  の周りに線形化された準地衡流渦位方程式 (2.10) に  $\rho_s q' / \frac{\partial \Pi}{\partial y}$  を乗じると，

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\rho_s q'^2}{2 \frac{\partial \Pi}{\partial y}} + \rho_s v' q' = 0, \quad (2.42)$$



を得る．(2.42) の左辺第 2 項の擾乱の渦度フラックス  $q'v'$  は流れ関数  $\psi'$  を用いて以下のように表現できる：

$$\begin{aligned}\rho_s q'v' &= \rho_s \left\{ \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right\} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \rho_s \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_s \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{S} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho_s \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right\}\end{aligned}\quad (2.43)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \rho_s \left( v'^2 - u'^2 - \frac{1}{S} \theta'^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \{ -\rho_s u'v' \} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\rho_s}{S} v'\theta' \right\}.\quad (2.44)$$

上の式は渦度フラックス  $q'v'$  はある物理量の発散で表現できることを示している．(2.42) を帯状平均し，(2.44) を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0,\quad (2.45)$$

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{\rho_s q'^2}}{2 \frac{\partial \Pi}{\partial y}},\quad (2.46)$$

$$\vec{\mathcal{F}} = \{ -\rho_s \overline{u'v'} \} \mathbf{j} + \left\{ \frac{\rho_s}{S} \overline{v'\theta'} \right\} \mathbf{k},\quad (2.47)$$

を得る．(2.45) は物理量  $\mathcal{A}$  が flux 形式の保存則を満たすことを示している． $\mathcal{A}$  は波の渦位の 2 次に比例し，また平均流の渦位勾配にも関係した量で wave activity と呼ばれる．

## 2.4.2 波と平均流の相互作用

安定性の問題では，基本流（平均流）は定常であると仮定していた．この仮定をここでは緩めて，平均流とそれからのズレ（擾乱，波）とがどのように相互作用するのかを眺めて見る．

準地衡流近似，非散逸仮定のもと東西方向の運動方程式 (1.57) を帯状平均すると，

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}v) = 0\quad (2.48)$$

となる．ここで，Rossby 数の 0 次を示す添え字 0 は省いた．流れ場が帯状平均流とそれからのズレ

$$\mathbf{u} = U(y, z, t) \mathbf{i} + \mathbf{u}'\quad (2.49)$$

と表現できるとき，帯状平均された東西方向の運動量の発展は

$$\frac{\partial \rho_s U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_s \overline{u'v'}) = 0\quad (2.50)$$

で与えられる。(2.50) は東西平均流の変化は波の振幅の 2 乗に比例することを示している。従って、線形論(波の振幅の 2 次以上のオーダーを無視する)が成り立つ範囲では、平均流は時間変化しない。

ここで、順圧大気 ( $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ) を考える。このとき、wave activity の式 (2.45) は

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} (\rho_s \overline{u'v'}) = 0 \quad (2.51)$$

とかけるので、これと (2.50) から

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s U + A) = 0 \quad (2.52)$$

が導かれる。この式は平均流  $U$  が加速されるためには、wave activity  $A$  が減少しなければならないことを示しており、 $-A$  が運動量の役割を果たしていることを示している。このことから、 $-A$  は擬運動量とも呼ばれる。定常な擾乱  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$  では平均流を加速しないことが (2.52) からわかる。これを非加速定理 (nonacceleration theorem) とする。

[注意] (2.52) の導出には、平均流が時間変化していない場合に導かれた wave activity の式 (2.51) (もしくは、(2.45)) を用いた。しかしながら、今は平均流が時間変化している場合の考察しているので、この議論には矛盾があるように思われる。平均流  $U$  が時間変化する場合には、wave activity の式は、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{q'^2}{(\frac{\partial \Pi}{\partial y})^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial y}}_{\dagger} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0 \quad (2.53)$$

と書ける。つまり  $\dagger$  の項が付け加わることになる。このとき、(2.52) は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s U + A) + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{q'^2}{(\frac{\partial \Pi}{\partial y})^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial y}}_{\dagger} = 0 \quad (2.54)$$

となるが、 $\dagger$  の項は擾乱の振幅の 4 次である。なぜならば  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial y}$  は (2.50) より擾乱の振幅の 2 次の項であるからである。したがって、擾乱の振幅の 2 次の項まで正しい近似において、 $\dagger$  の項は無視してよいことになる。もしくは、(2.52) は擾乱の振幅の 2 次のオーダーまで正しい式であるといえる。

## 2.4.3 Charney–Stern の定理の再考察

今，ある基準となる緯度 ( $y = y_0$ ) からの流体粒子の  $y$  方向の変位を  $\eta'$  で表す．南北方向の擾乱速度  $v' = \partial\psi'/\partial x$  と  $\eta'$  の関係は，

$$\begin{aligned} v' &= \frac{D\eta'}{Dt} \\ &\simeq \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta' \end{aligned} \quad (2.55)$$

で与えられる．最後の表式には，線形近似を用いた．(2.55) を  $U$  に関して線形化された準地衡流渦位方程式 (2.10) に代入すると，

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( q' + \eta' \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.56)$$

を得る．この式より， $U$  に沿って

$$q' = -\eta' \frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad (2.57)$$

が導かれる．一方，鉛直方向の線形化された境界条件 (2.15) に (2.55) を代入して整理すると，

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \eta' \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.58)$$

従って，流れ  $U$  に沿って

$$\theta' = \frac{\partial \psi'}{\partial z} = \eta' \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.59)$$

が成り立つ．

wave activity  $\mathcal{A}$  は (2.57) を用いて  $\eta'$  で表現すると，

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial \Pi}{\partial y} \overline{\eta'^2} \quad (2.60)$$

となる．(2.45) ~ (2.47) より wave activity が満足する方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial \Pi}{\partial y} \overline{\eta'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \overline{v'\theta'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_s \overline{u'v'} \right) \quad (2.61)$$

である．(2.61) を (2.50) に代入し  $y, z$  についてそれぞれ  $-1 < y < 1, 0 < z < 1$  の範囲で積分し，境界条件を使うと，

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \left\{ \rho_s \overline{U} + \frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial \Pi}{\partial y} \overline{\eta'^2} \right\} + \int_{-1}^1 dy \frac{\rho_s}{S} \overline{v'\theta'} \Big|_0^1 = 0. \quad (2.62)$$

左辺第 2 項に (2.55) と (2.59) を用いると,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dy \frac{\rho_s}{S} \overline{v'\theta'} \Big|_0^1 &= \int_{-1}^1 dy \frac{\rho_s}{S} \overline{\eta' \frac{\partial U}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta'} \Big|_0^1 \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{S} \overline{\eta'^2} \frac{\partial U}{\partial z} \{ \delta(z-1) - \delta(z) \}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

従って, (2.62) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s U + \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \underbrace{\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial z} (\delta(z-1) - \delta(z)) \right\}}_{= \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial y}} \overline{\eta'^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

とかける. (2.64) は (2.52) の一般化された形である.

(2.64) は線形論が適用できるという仮定のもと ( $U$  が定常という仮定の下),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{2} \rho_s \underbrace{\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial z} (\delta(z-1) - \delta(z)) \right\}}_{= \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial y}} \overline{\eta'^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

に縮約される. 前小節の議論より (2.64) もしくは (2.65) は擬運動量保存の式とみなすことができる. もし不安定が起きる場合, 即ち  $\eta'^2$  が時間と共に増大する場合にこの式が成り立つためには,  $\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial y}$  が流れの領域内で流れの領域内で符号を変えなければいけない. 即ち, 一般化された Charney-Stern の定理が導かれる. このように, 一般化された Charney-Stern の定理の定理は擬運動量の保存則の言い換えとみなすことができる.

なお, Fjørtoft の定理は擬エネルギー保存則の観点から導くことができる. その詳細については Swaters の *An Introduction to Hamilton Fluid Dynamics* を参照のこと.

## 2.5 傾圧不安定の物理的機構: パーセル法

## 2.6 Eady 問題

本節では, Eady 問題として知られている, 特定の基本流の安定性について議論を行う. Eady 問題は, Eady(1949) によって提出されたもので, Charney 問題 (Charney, 1947)

と並んで傾圧不安定に関して初めて流体力学的な記述を行った研究である。<sup>\*2</sup>

Eady 問題では、以下の様な仮定のもとでの傾圧不安定を論じたものである。

- $\beta$  効果を無視する。即ち、流体は  $f$  平面上で運動しているものとする。
- Brunt-Vaisalla 振動数  $N$ , もしくは静的安定性パラメター  $S$  は一定であるとする。また、密度  $\rho_s$  も一定とみなす。密度  $\rho_s$  を完全に一定と考えると、密度の鉛直勾配に関係した静的安定性パラメター  $S$  はゼロになってしまう。  $S$  の計算では  $\rho_s$  は高度  $z$  の関数と考え、支配方程式に陽に現れた  $\rho_s$  は一定とおく。これは、いわゆる Boussinesq 近似を行っていることに相当する。
- 基本流  $U$  は  $z$  のみの関数で、一様なシアーをもつ；

$$U = \Lambda z \quad (2.66)$$

- $x$  方向には周期的,  $y = \pm 1$  には剛体壁があるとする。さらに  $z = 0, 1$  にも平らな剛体壁が存在するものと仮定する。

以上の仮定のもと、基本流  $U$  の周りに線形化された準地衡流渦位方程式を議論の出発点とする。基本流の流れ関数は、(2.66) より

$$\Psi = -\Lambda y z \quad (2.67)$$

で与えられる。基本場の準地衡流渦位は

$$\Pi = \nabla^2 \Psi + \beta y + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.68)$$

である。従って、 $\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0$  なので、Charney-Stern の定理によれば、Eady 問題で不安定がおきるためには、 $z = 0, 1$  の境界における  $\frac{\partial U}{\partial z}$  が同符号であることが要請される。実際に (2.66) はこの条件を満足している。

現在の問題設定のもと、基本流の周りに線形化された準地衡流渦位方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z \frac{\partial}{\partial x} \right) q' = 0, \quad (2.69a)$$

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \quad (2.69b)$$

である。 $x$  方向に周期的であること、 $y$  方向の境界条件 ( $\psi'(y = \pm 1) = 0$ ) から、流れ関

<sup>\*2</sup> Charney (1947), Eady (1949) の研究は彼らの学位論文であること、また Charney や Eady が気象学にどのように貢献したかなど、Vallis のテキスト 'Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics'. (Cambridge University Press, 2006) に書いてある。興味のある人は参照してほしい。

数を

$$\psi' = \Re \left[ \hat{\psi}(z) \cos ly \exp \{ ik(x - ct) \} \right] \quad (2.70a)$$

$$l = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (2.70b)$$

とおく.  $c$  は一般に複素数で, その実部  $c_r = \Re(c)$  は波の位相速度, 虚数部  $c_i$ , ( $c_i = \Im(c)$ ) と  $x$  方向の波数  $k$  の積  $kc_i$  は成長率である. (2.70) を (2.69) に代入すると

$$(\Lambda z - c) \left\{ \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - (k^2 + l^2) S \hat{\psi} \right\} = 0 \quad (2.71)$$

を得る.  $U - c = \Lambda z - c \neq 0$  のとき, (2.71) は

$$\frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - (k^2 + l^2) S \hat{\psi} = 0 \quad (2.72)$$

に縮約される. (2.72) の一般解は

$$\hat{\psi} = A \cosh \mu z + B \sinh \mu z \quad (2.73a)$$

$$\mu \equiv \sqrt{(k^2 + l^2) S} \quad (2.73b)$$

である.

$z = 0, 1$  における境界条件 (2.15) に (2.70) を代入して

$$(\Lambda z - c) \frac{d\hat{\psi}}{dz} - \Lambda \hat{\psi} = 0, \quad \text{at } z = 0, 1 \quad (2.74)$$

を得る. さらに, (2.74) に (2.73) を代入すると,

$$(\Lambda z - c) \mu (A \sinh \mu z + B \cosh \mu z) - \Lambda (A \cosh \mu z + B \sinh \mu z) = 0, \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (2.75)$$

従って,  $z = 0, 1$  についてそれぞれ

$$\Lambda A + c\mu B = 0, \quad (2.76a)$$

$$\{(\Lambda - c)\mu \sinh \mu - \Lambda \cosh \mu\} A + \{(\Lambda - c)\mu \cosh \mu - \Lambda \sinh \mu\} B = 0, \quad (2.76b)$$

となる. (2.76) は行列の形

$$\begin{pmatrix} \Lambda & c\mu \\ (\Lambda - c)\mu \sinh \mu - \Lambda \cosh \mu & (\Lambda - c)\mu \cosh \mu - \Lambda \sinh \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (2.77)$$

に書けて,  $A, B$  が非自明な解を持つためには (2.77) の係数行列の行列式がゼロでなければならない. この条件は,

$$c^2 - \Lambda c + \frac{\Lambda^2}{\mu^2} (\mu \coth \mu - 1) = 0 \quad (2.78)$$

によって与えられる。(2.78) は  $c$  の 2 次方程式なので解の公式を利用して  $c$  を求めると,

$$\begin{aligned} c &= \frac{\Lambda}{2} \left\{ 1 \pm \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \mu \coth \mu + 1} \right\} \\ &= \frac{\Lambda}{2} \left\{ 1 \pm \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu}{2} (\tanh \frac{\mu}{2} + \coth \frac{\mu}{2}) + 1} \right\} \\ &= \frac{\Lambda}{2} \left\{ 1 \pm \frac{2}{\mu} \sqrt{(\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2})(\frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2})} \right\} \end{aligned} \quad (2.79)$$

が得られる。<sup>\*3</sup>  $\mu/2 \geq 0$  に対して  $\mu/2 - \tanh \mu/2 \geq 0$  なので (図 2.1 参照),  $c$  が虚数部をもつための条件は,  $\mu$  が

$$\frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2} < 0 \quad (2.80)$$

を満足する場合である。(2.80) が満足される  $\mu$  の範囲は

$$0 < \mu < \mu_c \approx 2.399, \quad (2.81)$$

$$\mu_c = 2 \coth \frac{\mu_c}{2} \quad (2.82)$$

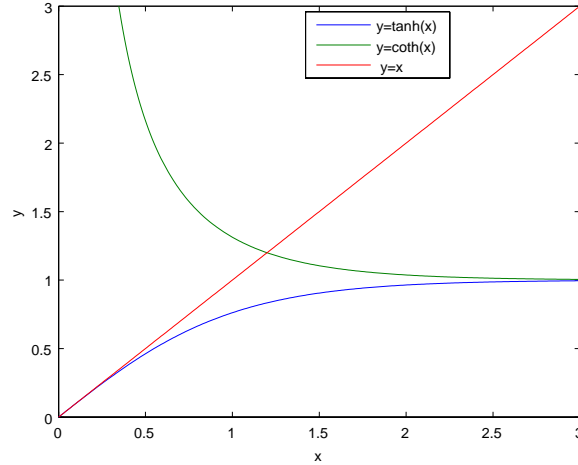


図 2.1  $y = x$ ,  $y = \tanh(x)$ ,  $y = \coth(x)$  のグラフ

で与えられる。<sup>\*4</sup> 固有値  $c$  の  $\mu$  依存性を図 2.2 に示す

<sup>\*3</sup> 双曲線関数の幾つかの公式を列挙しておく

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x + \coth x = 2 \coth 2x$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

<sup>\*4</sup>  $x = \coth x$  を満足する  $x$  を求めるには例えば以下のような Newton 法を用いるとよい。

Newton 法とは  $x$  の非線形関数  $f(x)$  の  $f(x^*) = 0$  を満足する根  $x^*$  を Taylor 展開に基づいて求める方法である。根については適当な推定があるものと仮定する。その推定値を  $x_1$  とする。このときの誤差は  $\delta x = x_1 - x^*$  と書ける。従って、 $f(x^*)$  の Taylor 展開は

$$f(x^*) = f(x_1 - \delta x) = f(x_1) - f'(x_1)\delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) = 0$$

となる。この式を  $\delta x$  に関して解くと

$$\delta x = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + \mathcal{O}(\delta x^2).$$

$\mathcal{O}(\delta x^2)$  を無視して (この項は打ち切り誤差になる), 最初の推定値を

$$x_2 = x_1 - \delta x = x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

と修正する。これを  $n$  回繰り返すことにより,

$$x^* \approx x_n + 1 = x_n + \frac{f(x_1)}{f'(x_n)}.$$

を得る。

例えば, 初期値として 1 を選び, 30 回繰り返すと,  $x - \coth x = 0$  の根の推定位置として  $x = 1.1997$  を得る。



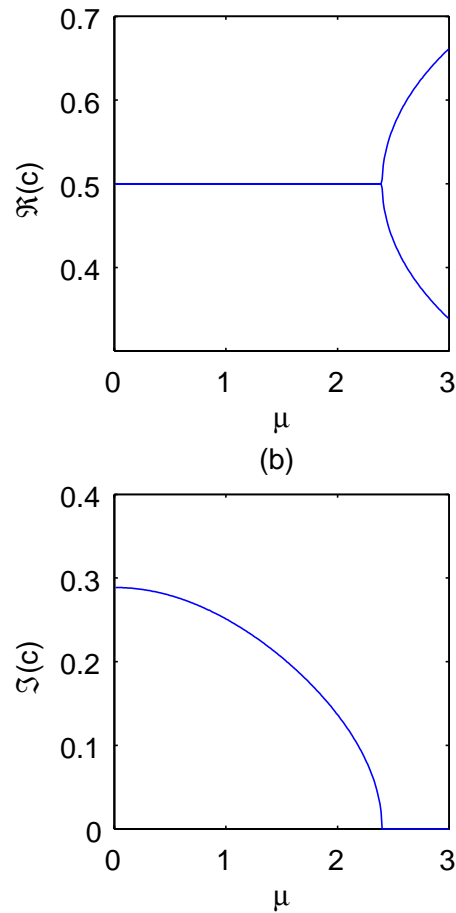


図 2.2 固有値  $c$  の  $\mu$  依存性．上段： $c$  の実数部．下段： $c$  の虚数部

一方，成長率

$$kc_i = k \frac{\Lambda}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2}\right) \left(\coth \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2}\right)} \quad (2.83)$$

は波数  $k, l$  に依存する．現在の問題設定では，東西方向には周期的，南北方向には壁があるという状況設定を考えているので， $k, l$  として許される値は本当は離散的な値であるが， $k, l$  をとりあえず連続的な変数とみなして成長率の波数依存性を眺めてみると，ある  $k$  の値に対して， $l$  が小さいほど成長率は大きくなる傾向があることがわかる．(図 2.3 参照)．そこで， $l = \pi/2$  ととり，成長率の  $k$  依存性を 2.4 に示した． $k = 1.248$  の時，成長率が最大値 0.1691 となる．

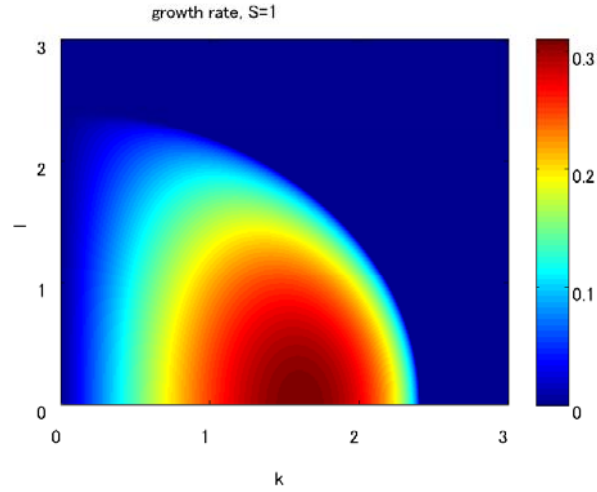


図 2.3 成長率  $k\Im(c)$  の波数依存性 . ( $S = 1$  の場合 .)

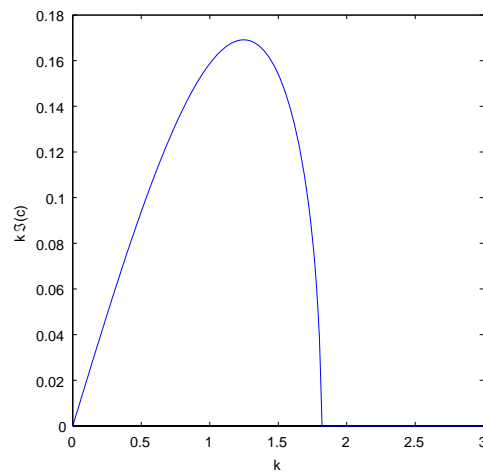


図 2.4 成長率  $k\Im(c)$  の  $k$  依存性 . ( $l = \pi/2, S = 1$  の場合 .)

ある与えられた  $c$  の値 (固有値) に対して, 固有関数が定まる . (2.76a) より

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{\Lambda}{c\mu} A \\
 &= -\frac{\Lambda}{|c|^2\mu} (c_r - ic_i) A.
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

と表現できるので，定数  $A$  の不定性を除いて\*5  $\hat{\psi}$  は

$$\hat{\psi}(z) = \cosh \mu z - \frac{\Lambda c_r}{\mu |c|^2} \sinh \mu z + i \frac{\Lambda c_i}{\mu |c|^2} \sinh \mu z, \quad (2.85)$$

または，振幅  $|\hat{\psi}(z)|$ ，位相  $\alpha(z)$  を用いて表すと

$$\hat{\psi}(z) = |\hat{\psi}(z)| e^{i\alpha(z)}, \quad (2.86a)$$

$$|\hat{\psi}(z)| = \sqrt{\cosh^2 \mu z - \frac{\Lambda c_r}{\mu |c|^2} \sinh 2\mu z + \frac{\Lambda^2}{\mu^2 |c|^2} \sinh^2 \mu z} \quad (2.86b)$$

$$\alpha(z) = \tan^{-1} \frac{\Lambda c_i \sinh \mu z}{\mu |c|^2 \cosh \mu z - \Lambda c_r \sinh \mu z}, \quad (2.86c)$$

となる．(2.85) もしくは (2.86) を用いて，擾乱の流れ関数は

$$\psi'(x, y, z) = \Re \left[ \left( \cosh \mu z - \frac{\Lambda c_r}{\mu |c|^2} \sinh \mu z + i \frac{\Lambda c_i}{\mu |c|^2} \sinh \mu z \right) \cos ly \exp\{ik(x - ct)\} \right] \quad (2.87a)$$

$$= |\hat{\psi}(z)| \exp(kc_i t) \cos ly \cos\{k(x - c_r t) + \alpha(z)\} \quad (2.87b)$$

となる． $S = 1$  の場合の最大成長擾乱の流れ関数  $\psi'$  の振幅，位相の鉛直依存性を図 2.5 に示す．擾乱の流れ関数（擾乱の圧力場）の振幅は流れの領域の上下端で大きいことがわかる．また，位相は高度と共に増大する．これは，流れ関数の等位相線  $x = -\alpha(z)/k + \text{const}$  は高さと共に西に傾くことに相当する．

流れ関数が求められると，擾乱の温位  $\theta' = \partial\psi'/\partial z$ ，速度  $u' = -\partial\psi'/\partial y$ ， $v' = \partial\psi'/\partial x$  が計算できる．

温位  $\theta'$ ：

$$\theta'(x, y, z, t) = \Re \left[ \left( \mu \sinh \mu z - \frac{\Lambda c_r}{|c|^2} \cosh \mu z + i \frac{\Lambda c_i}{|c|^2} \cosh \mu z \right) \cos ly \exp\{ik(x - ct)\} \right] \quad (2.88a)$$

$$= |\hat{\theta}(z)| \cos ly \cos\{k(x - ct) + \alpha_\theta(z)\} \quad (2.88b)$$

$$|\hat{\theta}(z)| = \sqrt{\mu^2 \sinh^2 \mu z - \frac{\Lambda c_r \mu}{|c|^2} \sinh 2\mu z + \frac{\Lambda^2}{|c|^2} \cosh^2 \mu z} \quad (2.88c)$$

$$\alpha_\theta(z) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\Lambda c_i \cosh \mu z}{\mu |c|^2 \sinh \mu z - \Lambda c_r \cosh \mu z} \right\} \quad (2.88d)$$

\*5 Eady 問題は線形問題である．線形問題では，一般解の定数倍もまたその問題の一般解となる性質がある．

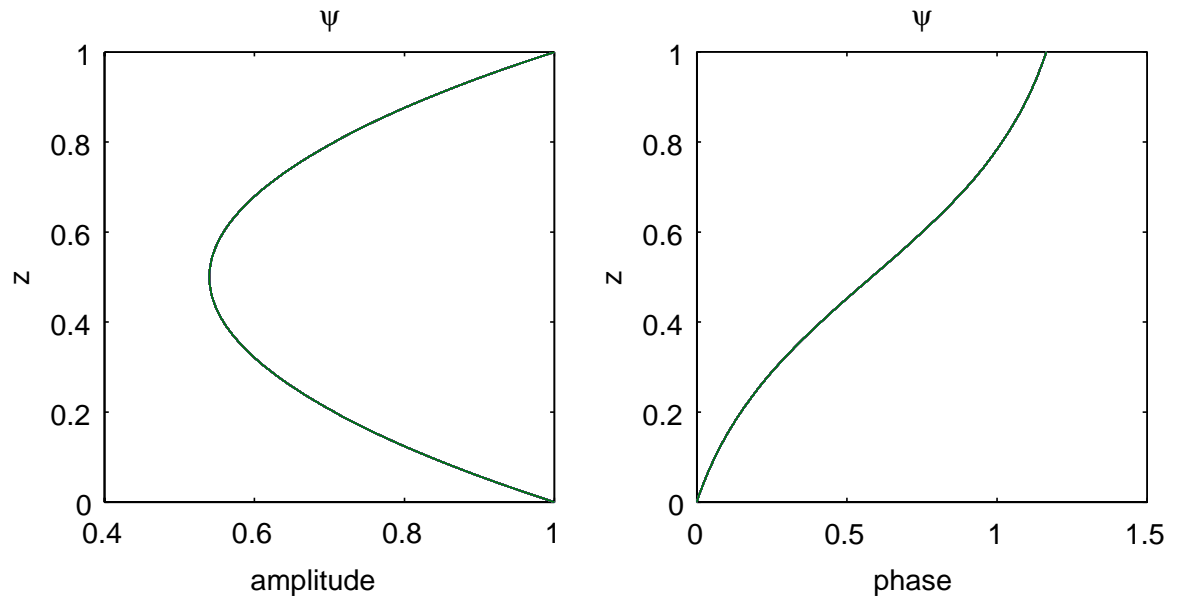


図 2.5 擾乱の流れ関数  $\psi'$  の振幅 (左図) と位相 (右図) の鉛直依存性 ( $k = 1.248, l = \pi/2, S = 1$  の場合.)

鉛直速度 :

$$\begin{aligned}
 w' &= -\frac{1}{S} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta' - \Lambda \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right\} \\
 &= \Re \left[ \frac{ik}{S} \{ (\Lambda z - c) \theta' + \Lambda \psi' \} \right] \quad (2.89a)
 \end{aligned}$$

温位, 鉛直速度の振幅および位相の鉛直構造をそれぞれ図 2.6, 2.7 に示す. 温位の振幅は上下端で大きく, 中層で最小である. また位相は高さと共に減少する. つまり, 温位の等位相線は圧力のそれとは異なり高さとともに東に傾く. 一方, 鉛直速度の振幅は境界条件より上下端でゼロで, 中層で最大となる. 位相は高さと共に西に傾く.

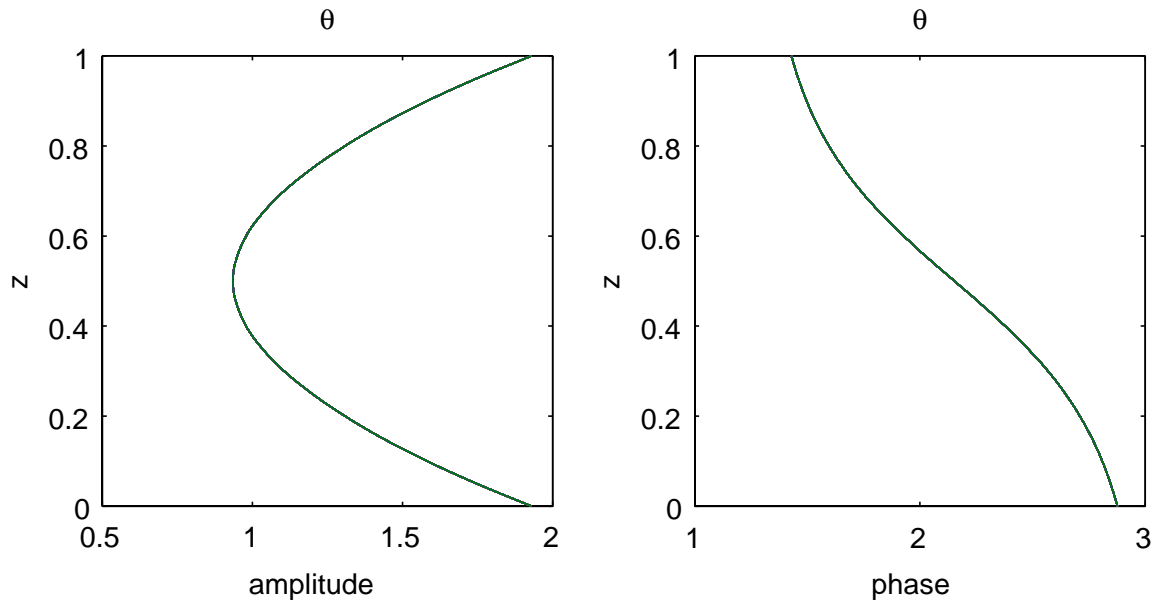


図 2.6 図 2.5 の擾乱に対応する温位  $\theta'$  の振幅 (左図) と位相 (右図) の鉛直依存性 ( $k = 1.248, l = \pi/2, S = 1$  の場合.)

図 2.8 の上段の図は流れ関数 (圧力) 場と温位場を, その下段の図は鉛直速度場と温位場をそれぞれ同時に表示している. 図 2.8 の上段の図から, 地上では低気圧の東側で温位偏差が正で, 一方上空では高気圧の西側で温位偏差は正になっている. また, 地衡流の関係を考慮すると, 温位偏差が正のところで擾乱に伴う北向きの風が, 温位偏差が負のところで南向きの風が吹いている. 従って, 東西方向に平均すると  $\overline{v'\theta'} > 0$  となることを示しており, この構造は熱を北向きに輸送していることを示している. 図 2.8 の下段の図から, 不安定波に伴う鉛直流が上昇流の領域では温位偏差が正で, 下降流のところでは温位は負偏差になっている. 不安定擾乱に伴う子午面流と温位偏差の関係をまとめると表 2.1 のようになる. これは前節で説明した有効位置エネルギーを開放するセンスであることがわかる.

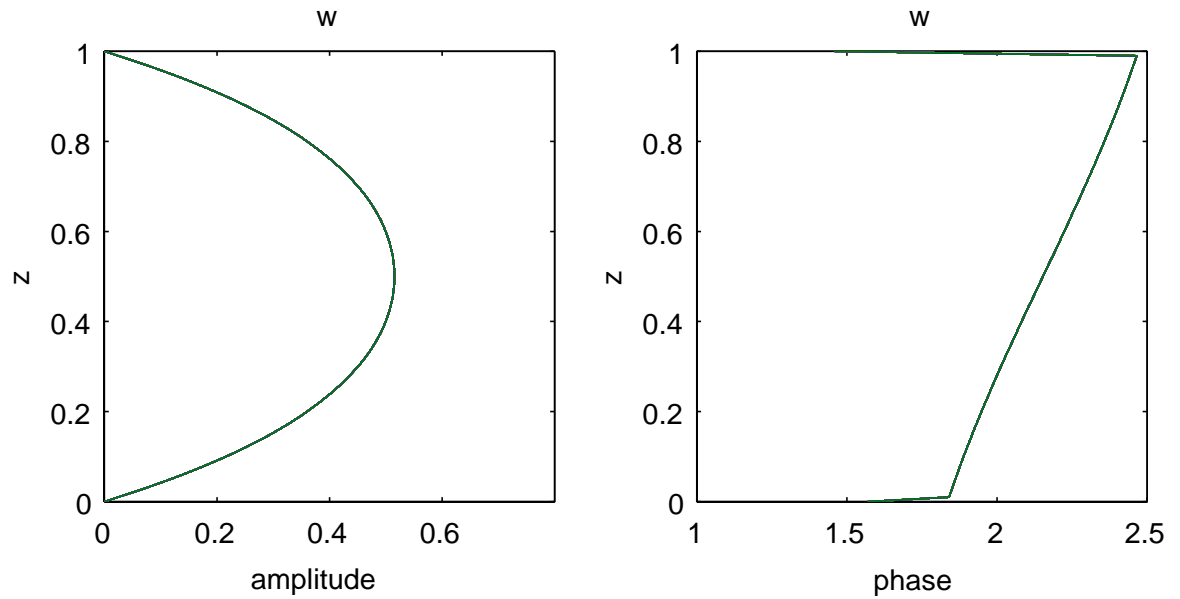


図 2.7 図 2.5 の擾乱に対応する鉛直速度  $w'$  の振幅（左図）と位相（右図）の鉛直依存性 ( $k = 1.248, l = \pi/2, S = 1$  の場合 .)

表 2.1 擾乱の伴う，子午面流と温位偏差の関係

南北流 $v'$	北向き (+)	南向き (-)
鉛直流 $w'$	上昇流 (+)	下降流 (-)
温位偏差 $\theta'$	暖 (+)	寒 (-)

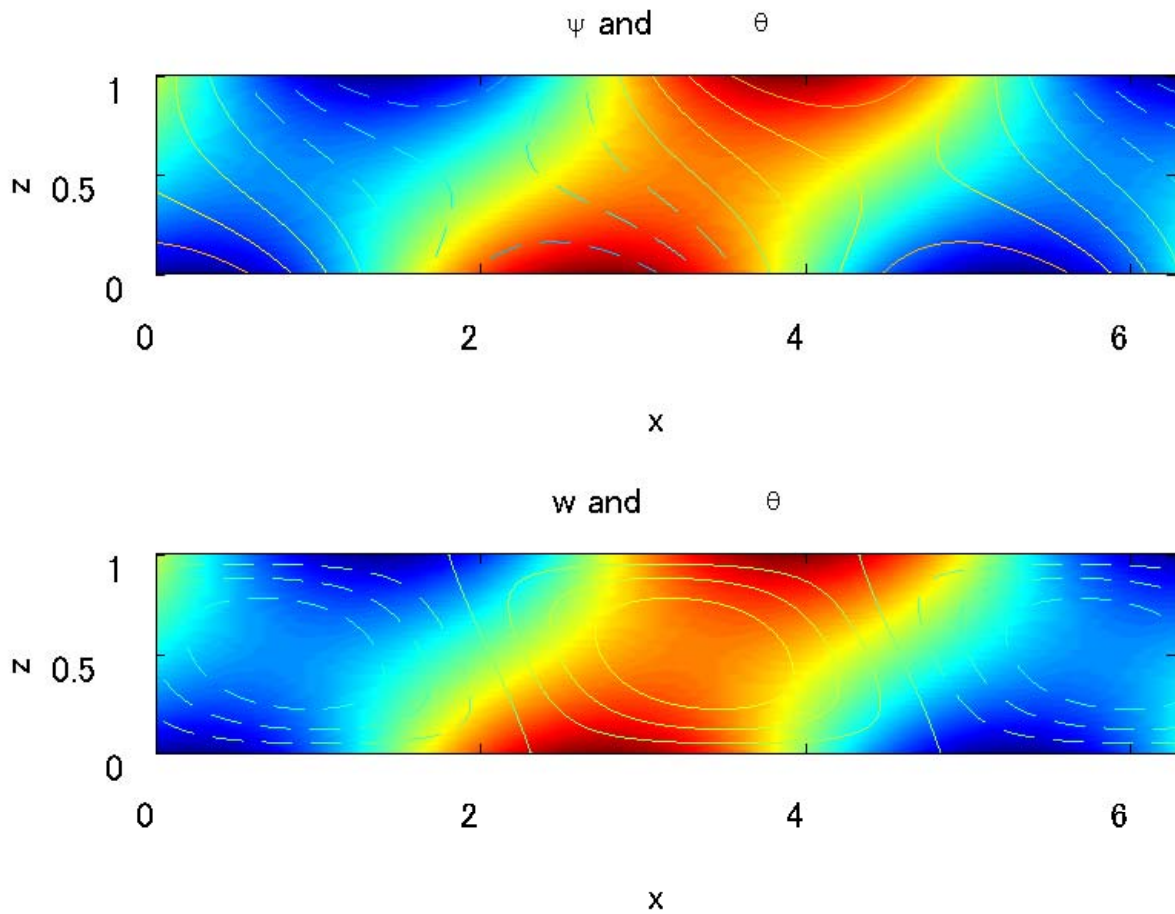


図 2.8  $S = 1$  の場合の最大成長擾乱の鉛直構造．上段：等値線は流れ関数（正偏差は実線，負偏差は点線）．カラーは温位（正偏差は暖色系，負偏差は寒色系）．下段：等値線は鉛直速度（正偏差は実線，負偏差は点線）．カラーは温位（正偏差は暖色系，負偏差は寒色系）（ $k = 1.248, l = \pi/2, S = 1$  の場合．）

不安定波が存在しない場合には， $c_i = 0$  なので，(2.86c), (2.88d) より流れ関数  $\psi'$ ,  $\theta'$  の位相は鉛直方向には変化せず，従って  $w'$  の位相も鉛直方向に変化しない． $S = 1, l = \pi/2, k = 2$  の場合の擾乱に伴う，流れ関数，温位，鉛直速度図 2.9 に示す．図 2.8 の場合とは異なり，北向き熱輸送の有効位置エネルギーの開放が起こらない構造であることがわかる．

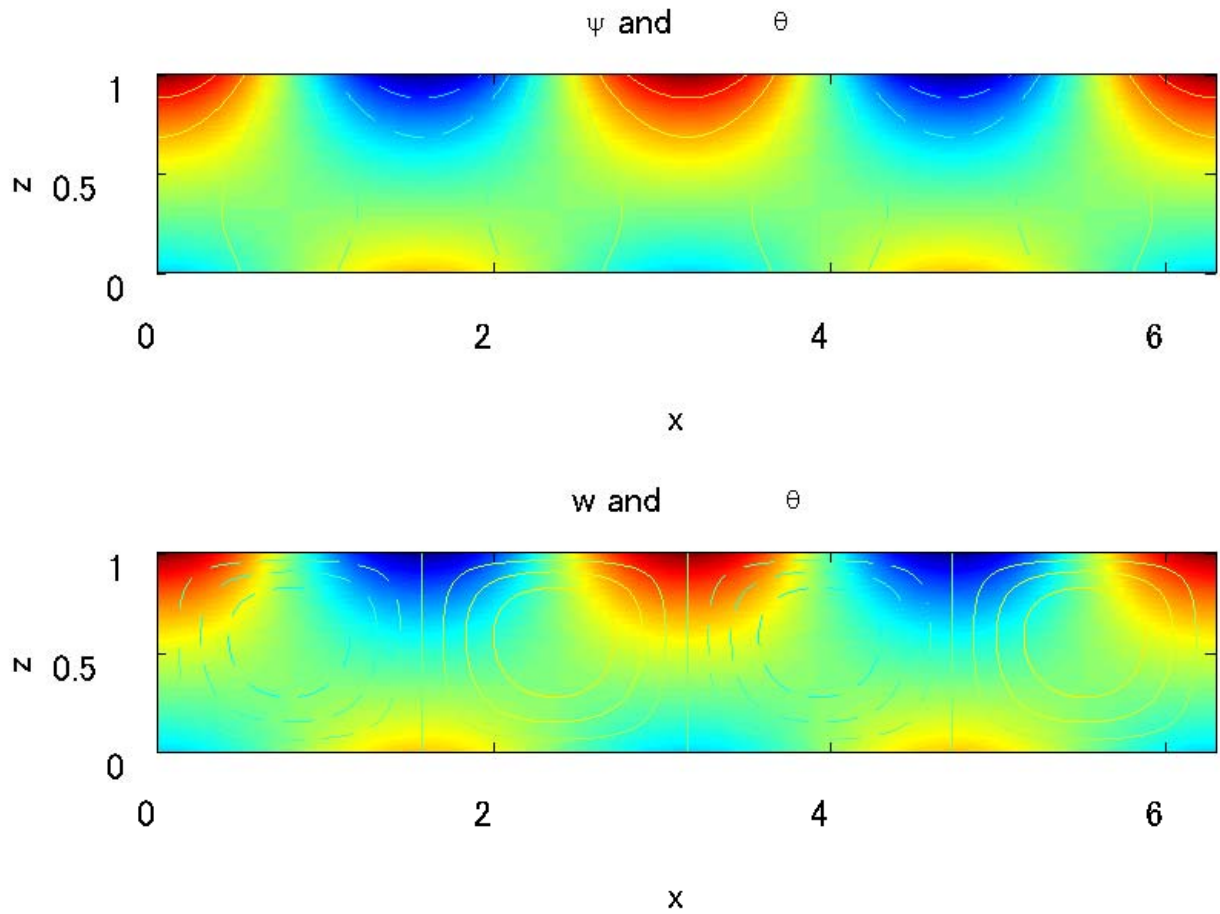


図 2.9 安定な擾乱の鉛直構造．上段：等値線は流れ関数（正偏差は実線，負偏差は点線）．カラーは温位（正偏差は暖色系，負偏差は寒色系）．下段：等値線は鉛直速度（正偏差は実線，負偏差は点線）．カラーは温位（正偏差は暖色系，負偏差は寒色系）（ $k = 2, l = \pi/2, S = 1$  の場合）