大気水圏科学特論 II

岩山隆寛[1]

平成 15 年度 神戸大学大学院自然科学研究科地球惑星科学専攻

[1]iwayama@kobe-u.ac.jp

第0章　ガイダンス

0.1　アウトライン

地球大気の中緯度の総観規模現象（synoptic scale phenomena）を流体力学に基づいて解説をする．先ず，総観規模現象を記述するために必要な方程式系（準地衡流渦位方程式）をスケーリングの議論を用いて系統的に導出する．引き続いて，東西平均流が鉛直シアーを持つ場合に，流体中に発達する擾乱の構造や必要条件，さらにモード解の議論を行う．

0.2　参考文献

- 高薮出，2000 温帯低気圧の力学，日本気象学会，気象研究ノート **198**, 154 pp.
- Holton, J. R. 1992 *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 3rd Edn. Academic Press.
- Pedlosky, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd Edn. Springer. (chap. 6 ∼7)

第1章　準地衡流渦位方程式

傾圧不安定論を議論するために必要な方程式系を系統的なスケーリングの議論によって導出する．

1.1　基礎方程式系

半径 a の球面上の流体方程式系を議論の出発点とする．この方程式系は，**連続の式**, **運動方程式**, **熱力学方程式**からなる．これらはそれぞれ以下のように表される：

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial(v\cos\phi)}{\partial\phi} + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r}\tan\phi - 2\Omega\sin\phi\, v + 2\Omega\cos\phi\, w = -\frac{1}{\rho r\cos\phi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \mathsf{K}_\lambda, \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r}\tan\phi + 2\Omega\sin\phi\, u = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\phi} + \mathsf{K}_\phi, \tag{1.3}$$

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} - \frac{u^2+v^2}{r} - 2\Omega\cos\phi\, u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g + \mathsf{K}_r, \tag{1.4}$$

$$\frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{D}t} = J. \tag{1.5}$$

ここで，ρ は密度，u, v, w は λ (経度)，ϕ（緯度）, r（動径）方向の流速，p は圧力，Ω は地球の自転角速度，$\mathbf{K} = (\mathsf{K}_\lambda, \mathsf{K}_\phi, \mathsf{K}_r)$ は単位質量あたりの流体に働く粘性力項である．$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ は Lagrange 微分で

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + w\frac{\partial}{\partial r}, \tag{1.6}$$

と表され，θ は温位で

$$\theta \equiv T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} \tag{1.7}$$

で定義される．ここで T は温度，p_0 はある基準となる圧力で，通常は $p_0 = 1000\,\mathrm{hPa}$ にとる．R は乾燥空気の気体定数で，$R = 287\,\mathrm{JK^{-1}kg^{-1}}$ である．$C_p = \frac{7}{2}R$ は定圧比熱．J は単位質量あたりの流体粒子に対する加熱率である．また，流体は理想気体でその状態方程式は

$$p = \rho RT \tag{1.8}$$

で与えられる．

以下では大気の運動が中緯度で生じるものとする．ここで中緯度（ある緯度 ϕ_0）に注目し，新しい座標系（局所直交座標系）を導入しておく．東西方向，南北方向，鉛直方向の距離を

$$x \equiv \lambda a \cos\phi_0, \tag{1.9}$$

$$y \equiv a(\phi - \phi_0), \tag{1.10}$$

$$z \equiv r - a, \tag{1.11}$$

で定義すると，基礎方程式中に現れる空間的な微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} = a\cos\phi_0 \frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = a\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.14}$$

となる．

1.2　無次元パラメター

先に提示した基礎方程式系を無次元の形式に直すために，まず，変数の無次元化について考える．注目する現象の水平空間スケールを L，鉛直空間スケールを D，水平風速の代表的大きさを U とする．このとき，これらのスケールを用いて，変数を無次元化する：

$$x = Lx',\ y = Ly' \tag{1.15}$$

$$z = Dz', \tag{1.16}$$

$$t = \frac{L}{U}t', \tag{1.17}$$

$$u = Uu',\ v = Uv' \tag{1.18}$$

$$w = \frac{D}{L}Uw'. \tag{1.19}$$

プライムの付いた量が無次元変数である．圧力，密度の代表的な大きさは次のような考察から決定する．まず，全球平均したときに鉛直風速は $w = 0$ になるであろう．そこで，第一近似として

$$\frac{\mathrm{d}p_s(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho_s(z) g \tag{1.20}$$

という静水圧平衡が成り立っているであろう．(1.20) を満足する p_s, ρ_s を用いて，圧力，密度を静水圧平衡状態とそれからのズレという形で表現する：

$$p = p_s(z) + \tilde{p}, \tag{1.21}$$

$$\rho = \rho_s(z) + \tilde{\rho}, \tag{1.22}$$

$\tilde{p}$ の大きさは，とりあえず $\tilde{p}$ に伴う水平方向の気圧傾度力が，水平風速に働く Coriolis 力の水平成分とバランスすると考えて（中緯度では実際にそのようになっている），

$$(-2\Omega v \sin\phi_0,\, 2\Omega u \sin\phi_0) \simeq -\frac{1}{\rho_s}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})\tilde{p}$$

より，

$$\mathsf{O}(\tilde{p}) = \mathsf{O}(\rho_s L U f_0)$$

となる．ここで，$f_0 = 2\Omega \sin\phi_0$ は Coriolis パラメターと呼ばれる．したがって，

$$p = p_s + \rho_s L U f_0 p'. \tag{1.23}$$

次に $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$ の間にも静水圧平衡の関係が成り立っていると仮定して，$\tilde{\rho}$ の大きさを決める：

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \simeq -\tilde{\rho} g,$$

$$\mathsf{O}(\frac{\tilde{p}}{D}) = \mathsf{O}(\frac{\rho_s U f_0 L}{D}) = \mathsf{O}(\tilde{\rho}) g.$$

これより

$$\tilde{\rho} = \rho_s U \frac{f_0 L}{g D}. \tag{1.24}$$

ただし，以下で定義される無次元数である Rossby 数 ϵ Froude 数 F を用いて，

$$\epsilon \equiv \frac{U}{f_0 L}, \tag{1.25}$$

$$F \equiv \frac{(f_0 L)^2}{g D}, \tag{1.26}$$

密度は最終的に

$$\rho = \rho_s\,(1+\epsilon F\rho') \tag{1.27}$$

と表現される．

1.3　無次元化された基礎方程式系

(1.15)〜(1.19), (1.23), (1.27) を運動方程式と連続の式に代入し，これらの方程式を無次元変数で記述する．なお，ここでは次元のある変数には $_*$ をつけ，無次元変数にはプライムや*をつけないことにする．すなわち，(1.15) は $x_* = Lx$, $y_* = Ly$ とかくことにする．

(1.2) に (1.15)〜(1.19), (1.23), (1.27) を代入し，f_0U で割ると，

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} + \frac{L}{r_*}(\delta uw - uv\tan\phi)\right) &- \frac{\sin\phi}{\sin\phi_0}v + \frac{\cos\phi}{\sin\phi_0}\delta w \\ &= -\frac{\cos\phi_0}{\cos\phi}\frac{a}{r_*}\frac{1}{(1+\epsilon F\rho)}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K_{*\lambda}}{f_0U}\end{aligned} \tag{1.28}$$

を得る．ここで Lagrange 微分は

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{a}{r_*}\frac{\cos\phi_0}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{a}{r_*}\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.29}$$

となり，δ はアスペクト比

$$\delta \equiv \frac{D}{L} \tag{1.30}$$

である．同様に，(1.3) は

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{L}{r_*}\left(\delta vw + u^2\tan\phi\right)\right) &+ \frac{\sin\phi}{\sin\phi_0}u \\ &= -\frac{a}{r_*}\frac{1}{(1+\epsilon F\rho)}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{K_{*\phi}}{f_0U}.\end{aligned} \tag{1.31}$$

鉛直方向の運動方程式 (1.4) は (1.15)〜(1.19), (1.23), (1.27) を代入したあと，$\frac{D(1+\epsilon F\rho)}{LUf_0}$ をかけて，

$$\begin{aligned}(1+\epsilon F\rho)\left(\epsilon\delta^2\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} - \epsilon\delta\frac{L}{r_*}(u^2+v^2) - \frac{\cos\phi}{\sin\phi_0}\delta u\right) &= -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial(\rho_s p)}{\partial z} \\ &\quad - \rho + \frac{(1+\epsilon F\rho)\delta}{f_0U}K_{*r}\end{aligned} \tag{1.32}$$

となる．最後に，連続の式 (1.1) は (1.15)〜(1.19), (1.23), (1.27) を代入したあと，$\frac{L}{\rho_s U}$ をかけて，

$$\epsilon F\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+(1+\epsilon F\rho)\left\{\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial(\rho_s w)}{\partial z}+\frac{2L}{r_*}\delta w+\frac{a}{r_*}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{L}{r_*}v\tan\phi+\frac{a}{r_*}\frac{\cos\phi_0}{\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=0. \tag{1.33}$$

熱力学の式の無次元化はあとの節で取り扱うことにする．

方程式 (1.28), (1.31), (1.32), (1.33) は今のところ何の近似も行っていない．引き続く節では，中緯度に卓越する現象に対して，上で導いた式に現れる独立なパラメータ ϵ, δ, L/a, F の大きさを見積もり，卓越する項を抜き出すという作業を行い，近似方程式系を導く．その前準備として，以下では三角関数の近似公式とその他の独立な無次元パラメターを導入しておく．

三角関数の近似公式:

$$\begin{aligned}\sin\phi &= \sin\left(\phi_0+\frac{Ly}{a}\right)\\ &= \sin\phi_0+\frac{Ly}{a}\cos\phi_0-\frac{1}{2}\left(\frac{Ly}{a}\right)^2\sin\phi_0+\ldots \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \cos\left(\phi_0+\frac{Ly}{a}\right)\\ &= \cos\phi_0-\frac{Ly}{a}\sin\phi_0-\frac{1}{2}\left(\frac{Ly}{a}\right)^2\cos\phi_0+\ldots \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \tan\left(\phi_0+\frac{Ly}{a}\right)\\ &= \tan\phi_0+\frac{Ly}{a}\frac{1}{\cos^2\phi_0}+\left(\frac{Ly}{a}\right)^2\frac{\tan\phi_0}{\cos^2\phi_0}+\ldots \end{aligned} \tag{1.36}$$

粘性項: 粘性項は $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}(D)$ よりも小さなスケールの乱流によって運動量がそれぞれ水平，鉛直に混合されることに伴って発生するものであり，以下の A_H, A_V はそれぞれ，水平渦粘性係数，鉛直渦粘性係数と呼ばれる．

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{*\lambda} &= A_H\left(\frac{\partial}{\partial x_*^2}+\frac{\partial}{\partial y_*^2}\right)u_*+A_V\frac{\partial}{\partial z_*^2}u_*\\ &= \mathcal{O}\left(\frac{A_H U}{L^2},\ \frac{A_V U}{D^2}\right)\end{aligned} \tag{1.37}$$

粘性力項を $f_0 L$ で割った量は無次元数となる．

$$\mathcal{O}\left(\frac{\mathcal{K}_{*\lambda}}{f_0 L}\right)=\mathcal{O}\left(\frac{A_H}{f_0 L^2},\ \frac{A_V}{f_0 D^2}\right)=\mathcal{O}\left(\frac{E_H}{2},\ \frac{E_V}{2}\right) \tag{1.38}$$

ここで，E_H，E_V はそれぞれ水平 Ekman 数，鉛直 Ekman 数と呼ばれる．

その他の無次元数 Colioris パラメターの南北微分は地球流体力学にとって重要な外的パラメターの一つである．

$$\beta_0 \equiv \left.\left(\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\right|_{\phi_0} = \frac{2\Omega}{a}\cos\phi_0. \tag{1.39}$$

β_0 に関連した幾つかの無次元量が定義でき，それぞれ次のような大きさを持つ．

$$\frac{\beta_0 L}{f_0} = \frac{L}{a}\cot\phi_0 = O\left(\frac{L}{a}\right), \tag{1.40}$$

$$\frac{\beta_0 L/f_0}{\epsilon} = \frac{\beta_0 L}{f_0}\frac{f_0 L}{U} = \frac{\beta_0 L^2}{U} = O\left(\frac{L}{a\epsilon}\right). \tag{1.41}$$

なお，Rossby 数は 惑星渦度と相対渦度の比

$$\epsilon = \frac{U/L}{f_0} \tag{1.42}$$

と解釈することができる．一方，惑星渦度の勾配と相対渦度の勾配との比という無次元パラメター　β^{-1} が定義でき，この大きさは (1.41) より

$$\beta^{-1} = \frac{U/L^2}{\beta_0} = O\left(\epsilon\frac{a}{L}\right) \tag{1.43}$$

である．あとで見るように中緯度総観規模の現象では，$\epsilon \ll 1$ であるが，$a/L \ll 1$ ではないので，$\beta^{-1} \ll 1$ ではない．

1.4　地衡流近似

中緯度総観規模現象の特徴的な大きさは観測から

- $a = 6.4 \times 10^6\,\mathrm{m}$
- $L = 10^6\,\mathrm{m}$
- $U = 10\,\mathrm{ms^{-1}}$
- $f_0 = 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$
- $\beta_0 = \frac{f_0}{a} = 10^{-11}\,\mathrm{m^{-1}s^{-1}}$

- $D = 10^4\,\mathrm{m}$

と見積もることができる．これらの値を使って，前節で現れた様々な無次元数の大きさを見積もってみる．

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{U}{f_0 L} = 10^{-1} \\
\frac{L}{a} &= 10^{-1} = \mathsf{O}(\epsilon) && (1.44) \\
\beta^{-1} &= \frac{U}{\beta_0 L} = 10^{0} && (1.45) \\
F &= \frac{(f_0 L)^2}{gD} = 10^{-1} = \mathsf{O}(\epsilon) && (1.46) \\
\delta &= \frac{D}{L} = 10^{-2} = \mathsf{O}(\epsilon^2) && (1.47) \\
\frac{r_*}{a} - 1 &= \mathsf{O}\left(\frac{\delta L}{a}\right) = \mathsf{O}(\epsilon^3) && (1.48)
\end{aligned}
$$

上で見積もったように，無次元数は Rossby 数 ϵ で表現することができる．いま ϵ が微小なので未知変数を ϵ で

$$u(x,\,y,\,z,\,t) = u_0(x,\,y,\,z,\,t) + \epsilon u_1(x,\,y,\,z,\,t) + \dots \tag{1.49}$$

のように漸近展開して支配方程式に代入し，ϵ の各次数の式を作る．このとき，ϵ は任意のパラメターなので，各次数の方程式の係数がバランスしていなければいけない．このような要請から，ϵ の各次数に対して以下のような式が導かれる．

ϵ^0 次の式： (1.28) より

$$v_0 = \frac{\partial p_0}{\partial x}. \tag{1.50}$$

(1.31) より

$$u_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial y}. \tag{1.51}$$

(1.32) より

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial(\rho_s p_0)}{\partial z} + \rho_0 = 0 \tag{1.52}$$

(1.33) より

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial(\rho_s w_0)}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \tag{1.53}$$

(1.50), (1.51) は Coriolis 力と気圧傾度力がバランスした状態で，地衡流を表している．いっぽう，(1.52) は鉛直方向の気圧傾度力と重力とのバランスで，静水圧平衡を表す.

地衡流の式は水平非発散

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \tag{1.54}$$

なので，(1.53) から

$$\frac{\partial(\rho_s w_0)}{\partial z} = 0, \tag{1.55}$$

すなわち $\rho_s(z)w_0$ が高さに依存しないことになる．ある高度で $w_* = 0$ であれば，この性質は満足される．もし上端もしくは下端に水平の固体境界面があれば，そこでは $w_* = 0$ なので，流体内のいたるところで $w_0 = 0$ となる．また，下端に高さ h_{B}，水平スケール L_{B} の山があるにも $w_* = O\left(U\frac{h_{\mathrm{B}}}{L_{\mathrm{B}}}\right)$ なので，$w = O\left(\frac{L}{L_{\mathrm{B}}}\frac{h_{\mathrm{B}}}{D}\right)$ とみつもられ $w = O(\epsilon)$ であれば，$w_0 = 0$ となって上で行った解析は正当である．なお，$w = O(1)$ であれば，地衡流近似は破綻する．このような考察から鉛直速度 w の漸近展開は ϵ の 1 次のオーダーから始まる：

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon w_2 + \dots . \tag{1.56}$$

ϵ の 0 次のオーダーの式は，時間微分を含まない．そこで，初期値を与えて将来の場の値を求めるという予報ができない．しかしながら以下で見るように ϵ の 1 次のオーダーの式を求め，変形することにより，ϵ の 0 次のオーダーの時間発展方程式導出される.

ϵ^1 次の式： (1.28), (1.31), (1.33) よりそれぞれ

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 - \left(\frac{L}{\epsilon a}\right) y\cot\phi_0 v_0 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{L}{\epsilon a}y\tan\phi_0\frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y} + u_1 + \left(\frac{L}{\epsilon a}\right) y\cot\phi_0 u_0 = -\frac{\partial p_1}{\partial y}, \tag{1.58}$$

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w_1) + \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{L}{\epsilon a}v_0\tan\phi_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{L}{\epsilon a}y\tan\phi_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \tag{1.59}$$

が得られる．(1.57), (1.58) の左辺最終項は地球の自転角速度（Coriolis パラメター）の緯度依存性によって生じた項で，いわゆる β 項と呼ばれるものである．また, (1.57) の右辺最終項は，球面上に局所直行座標系を張ったときに，座標系の曲がりによって生じた項で，曲率項と呼ばれるものである．このような曲率項は $\phi_0 \simeq 0$ すなわち赤道域ではゼロになり，β 平面近似された方程式と上式は等価な形になる．しかしながら，$\phi_0 \simeq 0$ では地衡流近似が成り立たないので, (ϵ の最低次の式が地衡流であるという）上で展開した議論は正しくない．つまり，ϵ の漸近展開によって厳密に議論を行うと $\mathrm{O}(\epsilon)$ の方程式の議論では β 平面近似は正しくないことになる．しかしながら，あとで見るように， $\mathrm{O}(\epsilon)$ の式から渦度方程式を作ると，この気圧傾度力に現れた曲率項は消え，結局 β 平面近似された方程式から出発した議論と等価な結果が導かれる．

渦度方程式： (1.57), (1.58) より渦度

$$\zeta_0 \equiv \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \tag{1.60}$$

の発展方程式を求める．$\partial_x(1.58) - \partial_y(1.57)$ の演算を行い，(1.40), (1.43), (1.54) を用いると，

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \beta v_0 = \frac{L}{\epsilon a} \tan\phi_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{L}{\epsilon a} y \tan\phi_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}, \tag{1.61}$$

となる．さらに連続の式 (1.59) および，地衡流の関係式 (1.50), (1.51) を考慮すると，(1.61) は

$$\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{D}t} \left\{ \zeta_0 + \beta y \right\} = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_s w_1 \right) \tag{1.62}$$

$$\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.63}$$

となる．(1.62) は渦度方程式と呼ばれる．渦度は地衡流の関係式を用いると

$$\zeta_0 = \nabla^2 p_0 \tag{1.64}$$

と書けるので，もし p_0 と w_1 の間の関係がわかれば，(1.62) は p_0 だけの閉じた方程式になる．実際に，熱力学の方程式を用いると，p_0 と w_1 の間の関係が導ける．

1.5　安定性の概念

前節で導いた渦度方程式において，鉛直速度と圧力場の関係がわかれば，系の支配方程式は閉じる．このことは熱力学方程式を考慮することによって実現されるが，その前に，鉛直方向の大気の安定性について復習しておく．[1]

密度成層した鉛直 1 次元の静止大気を考える．今，初期に高度 z にある流体粒子を $z+\Delta z$ まで断熱的に変位させること考える．ただし，流体粒子の持つ圧力は，その外界の圧力と常に等しくなるように変位させるとする．このとき，流体粒子の持つ温位

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}$$

は変位の前後で一定に保たれる．なぜならば，温位はエントロピー S　と

$$S = C_p \ln\theta \tag{1.65}$$

の関係で結ばれ，エントロピーは断熱過程において一定に保たれるからである．なお，温位は θ は状態方程式 (1.8) を用いると，

$$\theta = \frac{p_0}{R\rho}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}, \tag{1.66}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{1.67}$$

と表現できる．

流体粒子を z から $z+\Delta z$ に変位させたときの運動について考察する．流体粒子の持つ物理量を添え字 A であらわし，一方流体粒子の外界の物理量を添え字 B であらわすことにする．変位に伴って，流体粒子の持つ密度は $\rho_{\mathrm{A}} \to \rho_{\mathrm{A}} + \Delta\rho_{\mathrm{A}}$ へと変化する．$\Delta\rho_{\mathrm{A}}$ は (1.66) を用いると，

$$\begin{aligned}\Delta\rho_{\mathrm{A}} &= \Delta\left[\frac{p_0}{R\theta_{\mathrm{A}}}\left(\frac{p_{\mathrm{A}}}{p_0}\right)^{1/\gamma}\right] \\ &= \left(\frac{\rho_{\mathrm{A}}}{\gamma}\frac{\partial \ln p_{\mathrm{A}}}{\partial z}\right)_z \Delta z,\end{aligned} \tag{1.68}$$

となる．外界と流体粒子のもつ圧力は等しく，さらに $\rho_{\mathrm{A}}(z) = \rho_{\mathrm{B}}(z)$ なので，したがって，

$$\rho_{\mathrm{A}}(z+\Delta z) = \rho_{\mathrm{A}} + \Delta\rho_{\mathrm{A}} = \rho_{\mathrm{A}}(z) + \left(\frac{\rho_{\mathrm{B}}}{\gamma}\frac{\partial \ln p_{\mathrm{B}}}{\partial z}\right)_z \Delta z. \tag{1.69}$$

---

[1] 本節では，添え字 $*$ のない変数は，次元のある量であるとする．なぜなら，本節では，次元のある量のみを取り扱うので，添え字をつけるのが煩雑だからである．

一方，$z+\Delta z$ における，外界の密度は

$$\rho_{\mathsf{B}}(z+\Delta z) \;=\; \rho_{\mathsf{B}}(z)+\left.\frac{\partial \rho_{\mathsf{B}}}{\partial z}\right|_z \Delta z=\rho_{\mathsf{A}}(z)+\left.\frac{\partial \rho_{\mathsf{B}}}{\partial z}\right|_z \Delta z \tag{1.70}$$

である．したがって流体粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}^2\Delta z}{\mathrm{D}t^2} &= -\frac{1}{\rho_{\mathsf{A}}(z+\Delta z)}\frac{\partial p_{\mathsf{B}}}{\partial z}-g\\ &= \frac{\rho_{\mathsf{B}}(z+\Delta z)}{\rho_{\mathsf{A}}(z+\Delta z)}-g\end{aligned}$$

ここで，流体粒子の外界は静止大気であり，そこでは静水圧平衡が成り立つので，

$$\frac{\partial p_{\mathsf{B}}}{\partial z}=-\rho_{\mathsf{B}}g$$

を用いた．さらに，(1.69), (1.70) を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}^2\Delta z}{\mathrm{D}t^2} &= \frac{g}{\rho_{\mathsf{A}}(z+\Delta z)}\left(\rho_{\mathsf{B}}(z+\Delta z)-\rho_{\mathsf{A}}(z+\Delta z)\right)\\ &= g\frac{\rho_{\mathsf{B}}(z)}{\rho_{\mathsf{A}}(z+\Delta z)}\left(\frac{\partial \ln \rho_{\mathsf{B}}}{\partial z}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \ln p_{\mathsf{B}}}{\partial z}\right)_z \Delta z\end{aligned}$$

(1.66) を用いると運動方程式は $\mathsf{O}(\Delta z)$ のオーダーで

$$\frac{\mathrm{D}^2\Delta z}{\mathrm{D}t^2}=-g\left(\frac{\partial \ln \theta_{\mathsf{B}}}{\partial z}\right)_z \Delta z \tag{1.71}$$

となる．この方程式は，$g(\frac{\partial \ln \theta_{\mathsf{B}}}{\partial z})_z>0$ であれば，流体粒子は変位に伴って復元力を受け，元の高度を中心とした振動運動を起こす．$g(\frac{\partial \ln \theta_{\mathsf{B}}}{\partial z})_z<0$ であれば流体粒子の変位は時間とともに指数関数的に増大してしまう．したがって，微小擾乱に対して鉛直方向に大気が安定であるためには，$g(\frac{\partial \ln \theta_{\mathsf{B}}}{\partial z})_z>0$ でなければいけない．

$$N \equiv \sqrt{g\left(\frac{\partial \ln \theta_{\mathsf{B}}}{\partial z}\right)_z} \tag{1.72}$$

とすると，流体粒子は振動数 N で鉛直方向に振動する．このような振動数は Brunt–Väisälä 振動数と呼ばれるものである．

観測によると Brunt–Väisälä 振動数は対流圏で $N\sim 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$ である．したがって中緯度における Colioris パラメター f $(\sim 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1})$ に比べてはるかに大きい．一方，地衡流運動の特徴的な時間スケール T は $T^{-1}\ll f$ なので，地衡流理論では N で特徴付けられる運動は明確には扱わない．ただし，N の存在は大規模な大気の鉛直運動を抑制しており，このことは Rossby 数の最低次の鉛直速度場が小さいことと関連している．

1.6　準地衡流渦位方程式

1.6.1　熱力学方程式の無次元化

熱力学方程式を無次元形式で書き表すために，まず温位 θ_* の無次元化を考える．(1.66)，および，(1.23), (1.27) より

$$
\begin{aligned}
\ln\theta_* &= \frac{1}{\gamma}\ln p_* - \ln\rho_* - \ln\left(Rp_0^{1/\gamma-1}\right) \\
&= \frac{1}{\gamma}\ln\left\{p_s\left(1+\frac{\epsilon f_0^2L^2\rho_s}{p_s}p\right)\right\} - \ln\left\{\rho_s\left(1+\epsilon F\rho\right)\right\} - \ln\left(Rp_0^{1/\gamma-1}\right) \\
&\simeq \frac{1}{\gamma}\ln p_s - \ln\rho_s - \ln\left(Rp_0^{1/\gamma-1}\right) + \frac{1}{\gamma}\epsilon\frac{f_0^2L^2\rho_s}{p_s}p - \epsilon F\rho. \qquad (1.73)
\end{aligned}
$$

ここで θ のスケーリングは，p_*, ρ_* のスケーリングと同様に

$$\theta_* = \theta_s(z)\left\{1+\epsilon F\theta(x,\,y,\,z)\right\} \qquad (1.74)$$

とする．ここで，

$$\ln\theta_s(z) = \frac{1}{\gamma}\ln p_s(z) - \ln\rho_s(z) - \ln\left(Rp_0^{1/\gamma-1}\right) \qquad (1.75)$$

である．θ を ϵ で以下のように漸近展開する：

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \ldots\ldots. \qquad (1.76)$$

(1.73) および F の定義を用いると θ_0 は，p_0, ρ_0 と以下のように関係付けられる：

$$\theta_0 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{gD\rho_s}{p_s}\right)p_0 - \rho_0. \qquad (1.77)$$

温位 θ_0 は静水圧平衡の式を考慮すると，もっと簡単な表現にすることができる．基本場の静水圧平衡の式

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\rho_s gD$$

を用いると，(1.77) は

$$\theta_0 = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mathrm{d}\ln p_s}{\mathrm{d}z}\right)p_0 - \rho_0. \qquad (1.78)$$

一方，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\theta_s = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln p_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\rho_s, \qquad (1.79)$$

ϵ の 0 次の静水圧平衡の式 (1.52) より

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\theta_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\rho_s\right)p_0 + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s p_0) \\ &= \frac{\partial p_0}{\partial z} - p_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\theta_s. \end{aligned} \tag{1.80}$$

最後の表式の最終項の大きさは

$$\mathcal{O}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\theta_s\right) = \mathcal{O}\left(D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_*}\ln\theta_s\right) = \mathcal{O}\left(\frac{DN^2}{g}\right) \sim \mathcal{O}(\epsilon) \tag{1.81}$$

なので，したがって (1.80) は

$$\theta_0 = \frac{\partial p_0}{\partial z} \tag{1.82}$$

となる．(1.82) は静力学平衡の式の温位を用いた表現とみなせる．

(1.74) を用いると，断熱過程における熱力学方程式は

$$\frac{\mathrm{D}\theta_*}{\mathrm{D}t_*} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t_*}\{\theta_s(z)(1+\epsilon F\theta)\} = 0$$

より，

$$\frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{D}t} + \frac{w}{\epsilon F}\frac{\mathrm{d}\ln\theta_s}{\mathrm{d}z}(1+\epsilon F\theta) = 0 \tag{1.83}$$

となる．未知変数を Rossby 数 ϵ で漸近展開したとき，ϵ の最低次の式は

$$\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{D}t}\theta_0 + S(z)w_1 = 0 \tag{1.84}$$

ここで

$$S(z) \equiv \frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}\ln\theta_s}{\mathrm{d}z} \tag{1.85}$$

は静的安定性パラメター（static stability parameter）と呼ばれるもので，前節で議論した Brunt–Väisälä 振動数 N_s とは

$$S(z) = \frac{N_s^2 D^2}{f_0^2 L^2} \tag{1.86}$$

の関係で結ばれている．

1.6.2　温度風の関係式

鉛直方向に静力学平衡，水平方向には地衡風平衡が成り立つ場合には，温度場（もしくは温位場）の水平勾配と風速場の鉛直シアーの間に関係式が導ける．(1.50), (1.51) をそれぞれ z で偏微分し，(1.82) を用いると

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right) = \frac{\partial \theta_0}{\partial x}, \tag{1.87}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p_0}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \theta_0}{\partial y}, \tag{1.88}$$

が得られる．(1.87), (1.88) の関係式は温度風の関係式（thermal wind relation）と呼ばれている．

1.6.3　準地衡流渦位方程式の導出

(1.89) で w_0 と温位 θ_0 の間の関係が与えられ，さらに静水圧平衡の関係式 (1.82) で θ_0 と p_0 の間の関係式が与えられた．したがって，これらを渦度方程式 (1.62) に考慮すれば，渦度方程式は p_0 に関する一本の閉じた方程式になる．このような一本の方程式の導出を行う．

(1.84) より

$$w_1 = -\frac{1}{S}\frac{\mathrm{D}_0\theta_0}{\mathrm{D}t}. \tag{1.89}$$

(1.62) の右辺に上式を代入する:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w_1) &= -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\frac{\mathrm{D}_0\theta_0}{\mathrm{D}t}\right) \\
&= -\frac{1}{\rho_s}\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{D}t}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\theta_0\right)\right\} \\
&\quad -\frac{1}{S}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\right)\theta_0.
\end{aligned}$$

ここで，温度風の関係式 (1.87), (1.88) を考慮すると上式の最終項はゼロになる．結局，

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w_1) = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{D}t}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\theta_0\right)\right\} \tag{1.90}$$

が得られる．この式を渦度方程式 (1.62) に代入すると，

$$\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{D}t}\left\{\zeta_0 + \beta y + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\theta_0\right)\right\} = 0 \tag{1.91}$$

が導かれる．Rossby 数 ϵ の最低次の圧力場 p_0 は速度場 u_0, v_0 との関係から流れ関数 ϕ とみなせるので，

$$\psi = p_0, \tag{1.92}$$

(1.91) は (1.50), (1.51), (1.82) 用いて

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\nabla^2\psi + \beta y + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\} = 0 \tag{1.93}$$

となる．この方程式が準地衡流渦位方程式と呼ばれるもので，断熱過程，非粘性状態では準地衡流渦位

$$q = \nabla^2\psi + \beta y + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \tag{1.94}$$

が地衡流に流され流されながら保存することを表している．

一般に，流体方程式系では Lagrange 的に保存するスカラー量 θ_*，$(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t_*}\theta_* = 0)$ と渦度と密度によって作られる物理量

$$\Pi_* \equiv \frac{(\nabla_* \times \mathsf{v}_*)\cdot\nabla_*\theta_*}{\rho_*} \tag{1.95}$$

が断熱・非粘性過程において Lagrange 的に保存する．Π_* は Ertel の渦位と呼ばれる．Ertel の渦位の保存則

$$\frac{\mathrm{D}\Pi_*}{\mathrm{D}t_*} = 0 \tag{1.96}$$

から Rossby 数 ϵ の漸近展開を行うことにより，準地衡流渦位方程式 (1.93) が導出できる．

静的安定性パラメター S は以下のように 2 つの長さスケールの比としても表現することができる：

$$S^{1/2} = \frac{N_s D/f_0}{L} = \frac{L_\mathsf{D}}{L}, \tag{1.97}$$

$$L_\mathsf{D} = \frac{N_s D}{f_0}. \tag{1.98}$$

ここで L_D は Rossby の内部変形半径と呼ばれるものである．L_D の意味は，これを以下のように書くとわかりやすい．

$$L_\mathsf{D} = \frac{\sqrt{g'D}}{f_0}, \tag{1.99}$$

$$g' \equiv \frac{gD}{\theta_s}\frac{\mathrm{d}\theta_s}{\mathrm{d}z_*}. \tag{1.100}$$

g' は重力加速度と同じ次元をもつが数値は異なる．これは reduced gravity と呼ばれる．深さ D の浅水方程式系における表面重力波の位相速度が

$$c = \sqrt{gD} \tag{1.101}$$

で与えられるが，上記の $\sqrt{g'D}$ は連続成層系のそれに相当するものである．一方，f_0 は慣性振動の振動数であり，したがって，L_D は重力波の位相速度と慣性振動の振動数との比で与えられる．なお，浅水系では外部変形半径

$$R = \frac{\sqrt{gD}}{f_0} \tag{1.102}$$

と呼ばれる系に特徴的な長さが存在する．

中緯度の総観規模の気象現象を記述するために適切な方程式系，準地衡流渦位方程式系，が導出されたので，引き続く節ではこの方程式を出発点として，中緯度で観測される大気擾乱，波動の物理的性質について議論していくことにする．