

気象とゆらぎ

高層大気の流れとゆらぎ



岡本 寿夫・栢原 孝浩・岩山 隆寛

§1. 気象におけるゆらぎ

気象現象では「ゆらぎ」という概念を正確にどのように定義するのかよくわからないが、何らかの平均値が定義され、それからの「ずれ」というふうに考えておくことにすれば、気象学が対象とする大気現象にも様々なゆらぎがある。

地上から高度 15 km ほどの大気領域を対流圏と呼ぶ。ここでは、気温の鉛直勾配が約 $-6.5^{\circ}\text{C}/\text{km}$ で、下部が高温、上部が低温となっており、常時対流が存在している。対流圏でのゆらぎは地表付近の風の速い振動から、積雲、温帯低気圧、地球規模の波動まで、時間的・空間的に多くのスケールにわたっている。しかも、このような現象は大気大循環と呼ばれる赤道域から南北の極域への大規模な熱伝達のメカニズムの一つとしての平均的な地球規模循環系の中に埋め込まれているものである。また、大循環それ自身の変動による季節変動や季節内変動もある。更に、数年の時間規模をもつエル・ニーニョ現象も大気-海洋結合システムのゆらぎとってよいだろう。アジア・モンスーンのアクティビティの変動もユーラシア大陸の積雪域の変動と関連しているといわれており、これは大気-海洋-陸地-雪氷という気候システムのゆらぎといえる。

対流圏のすぐ上の領域で高度約 50 km までを成層圏と呼ぶ。ここでは、気温は下部のほぼ等温の層の上に徐々に温度の高い層が層状に積み重な

って、高度約 50 km で気温はピークに達し、温度について上高下低の安定な成層構造をなしており通常熱対流は起きていない。しかし、成層圏とその上にある中間圏を含めた領域では、夏半球から冬半球へ向けての両半球を跨ぐ大循環が存在する。このような大循環の季節変動に加えて、成層圏では対流圏から伝播してきた地球規模の大気波動と大循環が相互作用することにより、北半球極域の冬季末期の突然昇温や赤道域準 2 年振動などの現象が生じる。その他にも、成層圏と中間圏には多くの小規模内部重力波（浮力を復元力とする波）が存在していて、これと大循環との相互作用も問題になっている。さらに、近年活発に議論されている CO_2 増大にともなう気候の変化や南極オゾンホールもゆらぎの中に入れてもよいかもしれない。

§2. 気象におけるカオスとフラクタル

対流圏の気象現象の解析において重要な熱対流をモデル化した 3 元の連立非線形常微分方程式の解の挙動がカオス的であることがローレンツによって 1963 年に報告された¹⁾。また、彼とは独立に、時期を同じくして、我が国でも、電気回路の研究においてカオス現象が上田皖亮によって発見されていたことが知られている^{2),3)}。その後、特に、ここ 10 年の間にカオス現象は他の多くの分野において実験的に観察され、理論的研究も進展してい

る。また、気象データの解析への応用例も見られるようになった^{4)~8)}。例えば、空気中のタバコの煙は目に見えない空気の流れの微妙なゆらぎを反映してその形を複雑に変化させる。同様に、雲の表面の複雑な形は大気中の大小様々な乱れを反映しているとの考えから、雲の形のフラクタル次元を求める研究がなされている^{4)~5)}。

カオス現象とは決定論的に時間変化するにもかかわらず、その変動が不安定であり、解軌道は位相空間内の固定点または周期軌道に漸近することなく、ある有限な領域内に広がった奇妙なアトラクターを形成することである。しかも、解軌道群の伸長・折り畳みの結果、奇妙なアトラクターはフラクタル構造をもっている。

実験的にあるカオス的な時系列が得られたとき、そこから様々な情報を引き出し、しかも、その時系列を発生している体系のもつ動的機構を明らかにする手法の開発のために多くの努力が払われてきた。とりわけ、奇妙なアトラクターの次元および最大リアプノフ指数についての知見を得ることがカオス現象の理解に有用であることがわかってきた^{9)~10)}。

大気中のゆらぎの一例を挙げよう。地上の高度約5 kmでの気圧は約500 mb (ミリバール)である。そこで、気圧がちょうど500 mbの値になる高度のところを連ねることにより、地球をとりまく500 mbの等圧面を得ることができる。しかも、この等圧面の高度は場所により、また、時間の経過とともに上下に変動し、水平方向にその変動が波動となって伝わっていく。また、この位の高度にある大気では、地上付近の人工的な原因による乱れの影響が少なく、大気は比較的自然的な大気固有の運動をしているとみなしてもよいと思われる。

以下では気象データのゆらぎへのカオス解析の応用の試みとしてFGGEデータ¹¹⁾を取り上げ、そこに収録された500 mbの等圧面高度の時間変動を解析し、その奇妙なアトラクターの相関次元および軌道の最大リアプノフ指数を調べた結果の概要を記したい^{12)~13)}。

§ 3. 相関次元と最大リアプノフ指数

3.1 相関次元 D

位相空間内での奇妙なアトラクターを特徴づけるその次元の大きさを知ることは、実際にカオス的な挙動を生み出している体系の動的機構を記述するのに必要な独立変数の個数の目安を知る上で有用であると思われる。

次元としては、容量次元、情報次元、相関次元などが知られているが、これらはいずれも数値的にはきわめて近い値を取る場合が多いので、実験データからの計算が最も容易な相関次元をもって奇妙なアトラクターの次元とすることが多い。

以下にその計算法を略記する⁹⁾。先ず、実験的に得られた連続または離散的な一本の時系列を $\{X(t)\}$ としよう。これから、次式によって p 次元ベクトルを構成する。

$$\mathbf{x}_t = \{X(t), X(t+\tau), X(t+2\tau), \dots, X(t+(p-1)\tau)\} \quad (1)$$

ただし、 τ はある時間遅れのパラメタであり、 $X(t)$ の自己相関が最初に0または相互情報量が最初に極小になる時間が選ばれる¹⁴⁾。このようにして得られた N 個のベクトル $\{\mathbf{x}_t\}$ 、($t=1, 2, \dots, N$)、は p 次元空間内に散らばった N 個の点を表わす。これらの点の間の距離が r 以下になるベクトルの対の個数を数え上げることににより、相関積分 $C(r)$ を定義する。即ち、

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|). \quad (2)$$

ただし、 H はヘビサイドの階段関数で

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0, \\ 1, & \text{if } x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

である。 $C(r) \propto r^D$ なる関係が得られるとき、 D を相関次元と呼ぶ。即ち、

$$D = d\{\log C(r)\} / d\{\log r\}. \quad (4)$$

3.2 最大リアプノフ指数 λ

カオス軌道の不安定性を特徴づける物理量、即ち、互いに接近した2本の軌道間距離の時間的拡大率が最大リアプノフ指数である。

ここでは、(1)式で構成された1本の時系列

$\{x_t\}$ を考えているのであるが、長時間の間に軌道 x_t が位相空間内に描いた軌跡(アトラクター)の中にその軌跡の一部が互いに接近し時間とともにその距離が指数関数的に増大していくような軌跡の組を多数見出すことができる筈である。

いま、時刻 t において軌道 x_t のすぐ近くを通る軌道を y_t とし、その間の距離を $\text{dis}(x_t, y_t)$ と記すと、時刻 $t+\tau$ での軌道間距離は $\text{dis}(x_{t+\tau}, y_{t+\tau})$ と書ける。このとき、軌道間距離の拡大率、即ち、最大リアプノフ指数 Λ は

$$\text{dis}(x_{t+\tau}, y_{t+\tau}) \sim e^{\Lambda \tau} \text{dis}(x_t, y_t) \quad (5)$$

で与えられる。これから Λ は

$$\Lambda(\tau) = \frac{1}{\tau} \left\langle \frac{\log \text{dis}(x_{t+\tau}, y_{t+\tau})}{\log \text{dis}(x_t, y_t)} \right\rangle. \quad (6)$$

ただし、 $\langle \dots \rangle$ は全ての x_t についての平均を表わす¹⁰⁾。

§ 4. ゆらぎの緯度による変化

FGGE データ¹¹⁾から、5つの緯度、北緯 60 度 (60°N)、北緯 30 度 (30°N)、赤道 (0°EQ)、南緯 30 度 (30°S)、及び南緯 60 度 (60°S) の各緯度に沿って等間隔に配置された 192 カ所の観測点から得られた 500 mb の等圧面高度の変動のデータを取り出し、§ 3 で述べた方法に従って解析し、各緯度ごとに相関次元と最大リアプノフ指数を求める。使用するデータの期間は 1978 年 12 月 1 日～1979 年 11 月 30 日 (1 日 2 回観測) の 1 年間であり、従って、使用するデータ点の個数は各緯度について 730×192 個である。

図 1 には 60°N 及び赤道 (東経 135 度) での 500 mb の等圧面高度の時系列を示す。60°N、30°N、0°EQ、30°S、60°S の各緯度上の 192 カ所の観測点での全データを用いて相関積分 $C(r)$ の r 依存性を計算し、(4) 式を用いて相関次元 D を求めた結果を図 2 に示す。相関次元 D は赤道域で 7～8 次元と高く、南北の中緯度 (30°) で約 4 次元、高緯度で 3～4 次元 (60°N) 及び 4～5 次元 (60°S) と赤道域より低くなっている。また、最大リアプノフ指数 Λ の値が図 3 に示してある。 Λ は赤道域で

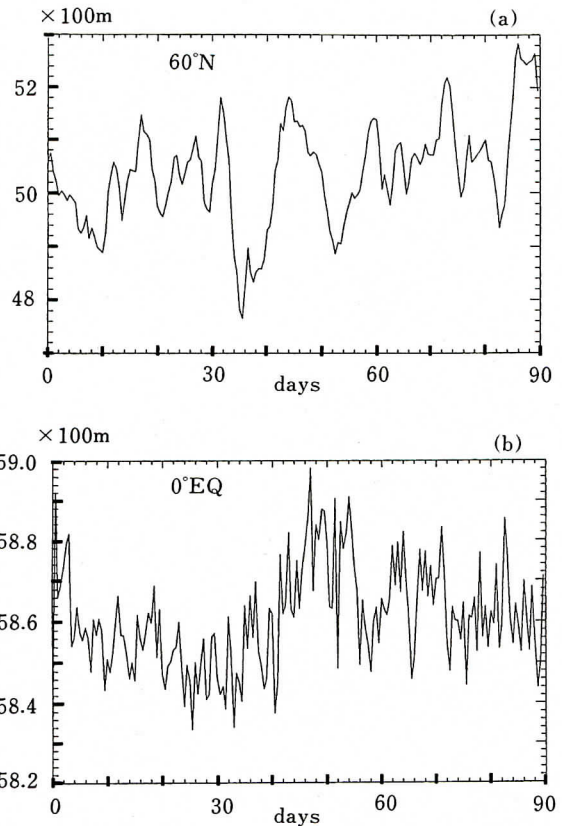


図 1 (a) 北緯 60 度 (東経 135 度) での 500 mb の等圧面高度の時系列。
(b) 赤道 (東経 135 度) での 500 mb の等圧面高度の時系列。

約 0.15/day と小さく、南北の中高緯度では約 0.3～0.4/day と大きくなっている。

中・高緯度域と赤道域との力学的な違いの一つとして、地球が自転する球体である結果生じるコリオリ力の作用が挙げられる。北半球では台風は左回転し、しかも、北上するにつれて進路が東側に大きくずれるのはこの力による。もっと正確に言えば、中・高緯度域での大規模な大気の運動はコリオリの力が、水平の気圧傾度力とほぼ釣り合った、準地衡流的な運動をしている。この運動は近似的に 2 次元運動をしていると考えてよい。運動が 2 次元的事象であることはエネルギースペクトルが波数の -3 乗に比例していることからうかがえる。このことについては、次節の図 4 に解析結果が示してある。つまり、中・高緯度域ではコリ

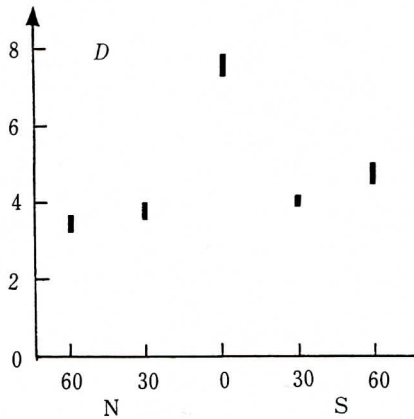


図 2 相関次元 D の緯度変化.

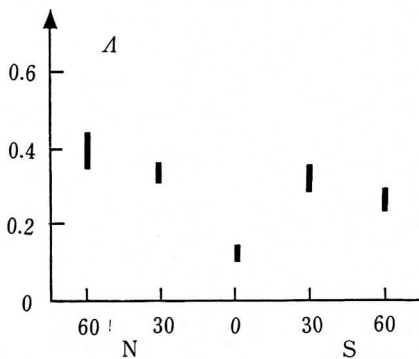


図 3 最大リアプノフ指数 Λ (1/day) の緯度変化.

オリ力が支配的であるため、これより小さな力はマスクされてしまう。その結果大気運動を記述する方程式は単純化される。一方、赤道域ではコリオリ力がほぼ 0 であるため、大気の流れは地衡流的ではない。また、対流活動が盛んで水の蒸発や水蒸気の凝結による潜熱の解放などによる振幅の小さな擾乱までもが無視できなくなり、大気運動の方程式は複雑になる。これらのことが大気運動を記述する次元(独立変数の個数)の違いとなっていると考えられる。また、これらの状況は、500 mb の等圧面高度の変化の幅が 60°N (図 1 (a)) では約 500 m と大きく、しかも、比較的ゆっくり変動するのに対し、赤道(図 1 (b))では約 70 m と小さく、かつ、速く変動していることから理解できよう。この他にも、中・高緯度域と赤道域の力学的な違いとしては、南北方向の温度差(傾度)による安定性の違いがある。中・高緯度域では南

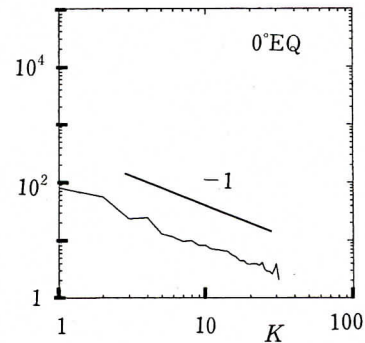
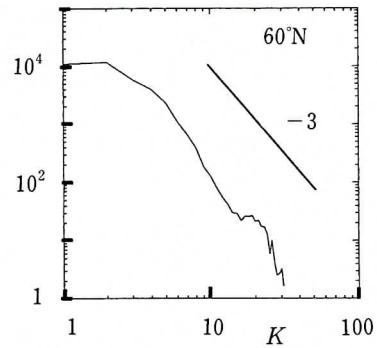


図 4 北緯 60 度及び赤道に沿って地球を一周した 500 mb の等圧面高度の時間変動のエネルギースペクトル密度の波数依存性.

北方向の温度傾度が大きいため、自転の効果と相まって大気が不安定状態となり、傾圧波動と呼ばれる波動が発生する。この波動は我々の日常の天気を左右する高・低気圧のことである。一方、赤道域では南北方向の温度差が小さく、傾圧波動は存在しない。つまり、中・高緯度域の大気では作用する力が赤道域に較べて大きく、かつ、システムティックであることに対応して大気運動の不安定度も高く、この安定度の違いが最大リアプノフ数の違いとなって現われているものと思われる。

§ 5. 波動モードの振幅のゆらぎ

次に、FGGE データから、 60°N 、 30°N 、 $0^\circ(\text{EQ})$ 、 30°S 、及び 60°S の各緯度に沿って地球を一周した 500 mb の等圧面高度の経度変化及び時間変動のデータを、地球を一周する波動とみなして、波

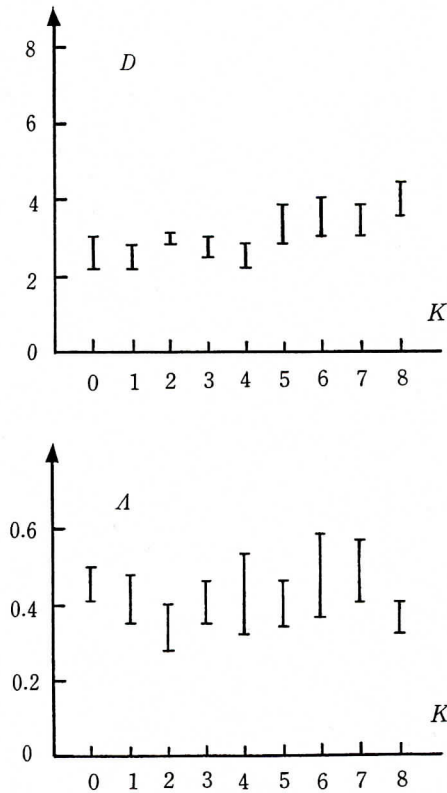


図5 北緯60度に沿ったゆらぎのモード(波数 K)に対する相関次元 D と最大リアプノフ指数 Λ .

数 K の各波動モードについて解析した。

図4にエネルギースペクトル密度の分布を示す。スペクトルはべき分布をしており、その勾配は、中・高緯度域では約 -3 となっており、これは変動が近似的に2次元であることに対応している。一方、赤道域では約 -1 となっており、その値が大きく異なる。次に、波数 $K (=1 \sim 8)$ の波動モードのエネルギー振幅の時間変動の相関次元 D 及び最大リアプノフ指数 Λ を調べた。これらは、図2及び図3に示した直接解析の結果ときわめて似た結果になっている。北緯60度に沿った波動のゆらぎの各モード(波数 $K = 1 \sim 8$) に対する相関次元 D と最大リアプノフ指数 Λ を図5に示す。ここでは、 D 及び Λ のいずれもが波数 K によらず、それぞれ、ほぼ一定の値をとるが、この性質はこの他の緯度についても同様である。

§6. おわりに

FGGE データ¹¹⁾の500 mb 等圧面高度の時間的・空間的変動についてカオス解析を行った。§4では5つの緯度での時間変動について相関次元 D と最大リアプノフ指数 Λ を求めた。§5では、赤道、中緯度(30°N, 30°S)および高緯度(60°N, 60°S)の5つの緯度に沿って地球を一周した500 mb 等圧面高度の時間的・空間的変動を波数 $K = 1 \sim 8$ の各モードについてのカオス解析の結果を示した。

§4でのなまの観測データの直接解析および§5の波数モード分解したデータの解析のいずれについても、赤道域では相関次元 $D = 7 \sim 8$ 次元、最大リアプノフ指数 $\Lambda \cong 0.15/\text{day}$ 、高緯度域では $D = 3 \sim 4$ 次元、 $\Lambda \cong 0.40/\text{day}$ であることが判明した。即ち、観測時の誤差が $e(=2.7)$ 倍に成長するのに要する時間 $T_e (=1/\Lambda)$ は赤道域では約7日と長く、中・高緯度域では約3日と短い。つまり、赤道域の方が中高緯度域に較べて約2倍の長さになっており、これは予報限界についての経験的な傾向とも一致している。また、等緯度線上でのゆらぎの波動モードについては相関次元及び最大リアプノフ指数はいずれも波数($K = 1 \sim 8$)の変化に対してほぼ一定の値をとることがわかった。

今回は、使用したデータの観測期間が短い(1年間¹¹⁾)ことにともなうデータ点の個数の不足を補うために、(1)緯度による変化を見る場合には等緯度線上の192地点のすべてのデータを計算に取り込んだり、(2)特定地点での解析に当たっては、特定地点の東西南北に隣接する多数の地点のデータを取り込んで計算を行った。しかし、なお、計算結果のバラつきが大きく、従って、結論についても定性的な傾向についての示唆を与えている程度と解釈するのが無難であろう。

最近、カオス研究の分野では、奇妙なアトラクターの次元 α の多重フラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ ^{10),15)}が注目を集めている。また、粗視化されたリアプノフ指数やその他の物理量について、その

ゆらぎの分布が正規分布からずれて指数分布を示す場合には、 q -相転移¹⁶⁾が起こることも知られている。実際、ここで用いた 500 mb の等圧面高度のゆらぎについても、アトラクターを特徴づける次元が赤道域では 1 個であったものが中緯度および高緯度ではスケールの大きさに応じて複数個存在することがわかっている¹³⁾。さらに、ゆらぎの振幅の分布が赤道域では正規分布であったものが、中緯度や高緯度では正規分布からずれて指数分布になる¹³⁾こともわかってきており、今後のより定量的で、かつ、明確な結論の引き出せる研究への発展が期待されている。

気象学の分野では、観測データを「ゆらぎ」の立場から解析する試みは最近になって始まったばかりである¹⁷⁾。一方、§1にも述べたように気象現象の中には通常の実験室内で観測される物理現象の感覚から見れば、途方もない程巨大な地球規模のゆらぎが存在しており、その理解のためには、いまなお、多くの新しいアプローチの開発が待たれているといえよう。

【謝辞】 本稿に述べた研究は、故・瓜生道也先生(元九州大学理学部教授)のご指導のもとに始められたものである。ここに記して感謝の意を表すると共に、先生のご冥福を心よりお祈り致します。また、本稿を作成するにあたり、九州大学理学部教授宮原三郎先生には有益な御助言を賜りました。ここに記して感謝致します。

参考文献

- 1) E. N. Lorenz: *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963) 130.
- 2) 山口昌哉:『カオスとフラクタル——非線形の不思議——』(講談社, 1986)115頁.
- 3) J. M. T. Thompson & H. B. Stewart: 武者利光・橋口住久訳:『非線形力学とカオス』(オーム社, 1988).
- 4) S. Lovejoy: *Science*, **216** (1982) 185.
- 5) J. Yano and Y. Takeuchi: *J. Meteor. Soc. Japan*, **65** (1987) 661.
- 6) K. Fraedrich: *J. Atmos. Sci.*, **43** (1986) 419.
- 7) H. W. Henderson and R. Wells: *Adv. Geophys.*, **30** (1988) 205.
- 8) 川上紳一, 吉田英太郎: *天気*, **35** (1988) 693.
- 9) P. Grassberger and I. Procaccia: *Physica*, **9D** (1983) 189.
- 10) S. Sato, M. Sano and Y. Sawada: *Prog. Theor. Phys.*, **77** (1987) 1.

- 11) FGGE: 第 1 回・地球大気開発計画・全球・実験(1978年12月—1979年11月), 例えば, 増田耕一: *天気*, **35** (1988) 5.
- 12) 栢原孝浩: 修士論文(九州大学理学部物理, 1989年2月)及び私信(投稿中).
- 13) 岩山隆寛: 修士論文(九州大学理学部物理, 1991年2月)及び私信(投稿中).
- 14) A. M. Fraser and H. L. Swinney: *Phys. Rev.*, **A33** (1986) 1134.
- 15) T. C. Halsey, *et al.*: *Phys. Rev.*, **A33** (1986) 1141.
- 16) 森肇, 岡本寿夫: *日本物理学会誌*, **44** (1989) 316.
- 17) T. Bell: *J. Atmos. Sci.*, **37** (1980) 1700.

(おかもと・ひさお, 九州大学・理学部)
(かやはら・たかひろ, 九州大学・理学部)
(いわやま・たかひろ, 九州大学・理学部)

Summer School 「数理物理'92」

力学と力学系

この分野に関して、これから研究を始めようとしている院生や、専門を異にする数理物理研究者を対象とする入門講義。方法あるいは思想とその有効性を伝える。

日時 9月12日—15日, 午前9時(初日は午後1時)より

場所 学習院大学百周年記念会館3階小講堂
(JR 目白駅下車5分)

講師とテーマ (それぞれ90分ずつ3回の講義)

俣野 博 (東大): 力学系の理論と非線形偏微分方程式

大森英樹 (東理大): 幾何学的描像と非可換の世界

村井信行 (中京大): 拘束系の力学とホモロジー

山田道夫 (京大): ウェーブレット解析

単発講演 公募。参加申込とともに題とアブストラクトを。

参加費 2000円(会場受付にて)

申込 氏名, 所属, 身分, 連絡先, 住所, 電話番号, または e-mail 番号を明記して, 郵送で 〒171 東京都豊島区目白1-5-1

学習院大学理学部物理学教室

江沢 洋

まで。封筒に「数理物理'92参加申込」と朱書すること。

先着300名まで。それを越え参加不可能となった方にのみ通知。

締切 7月31日