一般化された２次元流体系における平行流の安定性

Stability of parallel flows for a generalized two-dimensional fluid system

○岩山　隆寛, 神戸大・理, 神戸市灘区六甲台町１－１, E-mail: iwayama@kobe-u.ac.jp
末吉　雅和, 神戸大・理, 神戸市灘区六甲台町１－１, E-mail: sueyoshi@ahs.scitec.kobe-u.ac.jp
Takahiro IWAYAMA, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe 657-8501
Masakazu SUEYOSHI, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe 657-8501

Stability and evolution of parallel shear flows for a generalized two-dimensional fluid system, so-called α-turbulence system, are investigated theoretically and numerically. The α-turbulence system includes a parameter α which expresses the scale separation between the velocity and the advected quantity. The dependence of stability of parallel shear flows on α is mainly studied. From linear stability analysis, wavenumber of the fastest growing unstable disturbance and its growth rate increase as α increases, in the case of prescribed basic velocity. Direct numerical simulations of α-turbulence equation support this analysis. Considering that the shear instability is caused by the resonance of neutral Rossby waves, we explain the dependence of the wavenumber of the fastest growing unstable disturbance on α.

1.　はじめに

大気や海洋の大規模な運動は, 地球の自転と密度成層の影響によって水平 2 次元的であることが知られている. そのため, 地球流体力学では水平 2 次元の流体方程式を用いた研究が数多く行われてきた. 最近, 地球流体力学で知られたいくつかの 2 次元流体系が, ひとつの実数パラメーター α を含む非線形移流方程式により記述できることがわかった. この系は一般化された 2 次元流体系, もしくは, α 乱流系と呼ばれている. 流れの領域が無限の平面であり, 無限遠方で適切な境界条件が課されているとする. [*1] このとき α 乱流系の支配方程式は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \partial(\psi, q) = 0, \quad \hat{q}(\boldsymbol{k}) = -|\boldsymbol{k}|^{\alpha}\hat{\psi}(\boldsymbol{k}), \tag{1}$$

である. ここで, $\partial(A, B)$ は Jacobian, $\boldsymbol{k}$ は 2 次元波数ベクトル, $\hat{q}(\boldsymbol{k})$, $\hat{\psi}(\boldsymbol{k})$ はそれぞれ $q(\boldsymbol{x})$, $\psi(\boldsymbol{x})$ をフーリエ変換したものである. 以下では, q を渦度, ψ を流れ関数と呼ぶことにする.

現在までのところ α 乱流系の研究は, その乱流特性に関する研究を中心に行われてきており, 流れの安定性に関する研究は, 著者の知る限り末吉・岩山 [(1)] だけである. 末吉・岩山 (2006)[(1)] では α 乱流方程式系 (1) が, 非正準形式の Hamilton 構造を持つことを示した. さらに, energy-Casimir 法を適用して α 乱流方程式に従う平行シアー流の安定性に関する十分条件を導いた. 本研究では α 乱流方程式系においてパラメーター α が流れの安定性に与える影響を, 線形安定性解析や直接数値シミュレーションを用いて研究する.

2.　線形安定性解析と直接数値シミュレーション

α 乱流方程式に従う平行流の線形安定性を調べるために, (1) を平行流を基本場としてそのまわりで線形化し, 線形固有値問題として定式化する. 基本場として速度場が $\boldsymbol{v} = U(y)\boldsymbol{i}$, $U = \tanh a(y - y_0)$ で与えられる状況を考える. ここで y_0 は領域の中心である. 流れの領域は x 方向には無限に続き, y 方向には $y = 0, L_y$ に壁がある水路流問題とする.

平行流の安定性・時間発展の α 依存性を調べる場合, 条件として基本場の速度 U を固定して α を変化させる場合と, 基本場の渦度 Q を固定して α を変化させる場合とが考えられる. ここでは, 前者の場合について調べこた. 領域の大きさ $L_y = 2\pi$, 切断波数 $N = 256$, $a = 10$ として, 線形安定性解析を行った.

各 α の値で最大成長擾乱の波数 $k_{\max}$ とその擾乱の位相速度, 成長率を Table. 1 に示す. 最大成長擾乱の波数は α の値とともに大きくなり, 成長率も大きくなる. また最大成長擾乱の位相速度 c_{r} は数値計算の精度の範囲内でゼロである.

α	$k_{\max}$	位相速度	成長率
1	2.42	0	0.58
2	3.40	0	1.64
3	3.92	0	3.15

Table. 1　各 α の値での最大成長擾乱の波数 $k_{\max}$ とその位相速度と成長率.

同じ状況設定[*2]の下で, (1) の直接数値シミュレーションを行った. 初期の渦度場の y 方向の幅は α の値に依存し, α の値が大きくなると, 渦度場の幅は狭くなる. $\alpha = 1$ の場合には, x 方向の波数が 2 の擾乱が成長するが, 渦の併合によりすぐさま波数 1 が卓越するようになる. $\alpha = 2$ の場合には, x 方向の波数が 4 の擾乱が初期に成長し, すぐさま渦の併合によってより低波数の擾乱が卓越するようになる. $\alpha = 3$ では波数 4 の擾乱が卓越し, 平行流から出現した 4 個の渦はシミュレーションの最後の時刻（$t = 40$）までは合併することなく, 空間中を運動している. したがって, パラメタ α の値が大きくなるにつれて, 平行流から成長する擾乱の x 方向の波数は大きくなる傾向が認めらた.

3.　まとめ

一般化された 2 次元流体方程式（α 乱流方程式）に従う平行流の安定性について研究した. ここでは基本場の流速として $\tanh y$ 型を取り上げ, $\alpha = 1, 2, 3$ の場合を調べた. 線形安定性解析によると, 最大成長擾乱の波数と成長率は α の値と共に大きくなる. α 乱流方程式の直接数値実験は, 時間発展の初期は線形安定性解析の結果と無矛盾であった. 最大成長擾乱の波数の α 依存性を定常 Rossby 波の共鳴の観点から解釈した結果については, 講演当日話す予定である.

参考文献

(1) 末吉, 岩山, “一般化された 2 次元流体系の Hamilton 構造,” 日本流体力学会年会 2006 講演論文集 (2006), AM06-13-018.

*1 領域が二重周期境界条件や水路問題のもとでも同じ方程式系が存在する.

*2 ただし x 方向は 2π 周期とする.