

# 一般化された 2 次元流体系における平行流の安定性

## Stability of parallel flows for a generalized two-dimensional fluid system

岩山 隆寛, 神戸大・理, 神戸市灘区六甲台町 1 - 1, E-mail: iwayama@kobe-u.ac.jp

末吉 雅和, 神戸大・理, 神戸市灘区六甲台町 1 - 1, E-mail: sueyoshi@ahs.scitec.kobe-u.ac.jp

Takahiro IWAYAMA, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe 657-8501

Masakazu SUEYOSHI, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe 657-8501

Stability and evolution of parallel shear flows for a generalized two-dimensional fluid system, so-called  $\alpha$ -turbulence system, are investigated theoretically and numerically. The  $\alpha$ -turbulence system includes a parameter  $\alpha$  which expresses the scale separation between the velocity and the advected quantity. The dependence of stability of parallel shear flows on  $\alpha$  is mainly studied. From linear stability analysis, wavenumber of the fastest growing unstable disturbance and its growth rate increase as  $\alpha$  increases, in the case of prescribed basic velocity. Direct numerical simulations of  $\alpha$ -turbulence equation support this analysis. Considering that the shear instability is caused by the resonance of neutral Rossby waves, we explain the dependence of the wavenumber of the fastest growing unstable disturbance on  $\alpha$ .

### 1. はじめに

大気や海洋の大規模な運動は、地球の自転と密度成層の影響によって水平 2 次元的であることが知られている。そのため、地球流体力学では水平 2 次元の流体方程式を用いた研究が数多く行われてきた。最近、地球流体力学で知られたいくつかの 2 次元流体系が、ひとつの実数パラメーター  $\alpha$  を含む非線形移流方程式により記述できることがわかった。この系は一般化された 2 次元流体系、もしくは、 $\alpha$  乱流系<sup>(12)</sup>と呼ばれている。流れの領域  $D$  が無限の平面であり、無限遠方で適切な境界条件が課されているとする。<sup>\*1</sup> このとき  $\alpha$  乱流系の支配方程式は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \partial(\psi, q) = 0, \quad (1a)$$

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^\alpha \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad (1b)$$

$$\partial(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1c)$$

である。 $\mathbf{k}$  は 2 次元波数ベクトル、 $\hat{q}(\mathbf{k})$ 、 $\hat{\psi}(\mathbf{k})$  はそれぞれ  $q(x)$ 、 $\psi(x)$  をフーリエ変換したものである：

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_D q(x) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx, \quad (2)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_D \psi(x) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx, \quad (3)$$

$$d\mathbf{x} \equiv dx dy. \quad (4)$$

ここで時間  $t$  の独立変数は省略した。

$\alpha = 2$  とした (1) は、2 次元非圧縮性順圧流体の Euler 方程式から導かれる渦度方程式と同じである。このとき、 $q$  は渦度である。 $\alpha = 1$  の場合は、(1) は表面準地衡流方程式 (surface quasi-geostrophic equation)<sup>(3)</sup> となる。この方程式は、安定な密度成層流体の準地衡流渦位方程式において、渦位が 0 となる内部領域の下端境界平面における温度場の発展方程式であり、 $q$  は下端境界の温度場である。 $\alpha = -2$  の場合、(1) は Charney–Hasegawa–Mima 方程式 (もしくは  $f$  平面上の浅水流体の準地衡流渦位方程式) の asymptotic model<sup>(10)</sup> (CHM–AM) となる。<sup>(7)</sup> CHM–AM は、CHM 方程式において現象の水平スケールが Rossby の変形半径より大きい場合である。このとき  $q$  は準地衡流流れ関数である。以下では、2 次元 Euler 方程式系の言葉遣いにしたがって、

方程式 (1) の移流される場  $q$  を渦度、 $\psi$  を流れ関数と呼ぶことにする。

$\alpha$  乱流方程式系の特徴は渦度  $q$  と流れ関数  $\psi$  の間の関係式 (1b) に含まれる実数パラメーター  $\alpha$  である。 $\alpha$  が正の場合、流れ関数は渦度場  $q$  を滑らかにした空間構造を持つ。その滑らかさは  $\alpha$  の大きさに依存し、 $\alpha$  が大きくなると流れ関数がより空間的に滑らかな構造をもつようになる。つまり、 $\alpha$  が大きくなるにしたがって、渦度場と流れ場の小さな空間構造との結合は薄れ、速度場と移流される場との相互作用が波数空間で非局所的になる。このパラメーター  $\alpha$  が系の動力学に与える影響を調べるのが  $\alpha$  乱流系研究の中心テーマである。

$\alpha$  乱流系の研究は、これまで地球流体力学で個別に考察されてきた 2 次元流体系を、統一的な視点から研究できるものと期待される。さらに、流体力学研究者が最も関心を持つ Euler 方程式系 (もしくは Navier–Stokes 方程式系) を  $\alpha$  乱流系の視点から研究することによって、Euler 系 (NS 系) の特異性・普遍性を調べることができであろう。Euler 系 (NS 系) で構築されてきた理論が、どの程度  $\alpha$  乱流系に適用できるかを調べることで、我々の既存の流体力学的知識の限界を知ると共に、より新しい流体力学的描像を構築できる可能性もある。

現在までのところ  $\alpha$  乱流系の研究は、その乱流特性に関する研究を中心に行われてきており、<sup>(12, 13, 15)</sup> 流れの安定性に関する研究は、著者の知る限り末吉・岩山<sup>(14)</sup> だけである。末吉・岩山 (2006)<sup>(14)</sup> では  $\alpha$  乱流方程式系 (1) が、非正準形式の Hamilton 構造を持つことを示した。さらに、energy-Casimir 法<sup>(4)</sup> を適用して  $\alpha$  乱流方程式に従う平行シア一流の安定性に関する十分条件  $U \frac{dQ}{dy} > 0$  を導いた。ここで、 $U$ 、 $Q$  は平行流の流速と渦度である。この条件は、2 次元 Euler 系における平行流の安定性の十分条件である Fjørtoft の定理と同様であり、Fjørtoft の定理は  $\alpha$  乱流方程式系においても成り立つことが示された。末吉・岩山では、具体的な流れに上記の安定条件を適用するに至っておらず、パラメーター  $\alpha$  が流れの安定性に与える影響までは調べられていない。そこで本研究では  $\alpha$  乱流方程式系においてパラメーター  $\alpha$  が流れの安定性に与える影響を、平行シア一流を題材に、線形安定性解析や直接数値シミュレーションを用いて研究する。

<sup>\*1</sup> 領域が二重周期境界条件のもとでも同じ方程式系が存在する。

## 2. 線形安定性解析

### 2.1 定式化

$\alpha$  乱流方程式に従う平行流の線形安定性を調べるために, (1a) を平行流を基本場としてそのまわりで線形化し, 線形固有値問題として定式化する. 基本場として速度場が  $v = U(y)i$  で与えられる状況を考える. 流れの領域は  $x$  方向には無限に続き,  $y$  方向には  $y = 0, L_y$  に壁がある水路流問題とする. この速度場に対応する流れ関数と渦度場をそれぞれ  $\Psi(y), Q(y)$  とする.

流れ関数, 渦度をそれぞれ基本場と擾乱場の和として表現する:

$$\psi(x, t) = \Psi(y) + \psi'(x, t), \quad (5)$$

$$q(x, t) = Q(y) + q'(x, t). \quad (6)$$

ここでプライムの付いた量が擾乱場の量を表す. このとき (1a) を基本場のまわりで線形化した方程式は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} - \frac{d\Psi}{dy} \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{dQ}{dy} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

となる. 境界条件は,  $y = 0, L_y$  において  $v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$  である.

基本場の流れ関数, 渦度を以下のように展開する:

$$\Psi(y) = \sum_{l=1}^N \hat{\Psi}_l \sin(m_l y), \quad (8)$$

$$Q(y) = \sum_{l=1}^N \hat{Q}_l \sin(m_l y), \quad (9)$$

$$\hat{Q}_l = -m_l^\alpha \hat{\Psi}_l. \quad (10)$$

ここで,  $m_l = \frac{\pi l}{L_y}$  である. 同様に  $x$  方向に波数  $k$  を持ち,  $x$  の正の方向に位相速度  $c$  で伝播する波動解を仮定した擾乱場として

$$\psi'(x, t) = \text{Re} \left[ \left\{ \sum_{l=1}^N \hat{\psi}_l \sin(m_l y) \right\} e^{ik(x-ct)} \right], \quad (11)$$

$$q'(x, t) = \text{Re} \left[ \left\{ \sum_{l=1}^N \hat{q}_l \sin(m_l y) \right\} e^{ik(x-ct)} \right], \quad (12)$$

$$\hat{q}_l = -(k^2 + m_l^2)^{\alpha/2} \hat{\psi}_l, \quad (13)$$

を考える. (8)–(13) を (7) に代入して整理すると

$$\sum_{l=1}^N M_{n,l} \hat{\psi}_l - c \hat{\psi}_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (14a)$$

$$M_{n,l} = \frac{1}{2\mu_{k,n}^\alpha} \left[ m_{n-l} \{ \mu_{0,n-l}^\alpha - \mu_{k,l}^\alpha \} \hat{\Psi}_{n-l} \right. \quad (14b)$$

$$\left. + m_{l-n} \{ \mu_{0,l-n}^\alpha - \mu_{k,l}^\alpha \} \hat{\Psi}_{l-n} \right], \quad (14c)$$

$$\mu_{k,l} = \sqrt{k^2 + m_l^2} \quad (14d)$$

を得る. ここで  $c$  は一般に複素数で,  $c = c_r + ic_i$  である. (14) は擾乱の位相速度  $c$  を固有値とする固有値問題となっている.

### 2.2 実験条件および結果

平行流の安定性・時間発展の  $\alpha$  依存性を調べる場合, 条件として基本場の速度  $U$  を固定して  $\alpha$  を変化させる場合と, 渦度  $Q$  を固定して  $\alpha$  を変化させる場合とが考えられる. ここでは, 前者の場合について調べることにする. 基本場の流速として,

$$U = \tanh \{ a(y - y_0) \} \quad (15)$$

を考える. ここで  $y_0$  は領域の中心である. 領域の大きさ  $L_y = 2\pi$ , 切断波数  $N = 256$ ,  $a = 10$  として, (14) を LAPACK<sup>(6)</sup> の dgeev driver を用いて数値的に解いた.

Fig. 1 は  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合の擾乱の成長率の波数依存性である.  $\alpha$  の値が大きくなるに従い, 擾乱が不安定になる波数領域は広くなり, 成長率も大きくなる. 各  $\alpha$  の値で最大成長擾乱の波数  $k_{\max}$  とその擾乱の位相速度, 成長率を Table. 1 に示す. 最大成長擾乱の波数は  $\alpha$  の値とともに大きくなり, 成長率も大きくなる. また最大成長擾乱の位相速度  $c_r$  は数値計算の精度の範囲内でゼロである.

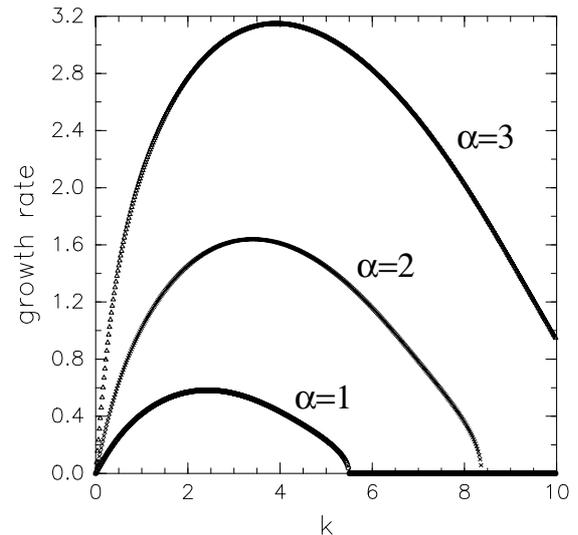


Fig. 1 擾乱の成長率の波数依存性

$\alpha$	$k_{\max}$	$c_r$	$k c_i$
1	2.42	0	0.58
2	3.40	0	1.64
3	3.92	0	3.15

Table. 1 各  $\alpha$  の値での最大成長擾乱の波数  $k_{\max}$  とその位相速度  $c_r$  ( $c$  の実部) と成長率 ( $c_i$  は  $c$  の虚数部).

## 3. 直接数値シミュレーション

### 3.1 実験条件

$\alpha$  乱流方程式系 (1) の直接数値計算を行うことによって, 平行流の安定性や時間発展の  $\alpha$  依存性について調べる. 実験条件は, 以下の通りである. 計算領域は,  $2\pi \times 2\pi$  の矩形領域で, 境界条件は  $x$  方向には周期的,  $y$  方向には  $y = 0, 2\pi$  に壁が存在する水路問題とする. 壁を貫く流れはなく ( $y = 0, 2\pi$  で  $v = 0$ ), 壁に沿う方向は stress free とする. (1) の右辺に粘性項  $\nu \nabla^2 q$  を加え, 空間差分はスペクトル法を用い, 時間積分については Runge–Kutta–Gill 法を用いた.  $y$  方向の場の展開は, 前節と同様に境界条件を満足するように, 速度場は  $\cos$  で展開し, 渦度場と流れ関数は  $\sin$  で展開している.

基本場の速度は  $a = 10$  とした (15) である. 基本場に与える擾乱は, 流れ関数で

$$\psi(x, 0) = \varepsilon R(x) e^{-((y-y_0)/2\delta)^2} \quad (16)$$

とした. ここで  $y_0 = \pi$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\delta = 0.215$ ,  $R(x)$  は一様乱数である. 直接数値シミュレーションに用いたその他の

<sup>\*2</sup>  $\alpha = 3$  の場合は  $\varepsilon = 10^{-6}$  とした.

パラメータ値は、空間解像度  $512 \times 513$ 、時間積分の刻み幅  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ 、粘性係数  $\nu = 1/2000$  である。擾乱は数値実験の初期にのみ与え、基本場は支配方程式にしたがって発展していく。したがって、本実験は自由減衰実験である。

3.2 結果

$\alpha = 1, 2, 3$  の場合の、渦度場  $q$  の時間発展をそれぞれ Fig. 2, 3, 4 に示す。初期の渦度場の  $y$  方向の幅は  $\alpha$  の値に依存し、 $\alpha$  の値が大きくなると、渦度場の幅は狭くなる。 $\alpha = 1$  の場合には、 $x$  方向の波数 2 の擾乱が成長するが、渦の併合によりすぐさま波数 1 の擾乱が卓越するようになる。 $\alpha = 2$  の場合には、 $x$  方向の波数 4 の擾乱が初期に成長し、すぐさま渦の併合によってより低波数の擾乱が卓越するようになる。 $\alpha = 3$  では波数 4 の擾乱が卓越し、平行流から出現した 4 個の渦はシミュレーションの最後の時刻 ( $t = 40$ ) までは合併することなく、空間中を運動している。したがって、パラメタ  $\alpha$  の値が大きくなるにつれて、平行流から成長する擾乱の  $x$  方向の波数は大きくなる傾向が認められる。

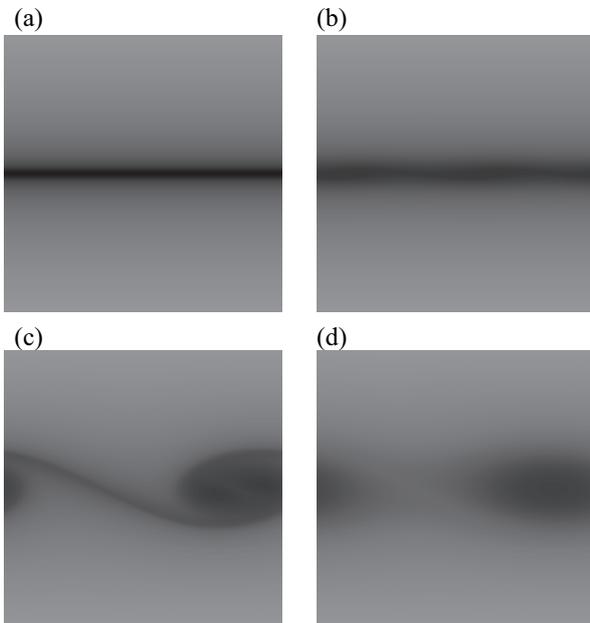


Fig. 2 渦度場のスナップショット。  $\alpha = 1$  の場合。 (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 40$ , (c)  $t = 60$ , (d)  $t = 80$ 。

3.3 波数展開解析

直接数値シミュレーションで得られた渦度場の発展と線形安定性解析の結果を定量的に比較する。渦度場を  $x$  方向に波数展開し、各波数のエンストロフィー  $Z_k(t)$  の発展を調べ、線形安定性解析の結果と比較する。 $Z_k(t)$  の定義は以下のとおりである：

$$Z_k(t) \equiv \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} |\hat{q}_k(y, t)|^2 dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

$$\hat{q}_k(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (18)$$

Fig. 5, 6, 7 にそれぞれ  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合の  $Z_k(t)$  の発展を示した。波数  $k = 1 \sim 6$  の  $Z_k(t)$  を示し、線形安定性解析より求められた最大成長擾乱の発展も同時に描いた。 $\alpha = 1$  では、 $t \lesssim 30$  までは波数 2 の擾乱が、線形安定性解析の最大成長擾乱とほぼ同じ割合で指数関数的に成長し、卓越する。波数 2 の擾乱は  $t \lesssim 50$  までは成長・卓越するが、 $50 \lesssim t$  では減少し、 $65 \lesssim t$  からは波数 1 が代わって卓越する (Fig.5 参照)。  $\alpha = 2$  では、 $t \lesssim 12$  までは波数 3 と 4 の擾乱が線形安定性解析の最大成長擾乱とほぼ同じ

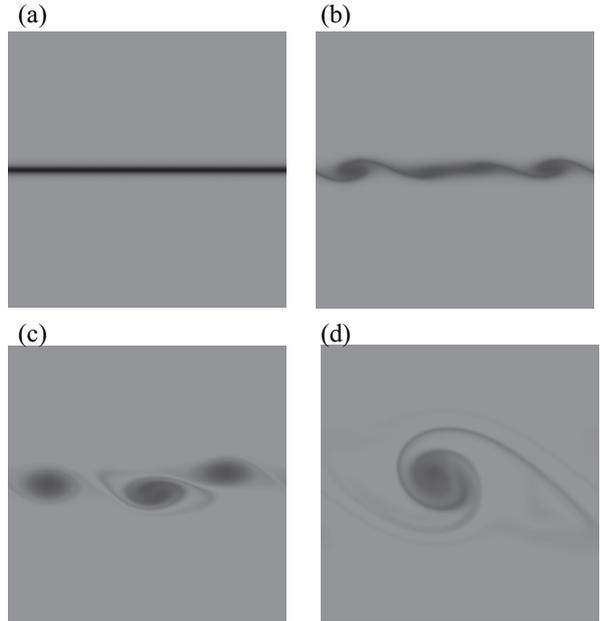


Fig. 3 Fig. 2 と同様。ただし、  $\alpha = 2$  の場合。 (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 14$ , (c)  $t = 20$ , (d)  $t = 40$ 。

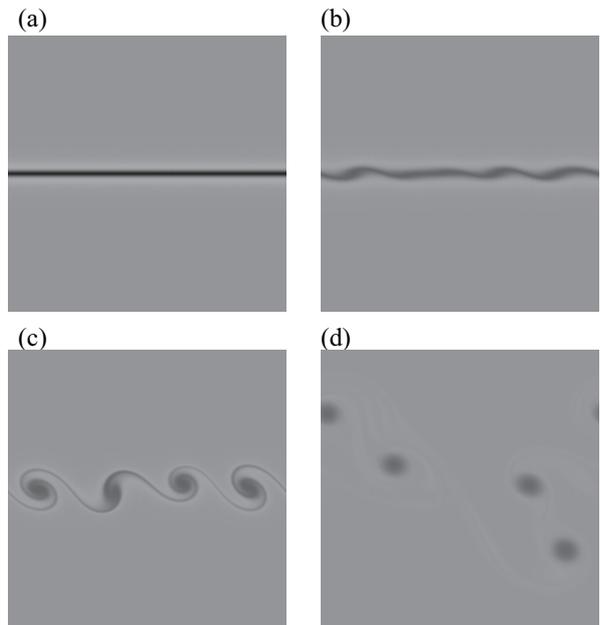


Fig. 4 Fig. 2 と同様。ただし、  $\alpha = 3$  の場合。 (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 8$ , (c)  $t = 10$ , (d)  $t = 20$ 。

割合で指数関数的に成長し、共に卓越するが、 $14 \lesssim t \lesssim 20$  では波数 4 は減少し、波数 3 が卓越する。さらに  $20 \lesssim t \lesssim 29$  の間は波数 2 が、そしてそれ以降は波数 1 の擾乱が卓越する (Fig.6 参照)。  $\alpha = 3$  では、 $t \lesssim 8$  では波数 3 ~ 6 の擾乱が、線形安定性解析の最大成長擾乱とほぼ同じ割合で指数関数的に成長し、共に卓越するが、 $5 \lesssim t \lesssim 13$  では波数 4 の擾乱が卓越する。さらにそれ以降は波数 1 ~ 6 の擾乱全てがほぼ同じエンストロフィーの値のまわりで揺らぎ、飽和に達している (Fig.7 参照)。

まとめると、ここで調べた全ての  $\alpha$  の値について、擾乱の初期の発展は線形安定性解析から求められた最大成長擾乱と無矛盾である。また、 $\alpha = 1, 2$  についてはエネルギーのアップワードカスケードに伴う渦の併合によって、より低波数の擾乱が卓越するようになるが、 $\alpha = 3$  に関しては、ここで解析した波数  $k = 1 \sim 6$

の擾乱は、初期の指数関数的な成長の後に飽和に達している。

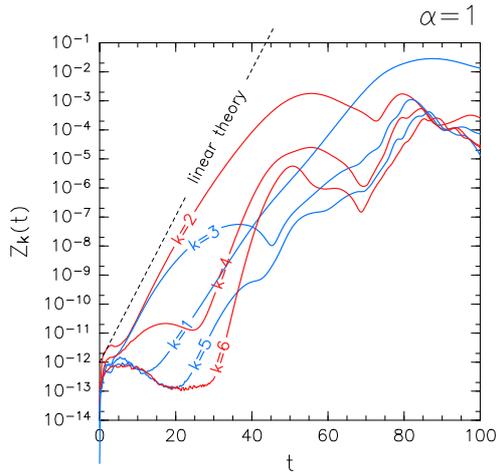


Fig. 5  $Z_k(t)$ , ( $n = 1 \sim 6$ ) の時間発展.  $\alpha = 1$  の場合. 線形安定性解析の結果得られた最大成長擾乱の成長曲線も同時に示している. 奇数波数は青線で, 偶数波数は赤線で示している.

4. 議論

$\alpha$  乱流方程式 (1) の直接数値計算の結果は, 線形安定性解析で求められた最大成長擾乱が, 平行流の時間発展の初期に卓越することを示している. ここで考えている不安定は順圧不安定であるので, 中立 Rossby 波の共鳴の概念<sup>(2)</sup>が適用できるであろう. そこで, 本実験の結果 ( $\alpha$  が大きくなるにつれて, 最大成長擾乱の波数が大きくなる) を中立 Rossby 波の共鳴の概念で解釈してみる.

線形安定性解析の結果によると, 最大成長擾乱は位相速度がゼロである. そこで, 例えば  $y = y_0 \pm \eta$  に存在する定在 (位相速度ゼロ) Rossby 波の位相がロックし, 共鳴を起こして不安定にいたると考える.  $\alpha$  乱流方程式系に存在する Rossby 波の位相速度は (7) より, WKB 的に

$$c = U - \frac{\beta}{(k^2 + m_l^2)^{\alpha/2}}, \quad \beta \equiv \frac{dQ}{dy} \quad (19)$$

である. (19) から定在 Rossby 波の全波数は

$$\sqrt{k^2 + m_l^2} = \left(\frac{\beta}{U}\right)^{1/\alpha} \quad (20)$$

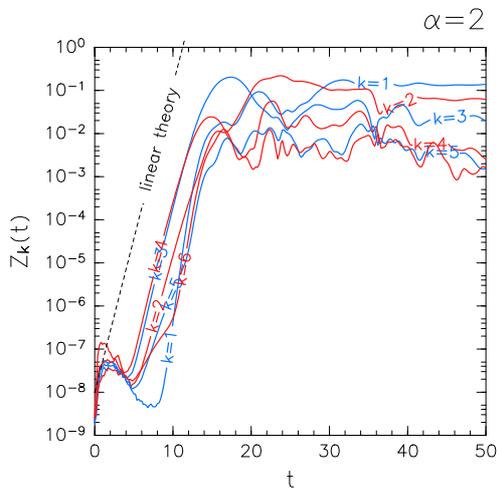


Fig. 6 Fig. 5 と同様. ただし,  $\alpha = 2$  の場合.

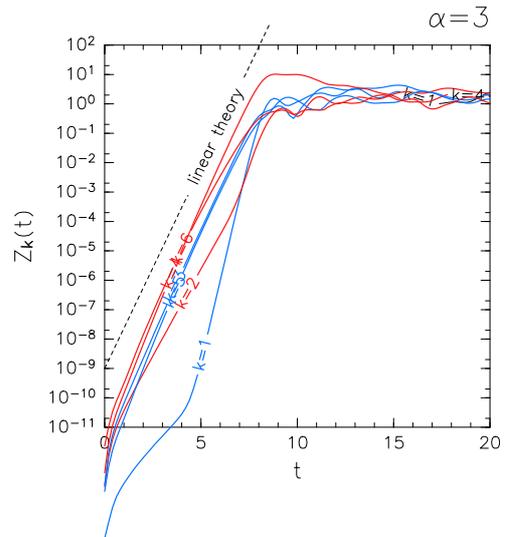


Fig. 7 Fig. 5 と同様. ただし,  $\alpha = 3$  の場合.

となる. Fig. 8 に初期の流速, 渦度場から計算した各  $\alpha$  における  $(\beta/U)^{1/\alpha}$  の値を示した.  $\alpha = 3$  の場合  $3 \lesssim y \lesssim 3.2$  の間でのみ,  $\beta/U$  は非負の値を持つ. したがって,  $\alpha = 3$  の場合はこの領域でのみ, 定在 Rossby 波が存在することになる. Fig. 8 は, 平均流のシアが存在する領域の中心付近で, (20) で決まる定在 Rossby 波の全波数が  $\alpha$  の値と共に大きくなることを示している. つまり,  $\alpha$  の値が大きくなるとより高波数の定常 Rossby 波が存在し, それらが共鳴を起こして成長し, 基本場が不安定になると考えられる.

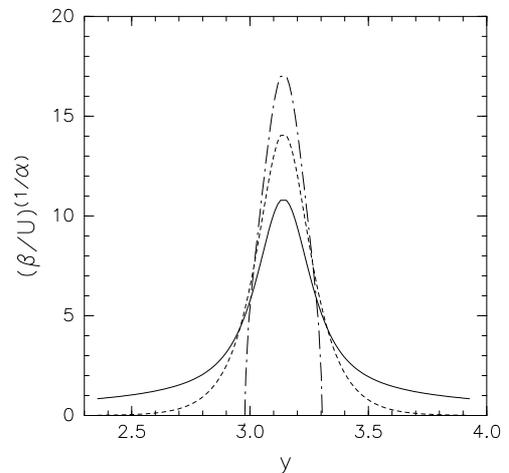


Fig. 8 定在 Rossby 波の全波数の  $y$  依存性. 実線は  $\alpha = 1$ , 破線は  $\alpha = 2$ , 一点鎖線は  $\alpha = 3$ .  $\alpha = 3$  の場合  $3 \lesssim y \lesssim 3.2$  の間でのみ値を持つ.

5. まとめ

一般化された 2 次元流体方程式 ( $\alpha$  乱流方程式) に従う平行流の安定性について研究した. 特に  $\alpha$  乱流方程式に含まれるパラメーター  $\alpha$  が流れの安定性や時間発展に与える影響について調べた. ここでは基本場の流速として  $\tanh y$  を取り上げ,  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合を調べた. 線形安定性解析によると,  $\alpha$  の値が大きくなるにしたがって, 平行流から成長する不安定擾乱の波数領域が広がる. 成長率の最も大きな擾乱 (最大成長擾乱) の波数と成長率は  $\alpha$  の値と共に大きくなる.  $\alpha$  乱流方程式の直接数値実験は, 時間発展の初期は線形安定性解析の結果と無矛盾であった.  $\alpha = 1, 2$  の場合, 平行流から発生した渦は衝突合併

を繰り返してより大きな渦になる。これはエネルギーのアップワードカスケードに対応した渦の合併である。一方、 $\alpha = 3$ では、平行流から発生した渦は、衝突合併することなく空間中を運動し、波数展開解析によると  $x$  方向の波数が  $k = 1 \sim 6$  のエンストロフィーがほぼ同じ値で揺らぎ、飽和に達していた。最後に、最大成長擾乱の波数の  $\alpha$  依存性を定常 Rossby 波の共鳴の観点から解釈した。

本研究では、基本場の流速を固定して  $\alpha$  を変化させる場合について考えたが、基本場の渦度場を固定して  $\alpha$  の値を変化させる場合も考察する必要がある。また、本研究で得られた  $\alpha = 3$  の場合の擾乱の飽和について理論的な解釈が行えていない。これらは今後の課題である。

#### 謝辞

著者の一人 (T. I) は文部科学省科学研究費 (基盤研究 (C) 課題番号 18540433) の支援を受けている。本研究は、文部科学省 21 世紀 COE プログラム “惑星系の起源と進化” の支援のもとに行われた。Fig. 2-4 の作図は、名古屋工業大学大学院工学研究科の渡邊威博士より提供していただいたプログラムを使用した。またそのほかの図は、地球流体電脳クラブライブラリー<sup>(5)</sup>を使用した。

#### 参考文献

- (1) Batchelor, G. K., “Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence”, *Phys. Fluids Suppl.* **12** (1969), pp. II-233–II-239.
- (2) Cairns, R. A., “The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows”, *J. Fluid Mech.*, **92** (1979), pp.1–14.
- (3) Held, I. M., Pierrehumbert, R. T., Garner, S. T. and Swanson, K. L., “Surface quasi-geostrophic dynamics”, *J. Fluid Mech.*, **282** (1995), pp. 1–20.
- (4) Holm, D. D., Marsden, J. E., Rati, T., and Weinstein, A., “Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria”, *Phys. Rep.* **123** (1985), pp.1–116.
- (5) <http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/>
- (6) <http://www.netlib.org/lapack/>
- (7) T. Iwayama, T. G. Shepherd and T. Watanabe, “An ‘ideal’ form of decaying two-dimensional turbulence”, *J. Fluid Mech.* **456** (2002), pp. 183–198.
- (8) Kraichnan, R. H., “Inertial ranges in two-dimensional turbulence”, *Phys. Fluids*, **10** (1967), 1417–1423.
- (9) Kraichnan, R. H., “Inertial-range transfer in two and three dimensional turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **47** (1971), pp. 525–535.
- (10) Larichev, V. D. and McWilliams, J. C., “Weakly decaying turbulence in an equivalent-barotropic fluid,” *Phys. Fluids, A* **3** (1991), pp. 938–950.
- (11) Leith, C. E., “Diffusion approximation for two-dimensional turbulence”, *Phys. Fluids* **11** (1968), pp. 671–673.
- (12) Pierrehumbert, R. T., Held, I. M., and Swanson, K. L., “Spectra of local and nonlocal two dimensional turbulence”, *Chaos, Solitons, and Fractals* **4** (1994), pp. 1111–1116.
- (13) Schorghofer, N., “Energy spectra of steady two-dimensional turbulent flows”, *Phys. Rev. E* **61** (2000), 6572–6577.
- (14) 末吉, 岩山, “一般化された 2 次元流体系の Hamilton 構造,” 日本流体力学会年会 2006 講演論文集 (2006), AM06-13-

018.

- (15) Watanabe, T. and Iwayama, T., “Unified scaling theory for local and non-local transfers in generalized two-dimensional turbulence”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **73** (2004), pp. 3319–3330.