

円形渦によって駆動される非線形エクマンパンピング

神戸大学大学院 理学研究科 岩山 隆寛 (IWAYAMA Takahiro)
神戸大学大学院 理学研究科 百武 宏之 (HYAKUTAKE Hiroshi)

概要

f 平面上の非圧縮性均質流体の下部エクマン境界に、傾度風平衡した円形内部渦によって駆動されるエクマンパンピングを数値的に研究する。よく知られたエクマンパンピングは、直線的な内部流によって駆動され、線形近似のもとでの議論であるが、本研究では流れの曲率項や支配方程式の非線形項も全て考慮している。ロスビー数の摂動展開を用いた解析的研究によると、支配方程式の非線形項はロスビー数の 1 次のオーダーの下降流を形成することが知られている。大きなロスビー数 (台風を想定してロスビー数が 10 程度) の場合に、円形渦の中心付近に下降流が形成されるかどうかを検討してみる。結果は下端境界条件に強く依存する。粘着条件を課した場合には、正の渦度を持った円形内部渦によって駆動されるエクマンパンピング速度は、渦の中心では上昇流である。しかしながら、境界層内の乱流の効果を模した下端境界条件のもとでは、渦の中心で鉛直速度はゼロとなる。

1 はじめに

エクマンパンピングは地球流体力学にとって重要な概念の一つである。回転系上の流体運動において、座標系の回転軸と直交する平面境界付近 (エクマン境界層と呼ばれる) の流れは、座標系の回転と流体の粘性の影響を受ける。平面境界から十分離れた内部領域における流れが等圧線に沿っていても、エクマン境界層における流れは等圧線を横切る。もし、内部領域の流れが地衡流平衡にあり地衡流渦度 ζ_g を持つ場合には、エクマン境界層における等圧線を横切る流れに水平収束もしくは水平発散が生じ、その結果鉛直流が生じる。例えば、下部エクマン層上端における鉛直速度は

$$w = C\zeta_g \quad (1)$$

であることが知られている。ここで、 C は正の定数である [2, 3, 10]。このような内部領域の渦度をもった流れによって、エクマン境界層内に鉛直流が生じるメカニズムはエクマンパンピングと呼ばれる。エクマンパンピングは、内部領域の流れを効率的に減衰させる力学的メカニズムの一つである。

本研究の目的は 2 つある。1 つ目は、内部領域の流れが円形シア一流の場合の、エクマンパンピング速度を調べることである。エクマンパンピング速度の公式 (1) は、古典的エクマンパンピング速度、もしくは線形エクマンパンピング速度と呼ばれる。なぜなら、(1) は内部領域では圧力傾度力とコリオリ力のバランス、エクマン境界層では圧力傾度力、コリオリ力、摩擦力の 3 つのバランスのもとで導かれるからである。即ち、流体力学の支配方程式の移流項 (非線形項) や流れが曲率を持つ場

合の効果(1)には考慮されていない。そこで、このような効果を含むエクマンポンピング、以下非線形エクマンポンピングと呼ぶことにする、の研究が行われてきた [1, 6]。Ishida and Iwayama[6]では、内部領域の流れが直線シア一流の場合に、古典的エクマンポンピング速度の公式(1)に対する支配方程式の非線形項による補正をロスビー数の1次までの精度であるが、ロスビー数の摂動展開によって解析的に調べた。特に、支配方程式を渦度方程式と発散方程式に書き下し、おのこの方程式に含まれる非線形項、即ち、移流項、非線形発散項など、が古典的エクマンポンピング速度の公式をそれぞれどのように補正するのかを詳細に調べた。過去の研究において、内部領域の流れが直線一様シア一流の場合には支配方程式の非線形項を考慮すると、ロスビー数の1次の下降流が生じ、したがって内部領域の流れが正の渦度をもつときの非線形エクマンポンピング速度は、古典的エクマンポンピング速度よりも小さくなること、が指摘されていた [1]。Ishida and Iwayama [6]では、このような性質は渦度方程式の非線形発散項の作用であり、それ以外の非線形項の効果は小さいことを示した。彼らの研究で残された問題は、内部領域の流れが円形の場合である。直線シア一流と円形シア一流の場合の違いは遠心力項(もしくは曲率項)の存在である。遠心力項が古典的エクマンポンピング速度をどのように補正するのかを、Ishida and Iwayama [6]と同様な手法、即ち、ロスビー数の摂動展開による議論、によって調べてみる。

本研究の2番目の、そして主要な目的は、強い円形渦の中心軸付近におけるエクマンポンピング速度を調べることである。一般に、高気圧圏内では下降気流が存在し、晴れる傾向にあり、一方、低気圧圏内では上昇気流が存在し、雲ができやすいことはよく知られている。この高低気圧と鉛直流との関係は古典的エクマンポンピング速度(1)とも整合的である。しかしながら、発達した台風の中心軸付近には雲のない「目」と呼ばれる領域があり、そこでは弱い下降気流の存在が指摘されている(例えば、図1)。さらに渦の中心から離れたところで上昇流が最大となる。先にも紹介したよ

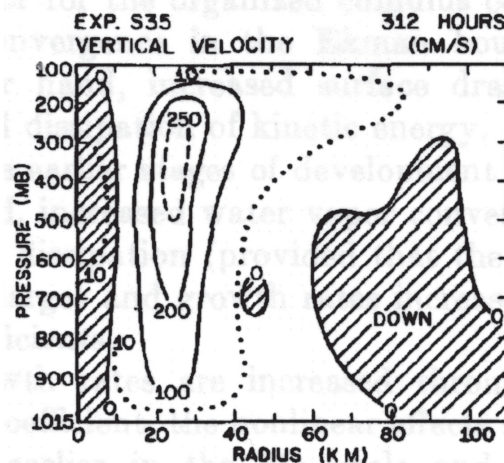


図1 シミュレーションによって得られた台風内の鉛直風の動径・高度分布 (Rosenthal[9])

うに、古典的エクマンポンピングによると正の渦度をもつ内部流の下部エクマン境界層に形成され

る鉛直流は上昇流であるが、ロスビー数の摂動展開を用いた議論によると、支配方程式の非線形項の作用によって鉛直速度が減少することがわかっている [1, 6]. そこで強い非線形性のもとでは、正の渦度領域でもエクマンパンピング速度が負になる可能性が期待できる. そこで、台風のような強い渦の中心付近に形成される「目」の成因に非線形エクマンパンピングが寄与しているのかを検討してみる.

台風の「目」の形成とエクマンパンピングとの関係を調べた研究としては、著者の知る限り Eliassen[4] と Hart[5] の 2 つがある. Eliassen[4] では、台風の「目」が形成されることと整合的な鉛直風速の動径分布（渦の中心軸付近で鉛直風速が下降流もしくはゼロで、中心から離れるにしたがって鉛直風速が増大する）を得るためには、エクマン層の下端境界条件が重要であることを指摘した. 即ち、エクマン境界層の下端境界条件に粘着条件を課した層流エクマン層では、エクマンパンピング速度は円形渦の中心で最大である. しかしながら、エクマン境界層の下端境界条件として、風速の鉛直シアが風速の 2 次に比例するという条件の乱流エクマン層の場合には、エクマンパンピング速度は渦の中心でゼロであり、半径と共に増大していくことを示した. しかしながら、Eliassen[4] は、層流エクマンパンピングの計算を線形近似のもとで行っており、曲率の効果も非線形効果も考慮していない. 一方、Hart[5] は層流エクマン層の場合に、円形渦によって駆動される非線形エクマンパンピング速度の研究を行った. 彼は、ロスビー数の摂動展開を用いて、古典的エクマンパンピング速度に対するロスビー数の 3 次の補正項まで解析的に計算している. 彼は、渦の中心ではロスビー数の増大と共にエクマンパンピング速度は減少するが、依然として鉛直風速の最大値は渦の中心にあり、台風の目が形成されることと整合的な鉛直風速は得られない、と結論付けている. しかしながら、Hart[5] は、ロスビー数が 0.5 の場合までしかエクマンパンピング速度を調べていない. 後で見るように台風のロスビー数は数十程度であり、彼の計算から、台風について言及することは明らかに誤りである.*¹ 大きなロスビー数の場合の非線形エクマンパンピングを研究するには、数値計算に頼らざるを得ないだろう. 以上の理由により、内部領域の円形渦によって、層流エクマン層内に駆動される非線形エクマンパンピング速度を数値計算によって調べることにする.

本論文の構成は以下の通りである. 第 2 節では、問題の定式化を行う. 第 3 節では、エクマンパンピングの支配方程式の数値計算法や計算に用いられる定数について述べている. 第 4 節では、台風を想定した内部領域の円形渦によって駆動されるエクマンパンピング速度を数値計算によって調べる. 第 4.3 小節では、ロスビー数の摂動展開により、曲率効果が古典的エクマンパンピング速度をどのように補正するのかを調べてみる. 第 5 節はまとめと今後の課題である.

2 定式化

本研究では、Hart[5] と同様の定式化を行う. これは、エクマンパンピングの問題としては標準的な設定である.

*¹ Hart[5] が導出したエクマンパンピング速度の公式には明らかな誤りがある. したがって、彼の導いた公式から彼の結論にたどり着けないという問題もある.

2.1 支配方程式系

f 平面上の非圧縮性均質流体の下部エクマン層を考察する. 流体の存在する領域は, 回転軸に垂直な無限に広い平面上で, 側壁は存在しない. 平面上のある点 O を座標系の原点とする定常軸対称問題とする. 座標系は円筒座標系 (r, θ, z) 採用する.

内部領域の流れは, 傾度風平衡を満足する軸対称流 $(0, V(r), 0)$ とする. 境界層内の速度場を, $\mathbf{u}(r, \eta) = (u(r, \eta), V(r) + v(r, \eta), w(r, \eta))$ と表現することにする. 即ち, u, v, w は傾度風からのズレの成分である. 粘性項は鉛直シアーに依存する項のみが支配的であると仮定し, さらに境界層近似を適用すると, 無次元化された支配方程式は以下ようになる:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2v = 2\epsilon \left\{ u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{(2V + v)v}{r} \right\}, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2u = 2\epsilon \left\{ u \frac{\partial(V + v)}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{(V + v)u}{r} \right\}, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0. \quad (2c)$$

ここで, 速度, 長さは代表的な風速 U や代表的な水平スケール L によって無次元化されている. この U, L についてはのちに定める. また ϵ, η はそれぞれロスビー数と伸縮座標であり

$$\epsilon \equiv \frac{U}{fL}, \quad (3)$$

$$\eta \equiv \sqrt{\frac{\nu}{2f}} z \quad (4)$$

と定義される. ここで, f は座標系の回転角速度の 2 倍であり, ν は動粘性係数である.

2.2 エクマンパンピングを駆動する流れ場

エクマンパンピングを駆動する内部領域の流れ $V(r)$ としては以下のような速度プロファイルを設定する:

$$V(r) = \frac{r}{1+r}. \quad (5)$$

(5) は, 自然界の渦をよく表現するモデルとして知られているランキンの渦に, $r \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ において漸近し, なおかつ滑らかな風速分布, 渦度分布を持つ. 台風を想定した渦の研究では, しばしばランキンの渦と同様の速度プロファイルをもつものが用いられている (例えば, [7]). しかしながら, ランキンの渦は渦度に不連続点が存在するために, 本研究で行うような数値計算には不向きである. そこで, 不連続点を持たず, しかもランキンの渦と似た速度プロファイルをもつ, (5) を採用する. ランキンの渦の速度, 渦度プロファイルと (5) で与えられる速度, 渦度との比較は図 2 に示されている. (5) で与えられる速度と台風で観測された接線風速の分布 (図 3) を比べると, (5) の速度プロファイルは台風のそれに近いことがわかる.

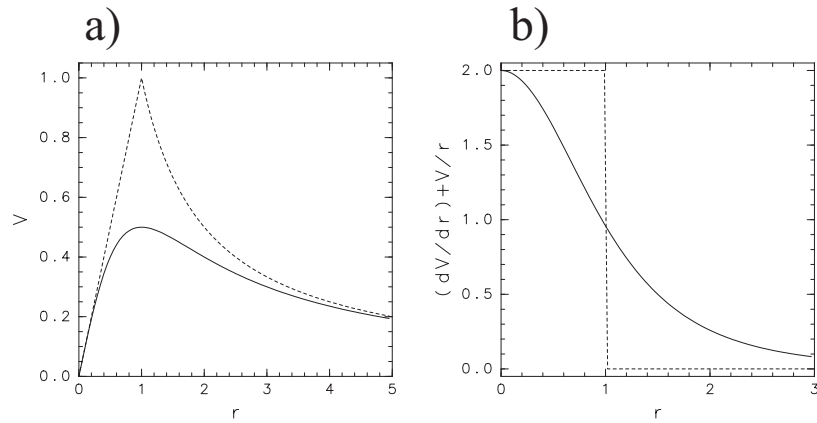


図2 a) (5) で与えられる速度の r 依存性 (実線) と, ランキンの渦の速度の r 依存性 (破線).
 b) (5) で与えられる速度プロファイルの渦度の r 依存性 (実線) と, ランキンの渦の渦度の r 依存性 (破線).

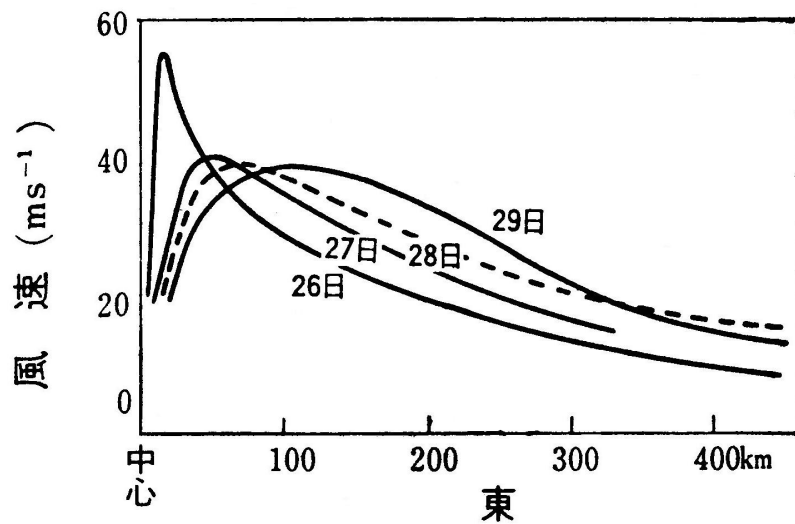


図3 観測された台風の接線風速分布 (山岬 [12])

(5) は最大風速半径を 1, 風速の最大値を 0.5 とする速度分布である. 一方, 図3 から台風の最大風速半径は 50 ~ 100 km, 最大風速は, 40 ms^{-1} 程度と見積もられる. そこで, 支配方程式系の無次元化に用いた L, U はそれぞれ, $L = 50 \sim 100 \text{ km}$, $U = 40 \text{ ms}^{-1}$ と見積もる. また, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ とすると, ロスビー数は $\epsilon \simeq 10$ である.

2.3 境界条件

下端境界条件は、境界の接線方向の条件と法線方向の条件とを指定する必要がある。まず、法線方向の条件については、底面を貫く流れはない、

$$w(r, 0) = 0, \quad (6)$$

という条件を課す。

接線方向の条件は幾つかが考えられる。エクマンパンピングの問題で標準的に用いられている条件は粘着条件

$$u(r, 0) = 0, \quad V(r) + v(r, 0) = 0 \quad (7)$$

である。 ν が分子粘性を表し、境界層が層流的である場合には (7) は適当である。しかしながら、 ν が渦粘性と解釈される場合には、地表に非常に近いところの風速はゼロではなく、地表に近いところにさらに摩擦層を仮定して、粘着条件を課すことになる。そこで、下端の接線方向の一般的な境界条件として、

$$\frac{\partial \mathbf{u}(r, 0)}{\partial \eta} = C_d \mathbf{u}(r, 0) \quad (8)$$

がしばしば用いられる。[10] ここで C_d は定数であり、 $C_d \rightarrow \infty$ で (8) は粘着条件 (7) に帰着し、 $C_d = 0$ で (8) はすべり条件になる。本論文では、(8) の条件を線形すべり条件と呼ぶことにする。

下端の接線方向の境界条件として、Eliassen[4] では

$$\frac{\partial \mathbf{u}(r, \eta)}{\partial \eta} = \hat{C}_d |\mathbf{u}(r, \eta)| \mathbf{u}(r, \eta) \quad (9)$$

を採用している。この境界条件は台風の数値シミュレーションでしばしば採用されているものである [11]。本論文ではこれを非線形すべり条件と呼ぶことにする。

Eliassen[4] では下端境界条件が粘着条件で与えられるエクマン境界層を、層流エクマン層とよび、非線形すべり条件で与えられるものを、乱流エクマン層と呼んだ。Eliassen[4] では線形すべり条件については調べられていない。なお、本研究における数値計算は、下端境界条件として粘着条件と線形すべり条件を課した場合を中心に、非線形すべり条件の場合は補足的に行った。

上端境界条件は、境界層上端 $\eta \rightarrow \infty$ で傾度風に漸近するものとする。

3 数値計算

本論文では、(2) を Lindzen–Kuo の方法 [8]、繰り返し法、緩和法を組合わせて数値的に解いた。Lindzen–Kuo の方法は 2 階の非斉次線形微分方程式の境界値問題を数値的に解く方法である。しかしながら、(2) は非線形の微分方程式である。以下では、非線形の微分方程式を非斉次線形微分方程式の数値的解法である Lindzen–Kuo の方法を使って解く方法について解説する。

解くべき方程式を記号的に

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\mathbf{X} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{X} = \mathbf{F}(u, v, w) \quad (10)$$

と書く. ここで, $\mathbf{X} = (u, v, w)^T$ であり, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ は係数行列で, \mathbf{F} は非線形項である. (10) の解を $\mathbf{X}^{(0)} = (u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)})^T$ と推定し, (10) の右辺に代入する. 即ち,

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\mathbf{X} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{X} = \mathbf{F}(u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}) \quad (11)$$

として, (10) を非斉次線形微分方程式とみなす. (11) を Lindzen-Kuo の方法を使って適当な境界条件のもとで解き, その解を $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} = (\tilde{u}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)}, \tilde{w}^{(1)})^T$ とする. 次に新しい解の推定を

$$\mathbf{X}^{(1)} = (1 - \alpha)\mathbf{X}^{(0)} + \alpha\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \quad (12)$$

とし, $\mathbf{X}^{(1)}$ を使って (10) の右辺を計算し, 得られた非斉次線形方程式を Lindzen-Kuo の方法で解く. この作業を, $\mathbf{X}^{(n)} \simeq \tilde{\mathbf{X}}^{(n+1)}$ まで繰り返す. ここで, α は $0 < \alpha \leq 1$ となる適当な定数である. $\alpha = 1$ の時には, 解を収束させるための繰り返しの回数が少なくすむが, (2) の場合, ϵ が大きくなるにつれて解が収束がしなくなる. 一方, α を小さな値にとると, 解の収束に多くの繰り返しが必要となる. しかしながら, $\alpha = 1$ の場合よりも大きな ϵ の値まで収束する解が得られる.

計算条件は以下の通りである. 計算領域は動径方向, 鉛直方向にそれぞれ $0 \leq r \leq 10, 0 \leq \eta \leq 10$ とし, 格子点数は各方向 500 点とした. ロスビー数は $0 \leq \epsilon \leq 10$ で計算を行う. 線形すべり条件を下端境界条件に採用する場合には, 抵抗係数は $C_d = 0.1, 1, 10$ の 3 通りを調べた.

注目する物理量はエクマン境界層上端の鉛直速度 $W(r) \equiv w(r, 10)$ であり, $W(r)$ のロスビー数依存性, 抵抗係数依存性を調べた.

4 結果と考察

4.1 鉛直速度の動径分布

粘着条件と線形すべり条件のもとで, (2) を数値計算した結果を図 4 に示す. 鉛直速度 $W(r)$ のロスビー数依存性は, 次のようにまとめられる:

- ロスビー数 ϵ の増大に対して, 渦の中心軸 ($r = 0$) に近いほど鉛直速度が減少する. 逆に, $r > 1$ ではロスビー数の増大に対して, 鉛直速度が増える. ただし, $r > 1$ では, ロスビー数の変化に対して鉛直速度の応答は弱い.
- ϵ が 1 より小さいときには, 鉛直速度の最大は渦の中心軸上である. しかしながら, ϵ が 1 より大きくなると, 中心軸での鉛直速度が極小値をとるようになり, 鉛直速度の最大は中心から離れたところに形成される. 鉛直速度が最大値をとる場所は, ϵ や C_d の値に依存するが, 大まかに $r \lesssim 1$ である.

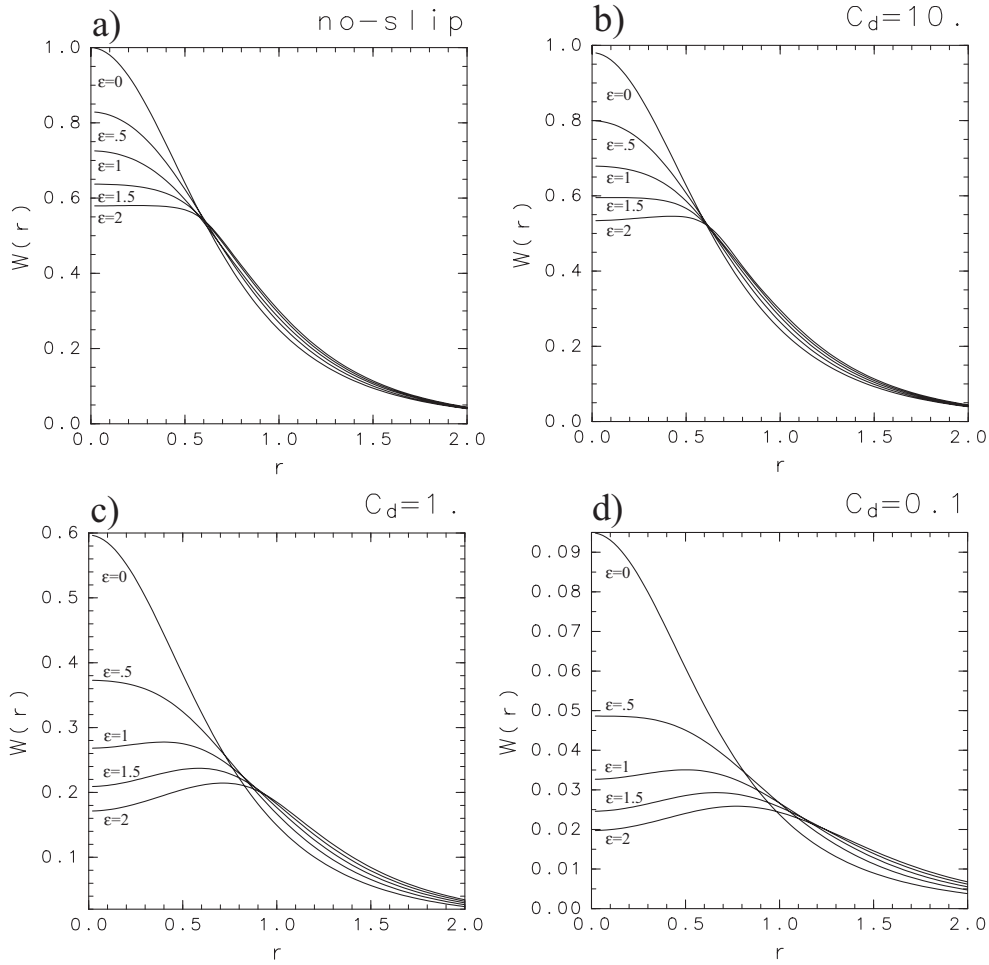


図4 下端境界条件とし粘着条件もしくは線形すべり条件を課した場合のエクマン層上端における鉛直風速の動径分布。ロスビー数が $0 \leq \epsilon \leq 2$ の結果を示している。a) 下端境界条件が (7) の場合。b) 下端境界条件が (8) の場合。ただし、 $C_d = 10$ のとき。c) 下端境界条件が (8) の場合。ただし、 $C_d = 1$ のとき。d) 下端境界条件が (8) の場合。ただし、 $C_d = 0.1$ のとき。

鉛直速度 $W(r)$ の抵抗係数 C_d 依存性は、 C_d が小さくなるにつれて、 $W(r)$ は小さくなる傾向にある。 $C_d = 0$ は自由すべり条件になるので、この場合には底面境界付近には境界層は形成されない。つまり、エクマンポンピング速度はゼロになるはずである。そこで、 C_d の減少にたいする鉛直速度の減少は理にかなっている。

$2 \lesssim \epsilon$ では、本論文の数値計算法では解が収束せず、 $W(r)$ は得られなかった。

4.2 中心軸付近における鉛直速度

前小節で述べたように、 $2 \lesssim \epsilon$ では $W(r)$ は得られなかった。台風のロスビー数は $\epsilon \simeq 10$ であるので、前小節の結果から台風の目の形成に言及することは不可能である。本小節では、Eliassen[4]で行われたように物理量を r の冪で展開し、中心軸付近の流れを記述する方程式を導出し、その方

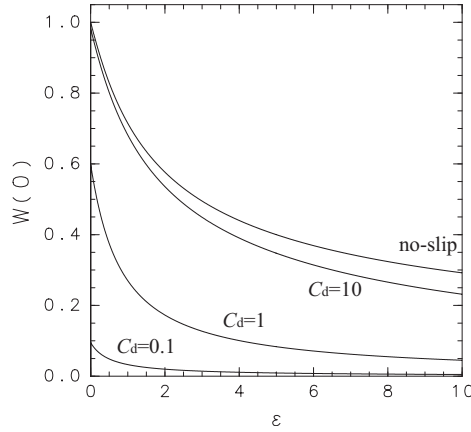


図 5 渦の中心軸におけるエクマンパンピング速度のロスビー数依存性.

程式を数値的に解くことにより中心軸におけるエクマン境界層上端の鉛直速度を調べてみる. この場合には, 台風と同程度のロスビー数の値まで収束する解が得られた.

中心軸で渦度 $\zeta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{r(V+v)\}$ と発散 $\gamma \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru)$ が有限値をとると仮定し, ζ, γ, w, V を r の冪で展開する:

$$\begin{aligned}\zeta(r, \eta) &= \zeta_{(0)}(\eta) + \zeta_{(1)}(\eta)r + \cdots, \\ \gamma(r, \eta) &= \gamma_{(0)}(\eta) + \gamma_{(1)}(\eta)r + \cdots, \\ w(r, \eta) &= w_{(0)}(\eta) + w_{(1)}(\eta)r + \cdots, \\ V(r) &= V_{(0)}r + V_{(1)}r^2 + \cdots.\end{aligned}$$

このとき, r の最低次の発散方程式, 渦度方程式, 連続の式は, それぞれ

$$\frac{d^2\gamma_{(0)}}{d\eta^2} + 2\zeta_{(0)} - 4V_{(0)} = 2\epsilon \left\{ \frac{1}{2}\gamma_{(0)}^2 + w_{(0)} \frac{d\gamma_{(0)}}{d\eta} + 2V_{(0)}^2 - \frac{1}{2}\zeta_{(0)}^2 \right\}, \quad (14a)$$

$$\frac{d^2\zeta_{(0)}}{d\eta^2} - 2\gamma_{(0)} = 2\epsilon \left\{ \gamma_{(0)}\zeta_{(0)} + w_{(0)} \frac{d\zeta_{(0)}}{d\eta} \right\}, \quad (14b)$$

$$\frac{dw_{(0)}}{d\eta} + \gamma_{(0)} = 0, \quad (14c)$$

である. (14) も 3 節で述べた方法で解く. エクマン境界層上端における鉛直速度 $W(0) \equiv w(0, 10) = w_{(0)}$ の ϵ 依存性を図 5 に示す. ϵ の増大と共に, 中心軸における鉛直速度 $W(0)$ は減少するが, $\epsilon = 10$ では依然として上昇流である. ϵ が増大するにつれて $W(0)$ の減少は緩やかになり, ある正の値に漸近していく傾向にある. この結果は, 粘着条件のみならず, 線形すべり条件においても同様である. このことは, 正の渦度をもった円形渦によって駆動される非線形エクマンパンピングの鉛直速度は, 渦の中心軸で上昇流であり, 台風の目の形成に定性的でさえ一致する鉛直流 (渦の中心で鉛直流はゼロ, もしくは弱い下降流) は形成されないことを示唆している.

4.3 摂動論

(14) の方程式系は, Ishida and Iwayama[6] が調べた一様渦度をもった直線流によって駆動される非線形エクマンポンピングの支配方程式に類似している. そこで, Ishida and Iwayama (2006) と同様に, 非線形項が線形エクマンポンピングにどのような影響を与えるのかをロスビー数の摂動展開によって調べる. 下端の境界条件は粘着条件 (7) とする.

物理量をロスビー数で以下のように展開する:

$$\frac{\gamma^{(0)}}{2V_{(0)}} = \gamma_0 + \gamma_1 Ro + \gamma_2 Ro^2 + \dots, \quad (15a)$$

$$\frac{\zeta^{(0)}}{2V_{(0)}} = \zeta_0 + \zeta_1 Ro + \zeta_2 Ro^2 + \dots, \quad (15b)$$

$$\frac{w^{(0)}}{2V_{(0)}} = w_0 + w_1 Ro + w_2 Ro^2 + \dots, \quad (15c)$$

$$Ro \equiv 2V_{(0)}\epsilon. \quad (15d)$$

これらを方程式 (14) に代入する. Ro の最低次は $\mathcal{O}(Ro^0)$ である. $\mathcal{O}(Ro^0)$ の方程式系は

$$\frac{d^2\gamma^{(0)}}{d\eta^2} + 2\zeta_0 - 2 = 0, \quad (16a)$$

$$\frac{d^2\zeta_0}{d\eta^2} - 2\gamma_0 = 0, \quad (16b)$$

$$\frac{dw_0}{d\eta} + \gamma_0 = 0, \quad (16c)$$

$$\gamma_0 \rightarrow 0, \zeta_0 \rightarrow 1 \text{ as } \eta \rightarrow \infty, \quad (16d)$$

$$\gamma_0 = 0, \zeta_0 = 0, w_0 = 0 \text{ at } \eta = 0, \quad (16e)$$

である. この方程式系の解は古典的 Ekman 解,

$$\gamma_0 = -e^{-\eta} \sin \eta, \quad (17a)$$

$$\zeta_0 = 1 - e^{-\eta} \cos \eta, \quad (17b)$$

$$w_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-\eta} \sin \eta - e^{-\eta} \cos \eta), \quad (17c)$$

である.

$\mathcal{O}(Ro)$ の方程式系は

$$\frac{d^2\gamma_1}{d\eta^2} + 2\zeta_1 = 2 \left(\frac{1}{2}\gamma_0^2 + w_0 \frac{d\gamma_0}{d\eta} - \frac{1}{2}\zeta_0^2 + \frac{1}{2} \right), \quad (18a)$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\eta^2} - 2\gamma_1 = 2 \left(\gamma_0 \zeta_0 + w_0 \frac{d\zeta_0}{d\eta} \right), \quad (18b)$$

$$\frac{dw_1}{d\eta} + \gamma_1 = 0, \quad (18c)$$

$$\gamma_1 \rightarrow 0, \zeta_1 \rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty, \quad (18d)$$

$$\gamma_1 = 0, \zeta_1 = 0, w_1 = 0 \text{ at } \eta = 0, \quad (18e)$$

である。(18)において、発散方程式における γ_0^2 と鉛直移流項、渦度方程式における非線形発散項と鉛直移流項が線形エクマンポンピング速度に及ぼす影響は、Ishida and Iwayama [6] で既に詳しく調べられている。ここでは本論文の状況設定で新たに付け加わった項（曲率項に対応）に関して、その寄与を調べてみる。即ち、

$$\frac{d^2\gamma_1}{d\eta^2} + 2\zeta_1 = 1 - \zeta_0^2, \quad (19a)$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\eta^2} - 2\gamma_1 = 0, \quad (19b)$$

$$\frac{dw_1}{d\eta} + \gamma_1 = 0, \quad (19c)$$

$$\gamma_1 \rightarrow 0, \zeta_1 \rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty, \quad (19d)$$

$$\gamma_1 = 0, \zeta_1 = 0, w_1 = 0 \text{ at } \eta = 0, \quad (19e)$$

の解を調べる。(19a)の右辺は古典的 Ekman 解 (17b) を参照すると、 $0 \leq \eta \lesssim 1$ の範囲で正の $\mathcal{O}(1)$ の値を持ち、 $1 \lesssim \eta$ ではせいぜい大きくて $\mathcal{O}(10^{-1})$ 程度で、 $\eta \rightarrow \infty$ で 0 に漸近していく。そこで (19a) の右辺は境界層内で大雑把に正の量をとると見積もれる。この項の鉛直速度に対する寄与を見積もってみる。(19a) を η に関して 2 階微分し、(19b) を用いて ζ_1 を消去して γ_1 に関する微分方程式として書き下すと、

$$\frac{d^4}{d\eta^4}\gamma_1 + 4\gamma_1 = \frac{d^2}{d\eta^2}(1 - \zeta_0^2) \quad (20)$$

となる。 γ_1 が η に関して正弦関数的に振舞うと仮定すると、 $\frac{d^2\gamma_1}{d\eta^2} \sim -C\gamma_1$ 、ここで C はある正の定数、と見積もられるので、(20)の左辺は γ_1 と正のある定数との積と見積もられる。一方右辺も同様に負の量と見積もれる。したがって、(20)から $\gamma_1 < 0$ と見積もれる。連続の式より $w_1 \propto -\gamma_1$ なので、 $\gamma_1 < 0$ ならば $w_1 > 0$ である。つまり円形渦によって新たに付け加わった項（曲率項）は、境界層上端で正の鉛直速度を生成することがわかる。実際に (19) の解析解は

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & -\frac{1}{10}e^{-2\eta} + \frac{1}{10}e^{-\eta} \cos \eta - \frac{7}{15}e^{-\eta} \sin \eta \\ & + \frac{1}{4}\eta e^{-\eta} \sin \eta - \frac{1}{4}\eta e^{-\eta} \cos \eta + \frac{1}{15}e^{-2\eta} \sin 2\eta, \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & -\frac{1}{20}e^{-2\eta} + \frac{1}{30}e^{-\eta} \cos \eta - \frac{1}{10}e^{-\eta} \sin \eta \\ & + \frac{1}{4}\eta e^{-\eta} \sin \eta + \frac{1}{4}\eta e^{-\eta} \cos \eta + \frac{1}{60}e^{-2\eta} \cos 2\eta, \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} w_1 = & \frac{11}{120} - \frac{1}{20}e^{-2\eta} - \frac{7}{120}e^{-\eta} \cos \eta - \frac{19}{120}e^{-\eta} \sin \eta \\ & + \frac{1}{4}\eta e^{-\eta} \sin \eta + \frac{1}{60}e^{-2\eta} \cos 2\eta + \frac{1}{60}e^{-2\eta} \sin 2\eta, \end{aligned} \quad (21c)$$

となるので $\eta \rightarrow \infty$ で $w_1 \rightarrow \frac{11}{120}$ となり、今行った定性的な議論は解析解と無矛盾である。つまり、Ishida and Iwayama[6] の結果と上の解析から、渦度方程式の非線形発散項はロスビー数の 1 次の下降流を生成するように働くが、それ以外の非線形項（曲率項も含む）はロスビー数の 1 次の上昇流を生成するように働く。

4.4 非線形すべり条件の場合

4.2節で示されたように、粘着条件を含む線形すべり条件のもとでは円形渦の中心軸において、エクマン境界層上端に上昇流が生じ、下降流が生成されたり、鉛直速度がゼロになることはなかった。ここでは、非線形すべり条件のもとでエクマンポンピング速度を計算してみる。Eliassen[4]は、物理量を r の冪で展開し、中心軸付近で $w = ar$, ($a > 0$) であることを解析的に示した。しかしながら、中心軸からどのくらい離れたところで鉛直風速が最大となるかは示されていない。また、鉛直速度の抵抗係数 \hat{C}_d に対する依存性も調べられていない。以下では抵抗係数 $\hat{C}_d = 1, 10$ の非線形すべり条件の場合に、(2) を数値的に解くことによって、非線形エクマンポンピングの鉛直速度の動径分布 $W(r)$ を調べる。図6に数値計算の結果を示す。ロスビー数、抵抗係数の値によらず中心軸では鉛直速度はゼロになる。鉛直速度が最大となる位置は、ロスビー数、抵抗係数の増大と共に中心から離れる傾向にあり、さらに鉛直速度はロスビー数、抵抗係数と共に小さくなる。

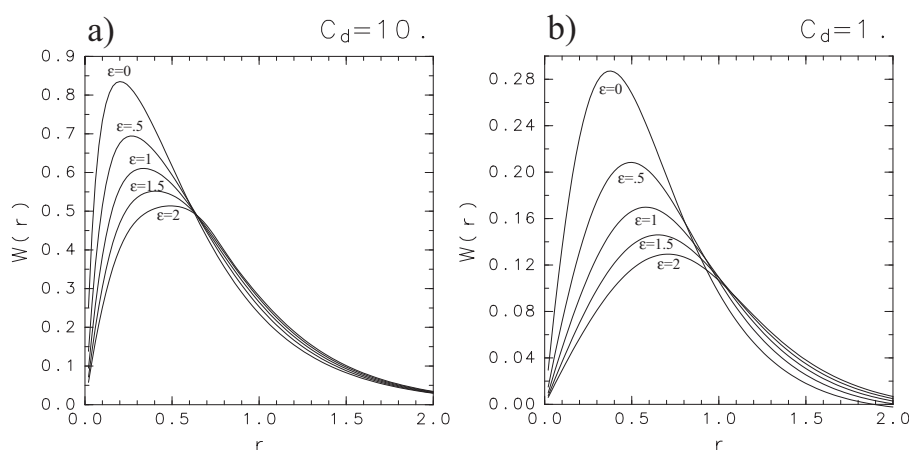


図6 下端境界条件として非線形すべり条件を課した場合のエクマン境界層上端での鉛直速度の動径分布。ロスビー数が $0 \leq \epsilon \leq 2$ の結果を示している。a) $\hat{C}_d = 10$ の場合。b) $\hat{C}_d = 1$ の場合。

5 まとめと今後の課題

発達した台風の中心付近に存在する鉛直流の弱い領域、いわゆる「目」、の形成を念頭において、円形渦によって駆動される非線形エクマンポンピングを数値計算によって研究した。小さなロスビー数から比較的大きな（台風程度の）ロスビー数まで ($0 \leq \epsilon \leq 10$)、また下端境界条件として粘着条件や線形すべり条件、非線形すべり条件の場合について調べた。ロスビー数の値によらず、粘着条件や線形すべり条件のもとでは、渦の中心軸でエクマン境界層上端における鉛直風速は上昇流であり、台風の目の形成と無矛盾な鉛直流を説明することはできなかった。また、既に Eliassen[4] が指摘しているように非線形すべり条件を下端境界条件に課した場合には、渦中心で鉛直風速がゼ

口となり、境界条件によってエクマンポンピング速度がドラスティックに変わることをみた。線形すべり条件は境界層内の乱流を表現した条件と解釈できるが、エクマンポンピング速度に対しては粘着条件と質的に同様な条件であることがわかった。そこで、線形すべり条件を課したエクマン境界層は層流 Ekman 層と解釈するべきである。

本研究における問題設定は、 f 平面上の非圧縮性均質流体で、水蒸気の効果などを含まず、内部領域は傾度風平衡をしているもとのエクマン境界層のみを取り扱っている。したがって、本研究の結果から台風の「目」の形成メカニズムに言及することは不可能である、との批判は当然起こるのであろう。しかしながら、よく知られたエクマンポンピングは直線的で小さなロスビー数の流れによって駆動される場合であり、本研究で調べたような、曲線的で大きなロスビー数によって駆動されるエクマンポンピングはあまり研究されておらず、回転流体力学（地球流体）の問題と捉えれば、本研究は意味のあるものと思われる。

古典的なエクマンポンピングの描像では、エクマンポンピング速度は渦の中心が最大であるが、支配方程式の非線形効果や下端境界条件の非線形効果により、渦中心から離れた位置で上昇流が最大となる。この上昇流最大となる位置の予測や物理的な説明は未だにできていない。このことが今後の課題である。

謝辞

本研究は著者の一人（H.H）の修士論文の結果の一部である。研究に際して、神戸大学 林祥介教授をはじめとする地球および惑星大気科学研究室のメンバーから様々な助言や励ましを頂いたことに感謝する。神戸大学宇宙物理学研究室の今枝佑輔博士からは数値計算に関して貴重な助言を頂いた。もう一人の著者（T.I）は科学研究費補助金（基盤研究（C）18540433）および、21 世紀 COE プログラム「惑星系の起源と進化」から援助を受けており、本研究もこれらの研究費の補助のもとで行われた。

参考文献

- [1] Bannon, P.R. 1998 A comparison of Ekman pumping in approximate models of accelerating planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.* **80**, 1089–1102.
- [2] Charney, J.G. & Eliassen, A. 1949 A numerical method for predicting the perturbation of the mid-latitude westerlies. *Tellus* **1**, 38–54.
- [3] Ekman, V.W. 1905 On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arch. Math. Astron. Phys.* **2**, 1–53.
- [4] Eliassen, A. 1971 On the Ekman Layer in a circular vortex. *J. Meteor. Soc. Japan* **49**, 784–789.
- [5] Hart, J.E. 2000 A note on nonlinear corrections to the Ekman layer pumping velocity. *Phys. Fluids* **12**, 131–135.

- [6] Ishida, S.-I. & Iwayama, T. 2006 A comprehensive analysis of nonlinear corrections to the classical Ekman pumping. *J. Meteor. Soc. Japan.* **84**, 839–851.
- [7] Itano, T. & Ishikawa, H. 2002 Effect of negative vorticity on the formation of multiple structure of natural vortices. *J. Atmos. Sci.* **59**, 3254–3262.
- [8] Lindzen, R.S & Kuo, H.L. 1969 A reliable method for the numerical integration of a large class of ordinary and partial differential equations. *Mon. Wea. Rev.* **97**, 732–734.
- [9] Rosenthal, S.L. 1971 The response of a tropical cyclone model to variations in boundary layer parameters, initial conditions, lateral boundary conditions, and domain size. *Mon. Weather Rev.* **99**, 767–777.
- [10] Vallis, G.K. 2006 *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. (Cambridge U.P.) pp.104–115.
- [11] Yamasaki, M. 1968 Numerical simulation of tropical cyclone development with the use of primitive equations. *J. Meteor. Soc. Japan* **46**, 178–201.
- [12] 山岬正紀, 1987 「台風」, (東京堂出版), p.25.