

非粘性平衡近似方程式系における境界層パンピングの評価: 線形定常問題

石田 晋一, 岩山 隆寛

神戸大学大学院自然科学研究科地球環境科学専攻

(平成 14 年 8 月 30 日提出)

キーワード : 地球流体力学, 渦, 大気境界層, エクマンパンピング

1 はじめに

高気圧や低気圧に代表される地球大気中の大規模な渦に対する, 空気の分子粘性による減衰効果はきわめて弱いことが知られている. 大雑把な見積りによれば, 空気の分子粘性による渦の強度の減衰時間は 100 日よりもはるかに長い. しかしながら, 現実的に観測される地球大気中の大規模な渦は数日の程度で減衰する. このように大きな減衰効果が生じる 1 つのメカニズムは, 地表から僅か 1~2 km の高度の大気層 (大気境界層) が非常に乱れており, 大気の実効的粘性係数が空気の分子粘性係数よりも数オーダー大きな値をもつこと, そして大気境界層内の乱れた空気が, その上層の大気に貫入することにより, 渦を効果的に減衰させることができるためである. したがって, 大気境界層は大気全層から比べれば非常に僅かな高度であるが, そこでの大気の運動は大気全層に大きな影響をもたらすため, 大気の運動を研究する上で重要である (Holton, 1992 [7]).

大気境界層内の大気の運動の物理学的なモデルは Ekman (1905) [5] によって初めて提唱された. 彼は大気境界層内の大気の運動は, コリオリ力, 摩擦力, 気圧傾度力の 3 つの力のバランス状態にあると仮定した. このような大胆な単純化にもかかわらず, このバランス状態から導かれた水平風速の鉛直プロファイルは, 大気境界層内の風速をよく再現していた. さらに Ekman のモデルから, 大気境界層内の空気が自由大気中の地衡風渦度の作用によって自由大気に貫入することが導かれる (Charney and Eliassen, 1949 [3]). この

ような効果は境界層パンピング, またはエクマンパンピングと呼ばれている. しかし, Ekman のモデルには流体の運動方程式系で重要な慣性項が考慮されておらず, 系の時間発展を詳細に記述することができなかった. その後, Ekman の研究の発展が多くの研究者によって行なわれ, 大気境界層の慣性項を含む近似方程式系が立てられ, それにもとづいて大気境界層内の鉛直風速が見積もられた. 例えば, Benton *et al.* (1964) [2] は慣性項の物質微分のうち移流項のみを考慮し, 定常なプリミティブ方程式系での境界層パンピングを数値的に議論した. Young (1973) [12] は慣性項の物質微分のうち局所時間微分項のみを考慮し, 非定常で線形化されたプリミティブ方程式系での境界層パンピングを議論した. Bannon (1998) [1] は f 平面上のプリミティブ方程式系から導かれる種々の近似方程式系における境界層パンピングの比較を, 慣性項の物質微分のうち局所時間微分項のみを考慮した場合, 移流項のみを考慮した場合の 2 通りについて行った. また, Hart (2000) [6] は Benton *et al.* (1964) [2] と同様に定常なプリミティブ方程式における境界層パンピングの公式をロスビー数の高次の項まで解析的に求めている. このように Ekman の研究以来 100 年近く経過しているにもかかわらず, 境界層パンピングの問題は現在でもなお未解決のまま残されている.

最近, Kanehisa (2000) [9] は慣性項の物質微分される速度を, 摩擦力を考慮しない自由大気中の速度で置き換えた新たな方程式系 (非粘性平衡近似方程式系) を提唱し, それを用いて境界層パンピングを議論した. 彼は, 非粘性近似方程式系におけるパンピングの公式

を, 他の幾つかの近似方程式系から導かれたパンピングの公式と比較している. 本論文では, 彼の提唱した新しい近似方程式系におけるパンピングをさらに詳しく検討する. ここでは, 理論的考察を行うための便利さから, Bannon(1998) の研究を参考にして線形非定常問題の場合を議論することにする.

2章では Bannon (1998) のレビューを行い, 問題設定と扱われた方程式系における境界層パンピングの導出を行う. 3章では2章と同じ問題設定のもとで非粘性平衡近似方程式系の境界層パンピングの導出を行い, 他の方程式系の境界層パンピングとの比較, 評価を行う. 4章は考察, 5章はまとめである.

2 Bannon(1998) のレビュー

2.1 方程式系と問題設定

簡単化のためにデカルト座標系における f 平面上でのビジネス流体を考える. 地衡風 V_g は南北成分のみしか存在しない場合を仮定し,

$$V_g = V_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) e^{\sigma t}, \quad (1)$$

とする. ここで L は定数, σ は成長率を表す定数, V_0 は正の定数とする. 地衡風渦度 ζ_g は,

$$\zeta_g = \frac{\partial V_g}{\partial x} = \frac{V_0}{L} e^{\sigma t}, \quad (2)$$

で与えられる. したがって L が正のとき低気圧性循環, 負のとき高気圧性循環の流れを表す.

現象は y 方向に一様で, 大気は非圧縮流体と仮定し, 慣性項は局所時間微分のみを考慮する. このとき境界層内のプリミティブ方程式系 (primitive eq. : PM¹) と連続の式は以下のように与えられる:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -fV_g + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

ここで f はコリオリパラメータ, κ は粘性係数である.

Bannon(1998) はプリミティブ方程式から導かれる4つの近似方程式系における境界層パンピングの公式とプリミティブ方程式系におけるそれとを比較した.

第1の近似方程式系はエクマン方程式 (Ekman eq. : EE²) 系,

$$-fv = -fV_g + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (6)$$

$$fu = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (7)$$

である. この近似系は, (3), (4) において風速の局所時間微分の項を無視し, コリオリ力, 気圧傾度力, 摩擦力がつりあった場合を考えた方程式系である (Ekman, 1905). 第2の近似方程式系は地衡風運動量近似方程式 (geostrophic momentum approximation eq. : GM) 系,

$$-fv = -fV_g + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial V_g}{\partial t} + fu = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (9)$$

である. この近似系は, (3), (4) において風速の局所時間微分の項を地衡風の局所時間微分で置き換えた方程式系である. この方程式系は Hoskins(1975)[8] によって初めて導出され, その境界層への適用は, Wu and Blumen(1982)[11] によって行われた.³ 第3の近似方程式系はエクマン運動量近似方程式 (Ekman momentum approximation eq. : EM) 系,

$$\frac{\partial u_E}{\partial t} - fv = -fV_g + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_E}{\partial t} + fu = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (11)$$

である. この近似系は, (3), (4) において風速の局所時間微分の項を EE 系 (6), (7) を満足する風速 (u_E, v_E) の局所時間微分で置き換えた方程式系である (Tan and Wu, 1993 [10]). 最後の近似方程式系は半地衡風近似方程式 (semigeostrophic approximation eq. : SG) 系,

$$-fv = -fV_g + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (13)$$

である. この近似系は, (4) はそのまま用い, (3) においてのみ風速の局所時間微分の項を地衡風の局所時間微分で置き換えた方程式系である. しかし今の場合, 地衡風は南北方向のみを考えており, 局所時間微分は 0 である (Cullen, 1989 [4]).

²Bannon(1998) では quasi-geostrophic(QG) 系と呼ばれていたが, 本論文ではエクマン方程式 (EE) 系と呼ぶことにする.

³Hoskins(1975), Kanelisa(2000) では, この方程式系は半地衡風方程式系と呼ばれているが, Bannon(1998) にしたがって, 地衡風運動量近似方程式系と呼ぶことにする.

¹Bannon(1998) では NG と略記

東西風, 南北風は, それぞれ以下のような2つの部分からなると考える:

$$u = u_I + V_g \hat{u}(\eta), \quad (14)$$

$$v = v_I + V_g \hat{v}(\eta). \quad (15)$$

(14), (15) の右辺第1項は非粘性状態 ($\kappa = 0$) での速度であり, u_I, v_I からのずれは地衡風 V_g で規格化されている. したがって, \hat{u}, \hat{v} は無次元数である. 鉛直速度も同様に以下のような2つの部分から成ると仮定する. w の非粘性速度 w_I とそれからのずれはそれぞれ独立に連続の式 (5) を満足するとして, w_I からのずれ成分の規格化因子は (5), (14), (15) から以下のように決まる:

$$w = w_I + \frac{V_0 e^{\sigma t}}{L} \left(\frac{2\kappa}{f} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{w}(\eta). \quad (16)$$

ここで, η は, 大気境界層の厚さを表す Ekman depth,

$$\delta_E \equiv \sqrt{\frac{2\kappa}{f}}, \quad (17)$$

を用いて,

$$\eta \equiv \frac{z}{\delta_E}, \quad (18)$$

と定義する. \hat{w} は \hat{u}, \hat{v} と同様に無次元量である. また,

$$\tau \equiv \frac{\sigma}{f}, \quad (19)$$

はロスビー数 (temporal Rossby number) である. (16) は地衡風渦度 (2) を用ると,

$$w = w_I + \zeta_g \delta_E \hat{w}(\eta), \quad (20)$$

と表現できることに注意しておく. PM 系の風速は Bannon(1998) に記載されている. その他の近似方程式系における風速は, 付録 A を参照.

2.2 エクマンバンピングの比較

各方程式系における境界層内の鉛直流を定量的に比較する. 比較の対象は (20) の \hat{w} である. PM 系では,

$$\hat{w}_{PM} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2}(1+\tau^2)^{5/4}} (1 - e^{-\gamma_1 \eta} \cos \alpha_1 \eta) - \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2}(1+\tau^2)^{5/4}} e^{-\gamma_1 \eta} \sin \alpha_1 \eta$$

$$-\frac{\tau \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2}(1+\tau^2)^{5/4}} (1 - e^{-\gamma_1 \eta} \cos \alpha_1 \eta) - \frac{\tau \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2}(1+\tau^2)^{5/4}} e^{-\gamma_1 \eta} \sin \alpha_1 \eta. \quad (21)$$

ここで,

$$\begin{aligned} r &\equiv 2\sqrt{1+\tau^2}, \\ \alpha_1 &\equiv \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \gamma_1 &\equiv \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \theta &\equiv \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad (\tau > 0 \text{ のとき}), \\ \theta &\equiv \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{\tau}\right| \quad (\tau < 0 \text{ のとき}), \end{aligned}$$

である. EE 系では,

$$\hat{w}_{EE} = \frac{1}{2} (1 - e^{-\eta} \sin \eta - e^{-\eta} \cos \eta), \quad (22)$$

である. GM 系では,

$$\begin{aligned} \hat{w}_{GM} &= \frac{1}{2} (1 - e^{-\eta} \cos \eta - e^{-\eta} \sin \eta) \\ &\quad - \frac{\tau}{2} (1 - e^{-\eta} \cos \eta + e^{-\eta} \sin \eta), \quad (23) \end{aligned}$$

である. EM 系⁴では,

$$\begin{aligned} \hat{w}_{EM} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\tau - \tau\eta \right) e^{-\eta} \cos \eta \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\tau \right) e^{-\eta} \sin \eta \quad (24) \end{aligned}$$

である. SG 系では,

$$\begin{aligned} \hat{w}_{SG} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \frac{\tau^2}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{4}}} \times \left\{ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) (1 - e^{-\gamma_2 \eta} \cos \alpha_2 \eta) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-\gamma_2 \eta} \sin \alpha_2 \eta \right\} \\ &\quad - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \times \left\{ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-\gamma_2 \eta} \sin \alpha_2 \eta \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) (1 - e^{-\gamma_2 \eta} \cos \alpha_2 \eta) \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

⁴ \hat{w}_{EM} の導出は付録 B を参照

ここで,

$$\alpha_2 \equiv \sqrt{2} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\gamma_2 \equiv \sqrt{2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\beta \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4-\tau^2}}{\tau}\right) \quad (\beta > 0 \text{ のとき}),$$

$$\beta \equiv \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{4-\tau^2}}{\tau}\right| \quad (\beta < 0 \text{ のとき}),$$

である.

各近似方程式系を評価する1つの基準は, その系における境界層パンピングがPM系の境界層パンピングをどの程度精度よく近似できているかである. $\eta \rightarrow \infty$ の時, すなわち境界層上端における各方程式系の $W \equiv \hat{w}(\eta \rightarrow \infty)$ をロスビー数 τ が $-1 \leq \tau \leq 1$ の範囲内で τ の関数として図示したのが Bannon(1998) の Fig. 1 である. 全ての方程式系における W は $\tau = 0$ において Ekman の古典論である $1/2$ の値をとる. $\tau = 0$ における W の傾きは, PM系では -0.75 である. これに対し, 近似方程式系のそれは, GM系では -0.5 , EM系では -0.75 , SG系では -0.625 である. したがって, ロスビー数の低次のオーダーでは EM系がPM系の最も良い近似系である. PM系の W はロスビー数 τ の非線形関数になっている. GM系, EM系の W は τ の線形関数であるが, SG系のそれは τ の非線形関数になっている. したがってより大きな τ の値に対しては, 近似方程式系の評価は変わってくる. 減衰性の渦 ($-1 \leq \tau < 0$) の場合は SG系がPM系の最も良い近似系になっている. しかしながら, 発達性の渦 ($0 < \tau \leq 1$) では EM系とSG系の W はほぼ同じ値をもち, 共にPM系の良い近似系である.

3 非粘性平衡近似方程式系の評価

Kanehisa(2000) は非粘性平衡近似方程式 (inviscidly balanced approximation eq. : IB) 系,

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} - fv = -fV_g + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial v_I}{\partial t} + fu = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} - fv_I = -fV_g, \quad (28)$$

$$\frac{\partial v_I}{\partial t} + fu_I = 0, \quad (29)$$

を提唱した. この近似系では, 風速の局所時間微分の項を (28), (29) を満たす非粘性風速 (u_I, v_I) の局所

時間微分で置き換えた方程式系である. (28), (29) は自由大気中におけるプリミティブ方程式に一致する. Bannon(1998) と同じ問題設定のもとで (20) の \hat{w} を求めると,

$$\hat{w}_{IB} = \frac{1}{2(1+\tau^2)} (1 - e^{-\eta} \cos \eta - e^{-\eta} \sin \eta) - \frac{\tau}{2(1+\tau^2)} (-e^{-\eta} \cos \eta + e^{-\eta} \sin \eta + 1), \quad (30)$$

である. その他のIB系における風速は付録Aを参照. 図1に $-1 \leq \tau \leq 1$ の範囲での W を示す. これは Bannon(1998) の Fig. 1 にIB系の W を加えたものである. IB系の $\tau = 0$ における W は他の方程式系と同様に $1/2$ の値をとる. $\tau = 0$ における W の傾きは -0.5 であり, GM系と一致する. また, IB系の W は τ の非線形関数である. 減衰性の渦 ($-1 \leq \tau < 0$) の場合は, IB系がPM系の最も良い近似になっている. しかし, 発達性の渦 ($0 < \tau \leq 1$) の場合は τ 依存性は定性的には良く表されているが, W の値はPM系にあまり良く近似されていない.

大気境界層内でのパンピングの鉛直方向の変化を見るために図2, 図3にそれぞれ $\tau = 0.3$, $\tau = -0.3$ の時の \hat{w} の鉛直プロファイルを示す. $\tau = 0.3$ の発達性の渦の時, PM系, GM系, SG系, IB系は絶対値は異なるが互いに同じような鉛直プロファイルをもつ. 一方, EM系は大気上層ではPM系のそれに最も近い値をとるが, 鉛直プロファイルは大きく異なる. また, $\tau = -0.3$ の減衰性の渦の時, 各方程式系の \hat{w} はそれぞれ絶対値は異なるが互いに同じような鉛直プロファイルをもつ.

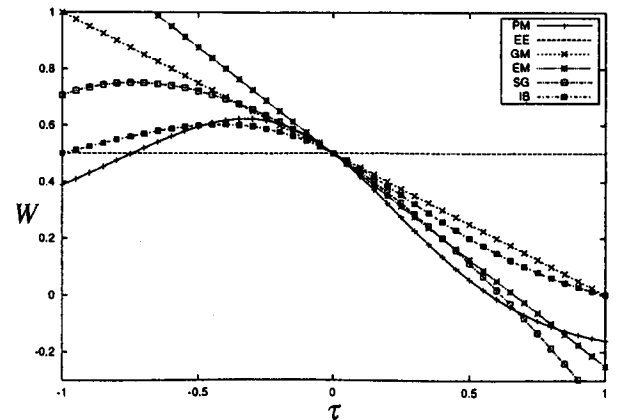


図1 $-1 \leq \tau \leq 1$ におけるPM系, EE系, GM系, EM系, SG系, IB系の W ($\equiv \hat{w}(\eta \rightarrow \infty)$) の τ 依存

性を表す。 $-1 \leq \tau < 0$ の減衰性の渦の時、IB系の W がPM系のそれに最も近い値をとる。

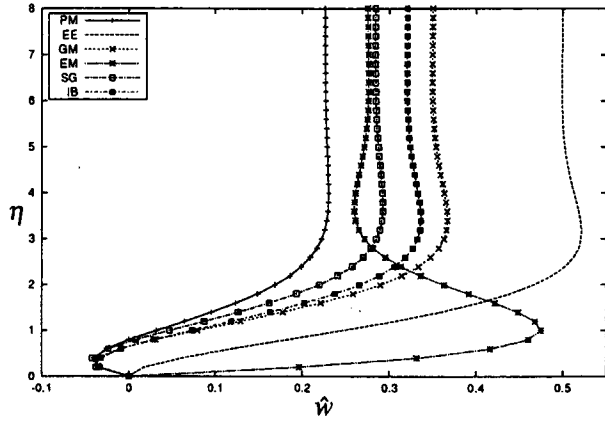


図2 $\tau = 0.3$ の発達性の渦の場合におけるPM系, EE系, GM系, EM系, SG系, IB系の大気境界層内のバンピングの鉛直依存性を表す。

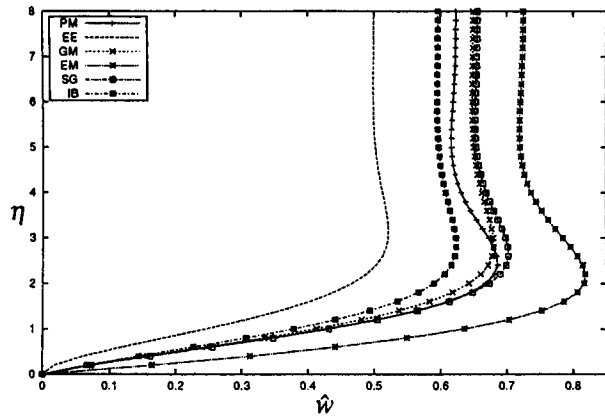


図3 図2と同様。ただし $\tau = -0.3$ の減衰性の渦の場合。

4 考察

各近似方程式系では、大気境界層の上部境界条件に相当する自由大気中での記述の精度が異なっていることに注意すべきである。すなわち、IB系は自由大気中ではPM系で記述される。しかし、EE系は自由大気中では地衡風バランスを仮定しており、これはPM系をロスビー数展開したときの最低次の精度である。また、GM系、EM系、SG系は自由大気中での風速はPM系をロスビー数展開したときの1次までの精度になっている。このような自由大気中での記述の精度の違いは、 W に影響を及ぼす。そこで、その影響を取り除いて、各近似方程式系のバンピングの比較を行うこ

とを考える。鉛直速度 w の非粘性速度からのずれを、自由大気中の渦度 ζ_I と Ekman depth δ_E とで規格化し、 w^* とする。すると、 w は次のように表される：

$$w = w_I + \zeta_I \delta_E w^* \quad (31)$$

EE系, GM系, EM系, SG系では $\zeta_I = \zeta_g$ であり、自由大気中の渦度と地衡風渦度は一致する。しかし、PM系, IB系では $\zeta_I = \frac{1}{1+\tau^2} \zeta_g$ であり、自由大気中の渦度と地衡風渦度は異なる。図4に $-1 \leq \tau \leq 1$ における $W^* \equiv \hat{w}^*(\eta \rightarrow \infty)$ を示す。IB系の W^* はGM系の W^* と一致する。また、SG系の W^* が発達性、減衰性の渦の両方の場合においてPM系の W^* に最も近い値をとる。

GM系とIB系の W^* が一致する理由は平衡風という概念を使って説明できる。GM系, IB系の大気境界層における運動方程式は共に以下のように表すことができる：

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} - fv = -fV_g + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + fu = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (33)$$

ここで u_e, v_e はある方程式を満足する平衡風である。GM系では、 u_e, v_e は自由大気中における地衡風バランス、

$$-fv_e = -fV_g, \quad (34)$$

$$fu_e = 0, \quad (35)$$

を満足する。すなわち、 u_e, v_e は地衡風成分のみをもつ。一方、IB系では、 u_e, v_e は自由大気中におけるプリミティブ方程式、

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} - fv_e = -fV_g, \quad (36)$$

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + fu_e = 0, \quad (37)$$

を満足する。したがって、IB系での u_e, v_e は地衡風成分と非地衡風成分をもつ。すなわち、上の考察は大気境界層内のGM系とIB系は共に自由大気中のある平衡風の局所時間微分を取り入れた方程式系であり、自由大気中の平衡風の記述の精度が異なるだけで、境界層内の方程式としては同等の精度をもつことを示している。

IB系におけるエネルギー方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_I^2 + v_I^2}{2} \right) = -fV_g u_I + u_I \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v_I \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + f v u_I - f v v_I, \quad (38)$$

である。右辺第1項は気圧傾度力によるエネルギーの寄与、右辺第2, 3項は摩擦力によるエネルギーの損失、右辺第4, 5項はコリオリ力によるエネルギーの寄与を表している。(28), (29)より左辺と右辺第1項は相殺されるので、摩擦力による運動エネルギーの損失がコリオリ力による寄与によって補われていることを表す。コリオリ力は見かけの力なので、エネルギー方程式にはそれは寄与しない。したがって、このようなコリオリ力のエネルギー方程式への寄与は、IB系の大きな欠点である。ただし、これまで提唱されてきた近似方程式系にも、このような非物理的なコリオリ力の寄与が含まれていることをコメントしておく。また、GM系のエネルギー方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_g^2}{2} \right) = -fuV_g + V_g \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (39)$$

であり、運動エネルギーの時間変化率は、コリオリ力による寄与(右辺第1項)と摩擦による損失(右辺第2項)からなる。EM系のエネルギー方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_E^2 + v_E^2}{2} \right) = & -fu_E V_g + u_E \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v_E \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ & + fvu_E - fuv_E, \end{aligned} \quad (40)$$

であり、運動エネルギーの時間変化率は、気圧傾度力、摩擦力、コリオリ力の3つの力による寄与からなる。つまり、IB系、GM系、EM系のエネルギー方程式にはそれぞれ非物理的なコリオリ力による寄与を含んでいることがわかる。しかし、SG系には含まれていない。

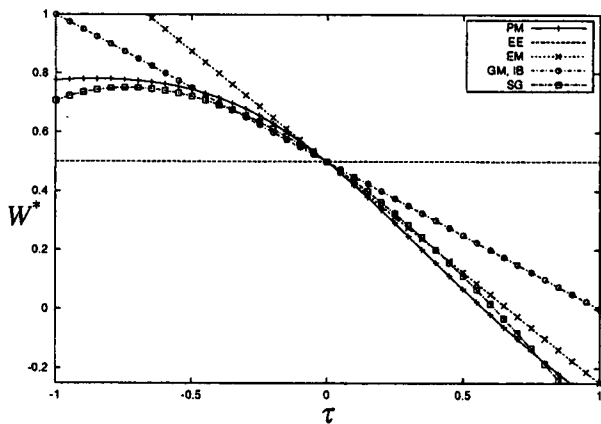


図4 $-1 \leq \tau \leq 1$ におけるPM系、EE系、GM系、EM系、SG系、IB系の気圧境界層上端での W^* ($\equiv \dot{w}^*(\eta \rightarrow \infty)$) の τ 依存性を表す。

5 まとめ

Kanehisa(2000)で提唱された非粘性平衡近似方程式(IB)系をBannon(1998)と同じ状況設定のもとで、 f 平面上のプリミティブ方程式系から導かれる4つの近似方程式系との比較を行った。Bannon(1998)はSG系がPM系の最も良い近似系であり、 $\tau > 0$ の発達性の渦の場合ではEM系もPM系の良い近似系であるという結論であった。本研究では(20)の W の比較において、 $\tau < 0$ の減衰性の渦の場合ではIB系がPM系の最も良い近似系であった(図1参照)。しかしながら、(31)の \dot{w}^* の比較において、IB系の W^* は近似の程度があまり良くないGM系の W^* と一致した(図4参照)。つまり、純粋に大気境界層内における方程式の違いのみを考慮した場合、IB系の W とGM系のそれは一致することがわかった。このことはTan and Wu(1993)の平衡風概念を用いて説明できた。すなわち、平衡風概念によると大気境界層内のGM系とIB系は共に自由大気中のある平衡風の局所時間微分を取り入れた方程式系であり、自由大気中の平衡風の記述の精度が異なるだけで、境界層内の方程式としては同等の精度をもつことがわかった。

また、IB系におけるエネルギー方程式には非物理的なコリオリ力による寄与が含まれている。このことはIB系の大きな欠点である。このコリオリ力による寄与は同様にGM系、EM系にも含まれる。

本研究では非粘性平衡近似方程式系の評価を慣性項の物質微分を局所時間微分のみを考慮した線形非定常問題の場合においてのみ行ったが、移流項も含めた非線形問題の場合や、遠心力の効果を考慮するために円柱座標系を用いた境界層パンピングの比較を行う必要がある。これらの点は今後の課題である。

Appendix A 各近似方程式系における風速

A1 EE系の風速

EE系において計算した結果は以下の通りである:

$$u_I = 0, \quad (41)$$

$$v_I = V_g, \quad (42)$$

$$w_I = 0, \quad (43)$$

$$\hat{u} = -e^{-\eta} \sin \eta, \quad (44)$$

$$\hat{v} = -e^{-\eta} \cos \eta. \quad (45)$$

A2 GM系の風速

GM系において計算した結果は以下の通りである:

$$u_I = -\tau V_g, \quad (46)$$

$$v_I = V_g, \quad (47)$$

$$w_I = \tau \frac{z}{L} e^{\sigma t} V_0, \quad (48)$$

$$\hat{u} = -e^{-\eta} \sin \eta + \tau e^{-\eta} \cos \eta, \quad (49)$$

$$\hat{v} = -e^{-\eta} \cos \eta - \tau e^{-\eta} \sin \eta. \quad (50)$$

A3 EM系の風速

EM系において計算した結果は以下の通りである⁵:

$$u_I = -\tau V_g, \quad (51)$$

$$v_I = V_g, \quad (52)$$

$$w_I = \tau \frac{z}{L} e^{\sigma t} V_0, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{u} = & -\tau + e^{-\eta} \cos \eta \left(\tau + \frac{1}{2} \tau \eta \right) \\ & - e^{-\eta} \sin \eta \left(1 - \frac{1}{2} \tau \eta \right), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \hat{v} = & 1 - e^{-\eta} \cos \eta \left(1 - \frac{1}{2} \tau \eta \right) \\ & - e^{-\eta} \sin \eta \left(\tau + \frac{1}{2} \tau \eta \right). \end{aligned} \quad (55)$$

A4 SG系の風速

SG系において計算した結果は以下の通りである:

$$u_I = -\tau V_g, \quad (56)$$

$$v_I = V_g, \quad (57)$$

$$w_I = \tau \frac{z}{L} e^{\sigma t} V_0, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \hat{u} = & \left(\frac{\tau^2}{\sqrt{4-\tau^2}} - \frac{2}{\sqrt{4-\tau^2}} \right) \times \\ & e^{-\gamma_2 \eta} \sin \alpha_2 \eta + \tau e^{-\gamma_2 \eta} \cos \alpha_2 \eta, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \hat{v} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\tau^2}{\sqrt{4-\tau^2}} - \frac{2}{\sqrt{4-\tau^2}} \right) \times \\ & e^{-\gamma_2 \eta} \{ (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) \sin \alpha_2 \eta - 2\gamma_2 \alpha_2 \cos \alpha_2 \eta \} \\ & - \frac{1}{2} \tau e^{-\gamma_2 \eta} \{ (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) \cos \alpha_2 \eta + 2\gamma_2 \alpha_2 \sin \alpha_2 \eta \}. \end{aligned} \quad (60)$$

ここで,

$$\alpha_2 \equiv \sqrt{2} \sin \left(\frac{\beta}{2} \right), \quad (61)$$

⁵導出の詳細は Appendix B を参照

$$\gamma_2 \equiv \sqrt{2} \cos \left(\frac{\beta}{2} \right), \quad (62)$$

$$\beta \equiv \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4-\tau^2}}{\tau} \right) \quad (\beta > 0 \text{ のとき}), \quad (63)$$

$$\beta \equiv \pi - \tan^{-1} \left| \frac{\sqrt{4-\tau^2}}{\tau} \right| \quad (\beta < 0 \text{ のとき}), \quad (64)$$

である.

A5 IB系の風速

IB系において計算した結果は以下の通りである:

$$u_I = -\frac{\tau}{1+\tau^2} V_g, \quad (65)$$

$$v_I = \frac{1}{1+\tau^2} V_g, \quad (66)$$

$$w_I = \frac{\tau(z/L)e^{\sigma t}}{1+\tau^2} V_0, \quad (67)$$

$$\hat{u} = \frac{\tau}{1+\tau^2} e^{-\eta} \cos \eta - \frac{1}{1+\tau^2} e^{-\eta} \sin \eta, \quad (68)$$

$$\hat{v} = -\frac{1}{1+\tau^2} e^{-\eta} \cos \eta - \frac{\tau}{1+\tau^2} e^{-\eta} \sin \eta. \quad (69)$$

Appendix B EM系における \hat{w} の導出

Bannon(1998) では, 大気境界層における方程式を \hat{u} の 4 階微分方程式に帰着させているが, EM系では, 以下のように複素速度を使って議論する方が簡明である.

(11) に虚数 i を掛け (10) に加える. ここで u_E, v_E は EE系での風速であり,

$$u_E = -V_g e^{-\eta} \sin \eta, \quad (70)$$

$$v_E = V_g (1 - e^{-\eta} \cos \eta), \quad (71)$$

である. また, $u + iv = V$ と定義すると,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 2iV + 2V_g(1+i\tau) - 2iV_g \tau e^{-(1+i)\eta}, \quad (72)$$

となる. また, 下部境界条件は $\eta = 0$ で, $V = 0$ とする. EM系の自由大気中における運動方程式は GM系の自由大気中における運動方程式と一致する. GM系の自由大気中における東西, 南北風速をそれぞれ u_{GM}, v_{GM} とおくと,

$$u_{GM} = -\tau V_g, \quad (73)$$

$$v_{GM} = V_g, \quad (74)$$

である。したがって、上部境界条件は $\eta \rightarrow \infty$ で、

$$\begin{aligned} V &= u_{GM} + iv_{GM}, \\ &= -V_g(\tau - i), \end{aligned} \quad (75)$$

である。(72)を上部、下部境界条件を使って解くと、

$$\begin{aligned} V(\eta) &= -V_g(\tau - i) \\ &+ V_g(\tau - i)e^{-(1+i)\eta} + \frac{(1+i)}{2}V_g\tau\eta e^{-(1+i)\eta}, \end{aligned} \quad (76)$$

である。右辺第1項は(75)より自由大気中における風速である。したがって右辺第2項、第3項と連続の式よりEM系における \tilde{w} が導出される。

参考文献

- [1] Bannon, P. R., 1998: A comparison of Ekman pumping in approximate models of the accelerating planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 1446-1451.
- [2] Benton, G. S., F. B. Lipps, and S.-Y. Tuann, 1964: The structure of the Ekman layer for geostrophic flows with lateral shear. *Tellus*, **16**, 186-199.
- [3] Charney, J. G., and A. Eliassen, 1949: A numerical method for predicting the perturbation of the middle-latitude westerlies. *Tellus*, **1**, 38-54.
- [4] Cullen, M. J. P., 1989: On the incorporation of atmospheric boundary layer effects into a balanced model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **115**, 1109-1131.
- [5] Ekman, V. W., 1905: On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arch. Math. Astron. Phys.*, **2**(11), 1-53.
- [6] Hart, J. E., 2000: A note on nonlinear corrections to the Ekman layer pumping velocity. *Phys. Fluids*, **12**, 131-135.
- [7] Holton, J. R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 3rd ed. Academic Press, 511 pp.
- [8] Hoskins, B. J., 1975: The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equations. *J. Atmos. Sci.*, **32**, 233-242.
- [9] Kanehisa, H., 2000: A formula of Ekman pumping for a Meso-scale straining flow. *Pap. in Meteor. Geophys.*, **50**, 131-137.
- [10] Tan, Z., and R. Wu, 1993: The Ekman momentum approximation and its application. *Bound.-Layer Meteor.*, **68**, 193-199.
- [11] Wu, R., and W. Blumen, 1982: An analysis of Ekman boundary layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1774-1782.
- [12] Young, J. A., 1973: A theory for isallobaric air flow in the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1584-1592.